Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional
Colegio de Ciencias y Humanidades

CUADERNO DE TRABAJO PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS IV, PARA LOS PROGRAMAS VIGENTES DE MATEMÁTICAS DEL CCH

RESPONSABLE DEL PROYECTO
Israel Gómez Flores

Participantes:

Marycarmen Guillén Acosta

Maribel Serrato Duarte

Mónica Citlalli Pereyra Zamudio

Área Académica: Ciencias Físico Matemáticas y de Las Ingenierías
Línea Temática: Actividades Colegiadas

'Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-INFOCAB
PB100123
2024

Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional
Colegio de Ciencias y Humanidades

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO, PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS IV, PARA LOS PROGRAMAS VIGENTES DE MATEMÁTICAS DEL CCH.

RESPONSABLE DEL PROYECTO
Israel Gómez Flores

Participantes:
Marycarmen Guillén Acosta
Maribel Serrato Duarte
Mónica Citlalli Pereyra Zamudio

Área Académica: Ciencias Físico Matemáticas y de Las Ingenierías
Línea Temática: Actividades Colegiadas

'Trabajo realizado con el apoyo del Programa
UNAM-DGAPA-INFOCAB
PB100123
2024

Índice

Introducción. Dentro del perfil del egresado y de los nuevos programas de estudio del Colegio de Ciencias y Humanidades, así como la Orientación y Sentido del Área de Matemáticas, se pretende que el alumno adquiera diversas habilidades, actitudes y valores tales que les permita hacer frente a las demandas que exigen las facultades o el campo laboral. De acuerdo con los nuevos programas de Matemáticas I – IV donde se establece como columna vertebral trabajar el enfoque de resolución de problemas, de tal forma que se seleccionen problemas que despierten el interés de los alumnos y promuevan el análisis y la reflexión matemática.

Por lo anterior surge la necesidad de desarrollar un material como el cuaderno de trabajo que esté acorde con los nuevos programas de Matemáticas, que funcione como apoyo para el desarrollo de los cursos tanto para los profesores con experiencia como para los de nuevo ingreso del Colegio. En tanto se presenta una propuesta de Cuaderno de Trabajo para el curso de Matemáticas IV, que pueda servir como material didáctico de apoyo en el desarrollo del curso, al mismo tiempo proporcionar una base, de actividades y ejercicios, que puedan orientar el desarrollo del curso, sobre todo a los profesores de nuevo ingreso. El diseño de un Cuaderno de Trabajo, para el curso de Matemáticas IV, está acorde con los objetivos que se plantean en los nuevos programas de estudio, con lo que se busca apoyar la planeación didáctica del curso.

La estructura del cuaderno de trabajo que se presenta, cumple con lo que se señala en el protocolo de equivalencia que es: el conjunto estructurado de técnicas y procedimientos para realizar actividades tanto teóricas como prácticas sobre una o varias unidades del programa, su desarrollo tiene como base los ejercicios graduados y estructurados por medio de estrategias de enseñanza-aprendizaje que resolverán los estudiantes con el apoyo del profesor, incluyendo alternativas para el tratamiento de cada uno de los temas. Incluye: a) una guía para su uso, b) propósitos, c) estrategias de aprendizaje, d) formas de evaluación y e) bibliografía.

Objetivos generales y específicos del proyecto

General:
Diseñar un Cuaderno de Trabajo, para el curso de Matemáticas IV, para los programas vigentes de Matemáticas del CCH.
Específicos:
Elaborar estrategias y actividades que estén acordes a los nuevos programas de Matemáticas IV.
Elaborar una serie de ejercicios graduados y estructurados, que estén acordes a los aprendizajes señalados.
Diseñar instrumentos de evaluación necesarios para el desarrollo del curso de Matemáticas IV.
Poner en práctica el material diseñado durante un semestre, para analizar los resultados y realizar los cambios o ajustes necesarios, de acuerdo con la experiencia docente.

ESTRUCTURA DEL CUADERNO DE TRABAJO: El cuaderno de trabajo que se presenta tiene la siguiente estructura:

- Una guía para su uso
- Estrategias de Aprendizaje (Por unidad): Dividida por secciones que corresponden a cada uno de los aprendizajes señalados en el programa.
- Cada unidad cuenta con teoría básica y ejercicios que aborda las temáticas y aprendizajes señalados y una propuesta de evaluación al final de cada unidad.
- Se presenta las respuestas a los ejercicios de cada una de las unidades
- Al final del cuaderno de trabajo se presenta la bibliografía recomendada para alumnos y profesores

Guía para su uso. El cuaderno de trabajo está diseñado para cubrir las cuatro unidades del curso de Matemáticas IV, cada una de las unidades esta seccionada por secciones que corresponden a cada uno de los aprendizajes de la unidad. El curso de Matemáticas IV está dividido en cuatro unidades, por lo que cada profesor deberá distribuir el contenido del cuaderno de trabajo de acuerdo al número de horas señaladas en el programa.

Cada una de las secciones, cuenta con una serie de ejercicios y problemas, que se podrán trabajar durante las sesiones, del mismo modo se presenta una serie de ejercicios propuestos para que a consideración de los profesores, se podrán trabajar en la misma en clase o trabajarlo como actividades extra-clase, para que los alumnos reafirmen sus conocimientos.

En el desarrollo de algunos ejercicios o problemas se le sugiere hacer uso de algún software matemático, como GeoGebra, ya sea para gráficas los diferentes tipos de funciones, para resolver los problemas o realizar un análisis más detallado de las gráficas. Los problemas los puede ir trabajando el profesor a lo largo de la unidad, a modo de proyecto, de tal forma que se pueda ir presentando una retroalimentación de lo que se va realizando.

El profesor debe de tomar en cuenta lo siguiente:

- En algunas de las sesiones se sugiere el uso de software, como GeoGebra, por lo que cada profesor deberá planear la forma de usarlo.
- El número de secciones cubre todos los aprendizajes señalados en el programa, por lo que el profesor deberá distribuir los tiempos de acuerdo a su planeación didáctica.
- Los ejercicios que se presentan están a consideración de cada profesor, para realizarlos fuera o dentro del salón de clase.

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

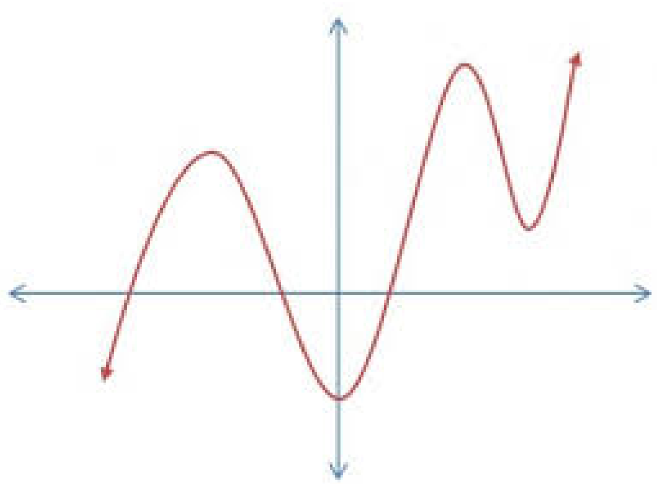
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS IV

UNIDAD I: Funciones polinomiales



Elaborado por:

MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA

Revisado por:

ISRAEL GÓMEZ FLORES
MARIBEL SERRATO DUARTE
MÓNICA CITLALLI PEREYRA ZAMUDIO

MATEMÁTICAS IV UNIDAD I	FUNCIONES POLINOMIALES
Propósito: El alumno habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados. Elaborado por: Marycarmen Guillén Acosta	**Aprendizajes** **Sección 1**. Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y rango. **Sección 2**. Comprende el significado de la notación funcional, la utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales. Usa la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función. **Sección 3.** Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor y su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica. **Sección 4.** Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica. **Sección 5.** Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

Sección 1

Tema: Relación, Noción generalizada de función. Relaciones entre dos variables. Regla de correspondencia. Dominio y rango.

Aprendizaje: Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y rango.

En esta unidad se trabajará el concepto de relación entre dos variables, regla de correspondencia, función polinomial y sus principales elementos: notación, dominio, rango, ceros o raíces de la función, su comportamiento gráfico y problemas de aplicación.

Entender los conceptos de relación y función es de suma importancia en las Matemáticas y para lograr esa comprensión es necesario adentrarse en la noción de correspondencia**,** ya que esta tiene un papel fundamental en las funciones.

Los siguientes ejemplos ilustran el concepto de correspondencia, en situaciones de la vida diaria:

1. En una tienda comercial, cada artículo **está relacionado** con su precio; es decir, a cada artículo **le corresponde** un único precio.
2. En el Colegio, cada alumno **está relacionado** con un número de boleta; esto es, a cada estudiante **le corresponde** un único número.
3. Cada persona en la Ciudad de México **está relacionada** con una edad; es decir, a cada persona **le corresponde** una sola edad.

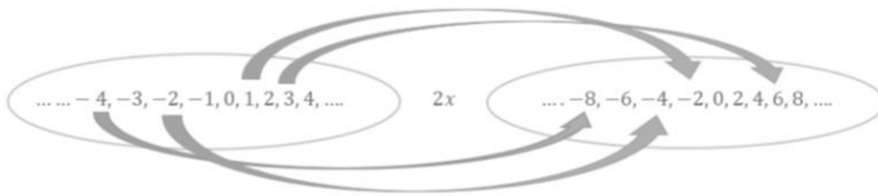
Cada correspondencia en los ejemplos anteriores comprende dos conjuntos, en el primer ejemplo, tenemos el conjunto formado por los artículos de la tienda y el conjunto formado por los precios. En el segundo caso, los estudiantes del Colegio forman un conjunto y los números de boleta otro; lo mismo pasa en el último ejemplo, los conjuntos formados son todas las personas que viven en la Ciudad de México y las edades.

Observemos que, a cada elemento del primer conjunto, le corresponde un solo elemento del segundo conjunto; es decir, cada artículo tiene un único precio, cada alumno un único número de boleta y cada persona una sola edad.

Para el estudio de la unidad nos enfocaremos en conjuntos numéricos cuyas correspondencias estarán dadas a través de expresiones algebraicas.

Ejemplo:

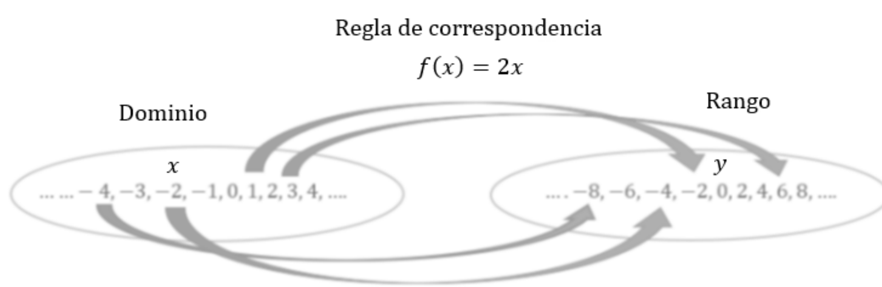
Sea el conjunto formado por todos los números reales, si a cada elemento de este conjunto lo multiplicamos por dos, entonces a cada número real **le corresponde un único número**, que es su doble. En este caso, la relación entre ambos conjuntos se puede establecer de manera algebraica. Si tomamos un número cualquiera x en el conjunto de los números reales, entonces al número x le corresponde el número $2x$.



En cada uno de los ejemplos anteriores, tenemos una correspondencia entre dos conjuntos que llamamos función.

Definición. Una **función** es una regla de correspondencia entre dos conjuntos llamados Dominio y Rango, de tal manera que a cada elemento del primero le asocia uno y solo un elemento del segundo.

En el ejemplo anterior, podemos decir entonces que el Dominio de la función es el conjunto de los números reales, la regla de correspondencia es la expresión: $2x$, mientras que el Rango está formado por todos los números múltiplos de 2. A los elementos del Dominio se les representa con la letra x y reciben el nombre de variable independiente. Los valores que toma la función se conocen como variable dependiente y generalmente se representan con la letra y.



Consulta el siguiente video para saber más de relaciones y funciones:

(Matemáticas profe Alex, 2018)

Valor de una función. El valor de una función f es aquel que toma la variable y cuando se aplica la regla de correspondencia a x.

Ejemplo:

Si $f(x) = 3x + 1$. El valor de la función en $x = -3$ es:

$$f(-3) = 3(-3) + 1 = -9 + 1 = -8$$

El valor de la función en $x = 4$ es:

$$f(4) = 3(4) + 1 = 12 + 1 = 13$$

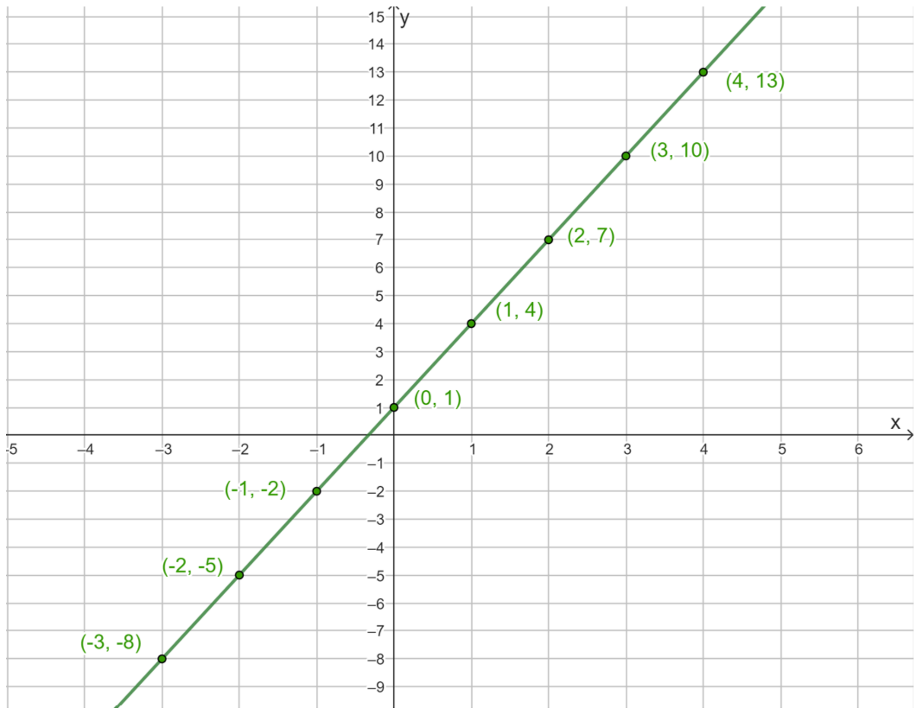
Toda función f se puede representar de manera grafica en un plano cartesiano. La gráfica de una función, son todos los puntos (x, y) en el plano, donde y es el valor de $f(x)$. Para entender este concepto, puedes apoyarte en el siguiente video:

(Matemáticas profe Alex, 2018b)

Siguiendo con el ejemplo anterior, la gráfica de la función $f(x) = 3x + 1$ quedaría representada de la siguiente manera:

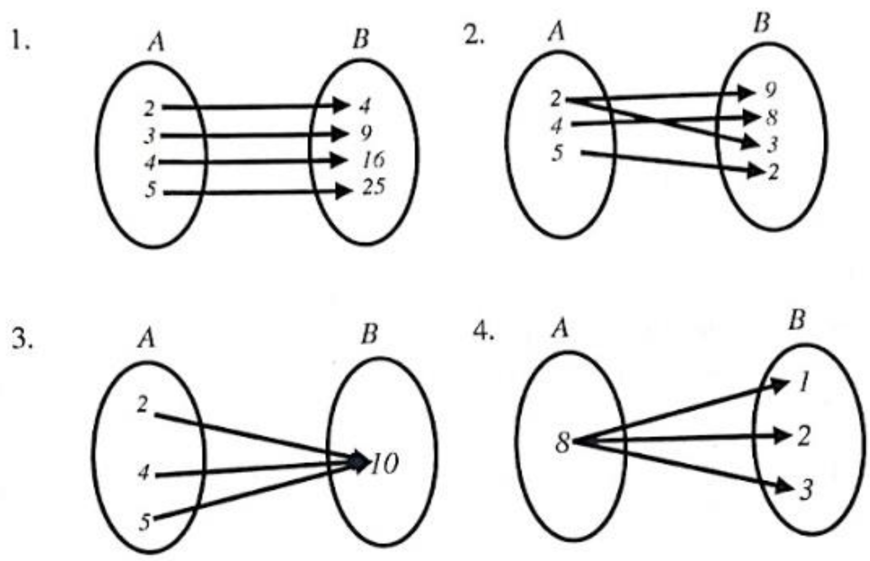
$$f(x) = 3x + 1$$

x	$f(x) = y$
-3	-8
-2	-5
-1	-2
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13



EJERCICIOS

E 1.1 Determina si la relación entre los conjuntos de los siguientes diagramas, corresponden o no a una función. Justifica tu respuesta:



1.- SI/NO ____________ Porqué: ____

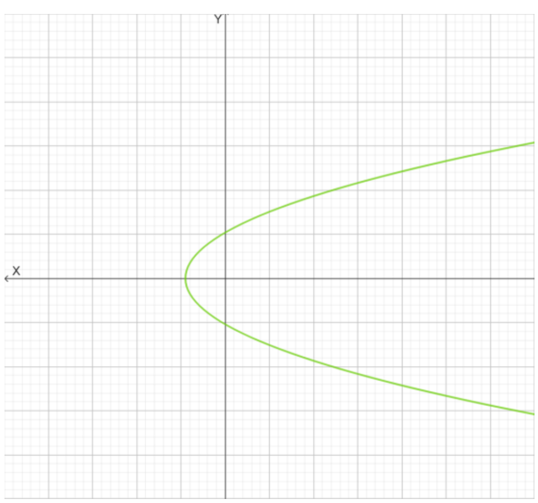
2.- SI/NO ______ Porqué: ______

3.- SI/NO ______ Porqué: ______

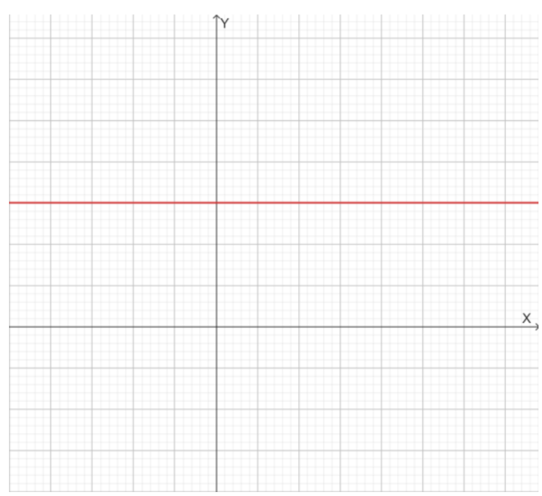
4.- SI/NO ______ Porqué: ______

E 1.2 ¿Cuáles de las siguientes graficas es la representación en el plano de una función?

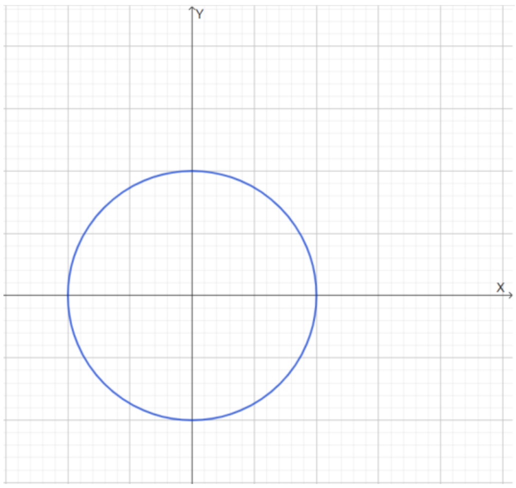
a)



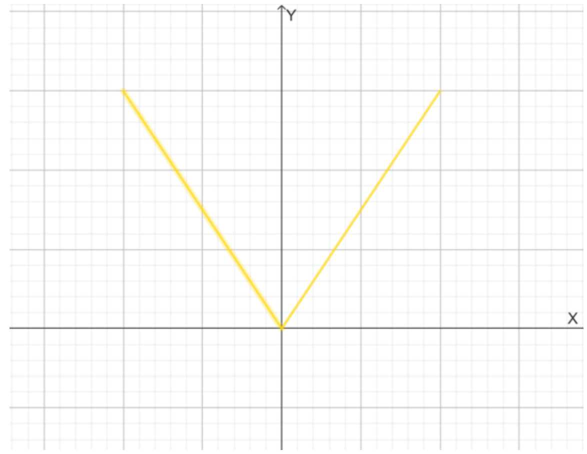
b)



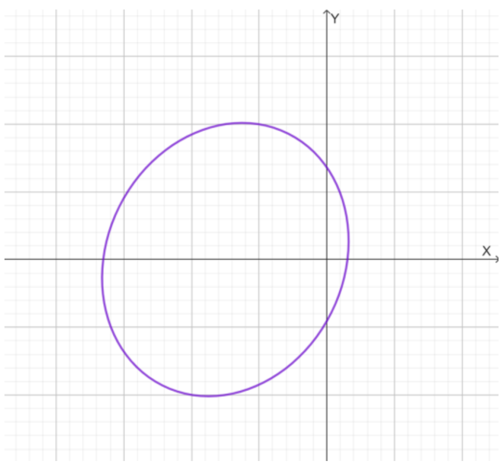
c)



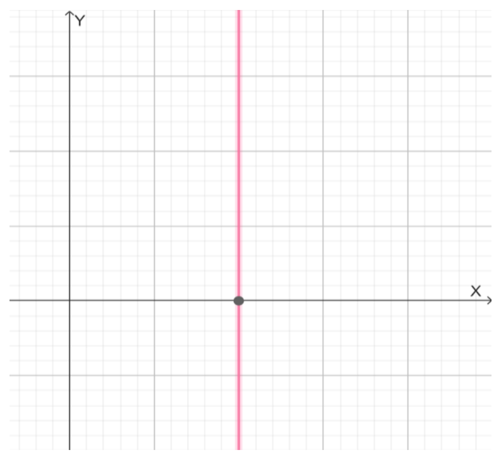
d)



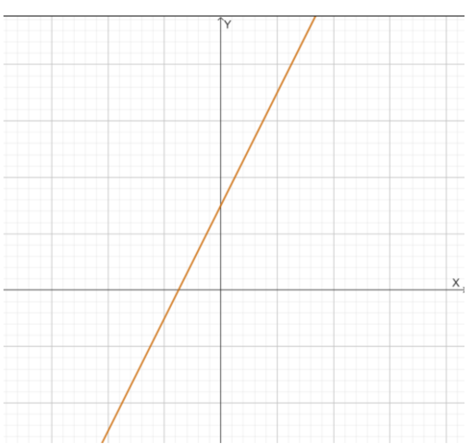
e)



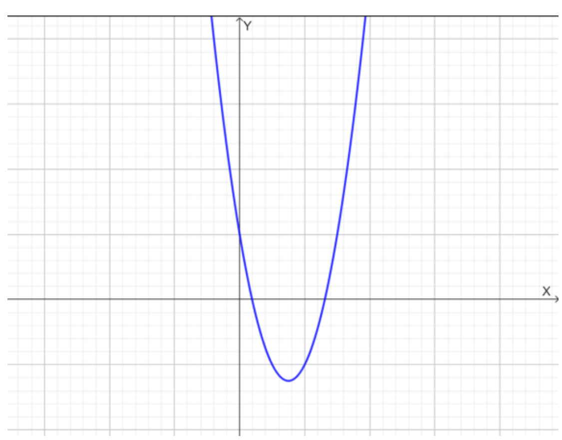
f)



g)



h)



E 1.3 Evalúa las siguientes funciones y obtén el conjunto de pares ordenados.

a) Si $f(x) = 3x + 1$, determina el valor de $f(-2), f(3)\ y\ f(\frac{1}{2})$

b) Si $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$, determina el valor de $f(2), f(-3)\ y\ f\left(\frac{4}{3}\right)$

c) Si $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2$, determina el valor de $f\left(\frac{1}{3}\right), f(5)\ y\ f(-5)$

d) Si $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$, determina el valor de $f(2), f(-3)\ y\ f(\frac{4}{3})$

e) Si $f(x) = 2x^3 + 2x - 1$, determina el valor de $f(0), f(-4)\ y\ f(3)$

E 1.4 Identifica si los siguientes conjuntos de pares ordenados representan una función.

a) $\{(-2,4),(3,9),(4,16),(5\ 25)\}$

SI/NO ____________ Porqué: ____

____

____

b) $\{(3,2),(3,6),(5,7),(5,8)\}$

SI/NO ____________ Porqué: ____

____

____

c) $\{(2,4),(3,4),(5,4),(6,4)\}$

SI/NO ____________ Porqué: ____

____

____

d) $\{(2,4),(6,2),(7,3),(4,12),(2,6)\}$

SI/NO ____________ Porqué: ____

____

____

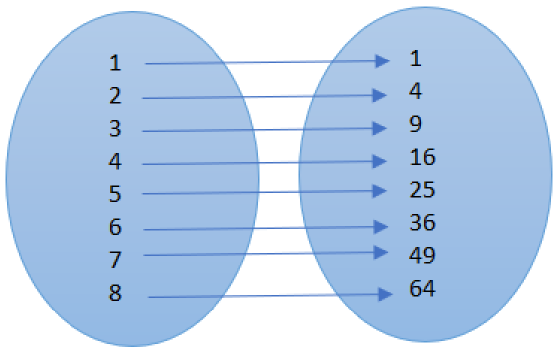
e) $\{(a,2a),(-2a,3a),(4a,a)\}$

SI/NO ____________ Porqué: ____

____

____

E 1.5 En los siguientes diagramas, establece si la relación entre conjuntos se trata de una función, de ser así, determina la regla de correspondencia que la representa, la gráfica de la función e identifica el Dominio y Rango.

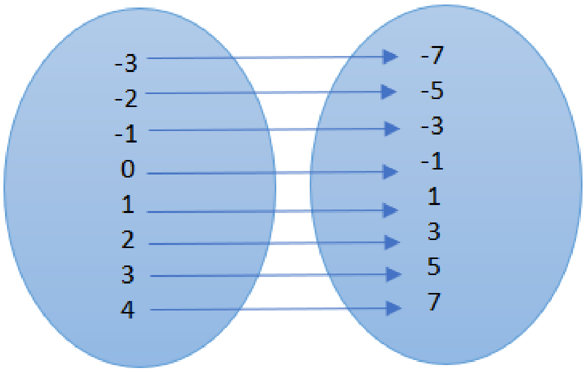


Regla de correspondencia:

$f(x) =$ ________________

x	y

Gráfica



Regla de correspondencia:

$f(x) =$ ________________

x	y

Gráfica

EJERCICIOS DE REPASO DE LA SECCIÓN

E 1.6 Sea $f = x^3 + 1$ con dominio en $\mathbb{R}$:

a) Determina el valor de $f(-6), f(5), f(7), f(a), f(b)$, donde $a\ y\ b$ son números reales.

b) ¿Cuál es el rango de la función?

E 1.7 Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados corresponden a una función:

a) $A = \{(x, y), tal\ que\ 2y = x^2 + 5\}$

b) $A = \{(x, y), tal\ que\ x = 3y + 2\}$

c) $A = \{(x, y), tal\ que\ x^2 + y^2 = 6\}$

d) $A = \{(x, y), tal\ que\ y = 3\}$

e) $A = \{(x, y), tal\ que\ x \cdot y = 0\}$

f) $A = \{(x, y), tal\ que\ x = 3\}$

E 1. 8 Dada la función $f(x) = -x^4 - 1$:

a) Traza la gráfica

b) ¿Cuál es su dominio y rango?

E 1.9 Si $f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}$, determina $f\left(-\frac{1}{3}\right), f(-3)\ y\ f(4)$

E 1.10 Obtén el dominio, rango y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Sección 2

Tema: Notación funcional: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, Intervalos.

Aprendizaje. Comprende en significado de la notación funcional, la utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales. Usa la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función.

Funciones Polinomiales

Recordemos que un polinomio en una variable x es una expresión algebraica que consta de una suma de productos de constantes y potencias de la variable x; y a cada uno de estos sumandos se le llama monomio. Puesto que tenemos varios monomios, de ahí el nombre de polinomio. Por ejemplo: $3x^4 + 2x^2 + 2$, es un polinomio de grado cuatro. El grado de un polinomio, lo determina el valor de mayor exponente.

Definición. Una función polinomial es una regla de correspondencia expresada por un polinomio de grado n:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero positivo y a_n números reales.

Funciones polinomiales de grado bajo		
Nombre	Expresión	Grado
Función constante	$f(x) = a$	0
Ejemplo: $f(x) = 4$ es una función polinomial de grado cero		
Función lineal	$f(x) = ax + b$	1
Ejemplo: $f(x) = 2x - 1$ es una función polinomial de grado uno		
Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$	2
Ejemplo: $f(x) = 3x^2 + 2x$ es una función polinomial de grado dos		
Función cúbica	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	3
Ejemplo: $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ es una función polinomial de grado tres		
Función cuartica	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	4
Ejemplo: $f(x) = x^4 + 4x^2 - 2x + 10$ es una función polinomial de grado cuatro		

Las funciones polinomiales tienen muchas aplicaciones en la vida diaria. Ayudan en la modelación de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales. Estas funciones están definidas y son continuas en todos los números reales.

Los conjuntos numéricos, tales como el dominio y rango, pueden ser representados por medio de intervalos. Los intervalos son conjuntos de números determinados por dos extremos.

Intervalo abierto. Se representa como (a, b) y, es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b.

Intervalo cerrado. $[a, b]$**,** es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b. Un intervalo cerrado contiene a los extremos.

Intervalos semi abiertos. $(a, b]$, representa al conjunto de números mayores que a y menores o iguales a b, mientras que $[a, b)$ se refiere al conjunto de números mayores o iguales a a y menores que b.

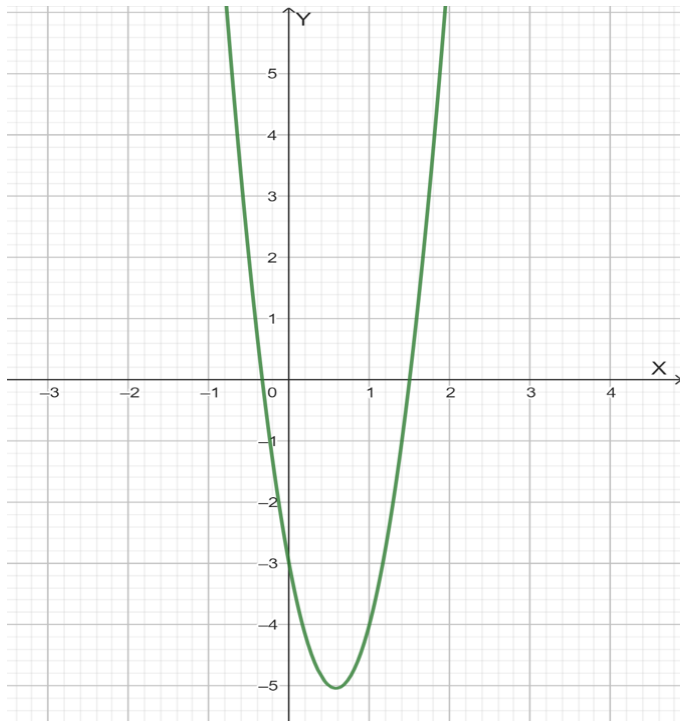
Ejemplo: Dada la función $f(x) = 6x^2 - 7x - 3$. Determinar la gráfica de la función, así como su dominio y rango por intervalos.

Solución:

Sabemos que toda función se puede graficar o representar en el plano cartesiano con el conjunto de pares ordenados (x, y), donde x está en dominio de la función e y es el valor que toma la función evaluada en x**.**

x	y
-4	121
-3	72
-2	35
-1	10
0	-3
1	-4
2	7
3	30
4	65

Al representar estos puntos en el plano, se obtiene el siguiente comportamiento gráfico



Sabemos que el dominio de todas las funciones polinomiales son los números Reales que también se puede expresar como $(-\infty, \infty)$ y se puede apreciar gráficamente que el rango es el conjunto de números en el intervalo semi abierto $[-5, \infty)$.

EJERCICIOS

E 1.11 Completa la siguiente tabla con la información proporcionada

Polinomio	No. De términos	Grado	Término principal	Coeficiente principal	Nombre
$2x^2 + 3x - 4$					
$3x^5 + 6x^3 + 2x - 1$					
$2x + 1$					
$-3x^3 + 6x - 2x^2$					
$6x^2 - x - 1$					
$-2x^4$					
3					
$3x^5 + 3x^4 + 6x - 2$					
$4x$					
$-5x^2 + 6$					
$7x^6 + 2x^6 + x^5 + 4x^4 - 2x$					

E1.12 Dadas las siguientes funciones, simplifica y justifica en cada caso, cuáles de ellas corresponden o no a una función polinomial y , si es el caso, especificar de que grado.

$f(x) = (x+2)(x-2)$
$f(x) = x^3 + x^2 + x + \sqrt{3}$
$f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$
$y = \dfrac{x-1}{x+1}$
$y = 2x + 1$
$f(x) = 5$

$f(x) = 3x(2x+1)$
$f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + 2}$
$f(x) = \dfrac{x(x+2)(x+1)}{x}$
$f(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 + 48$

E 1.13 Realiza la gráfica de las siguientes funciones y determina su dominio y rango por intervalos.

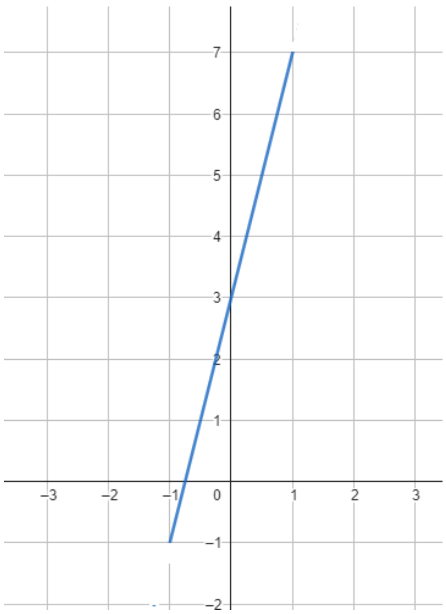
a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = -4x + 2$

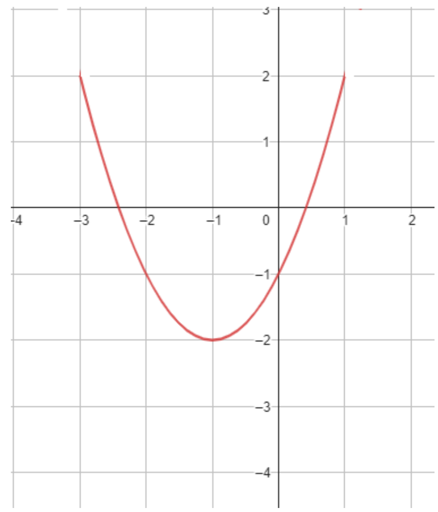
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

d) $f(x) = x^4$

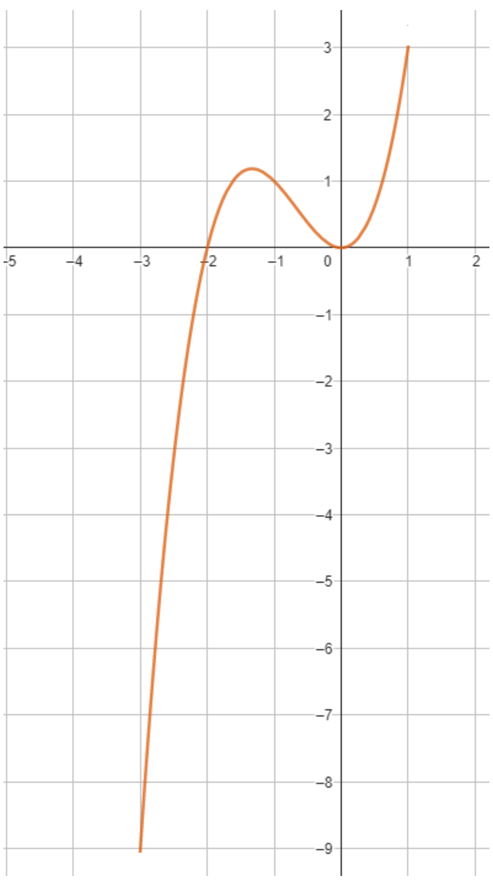
E 1.14 Para cada una de las siguientes gráficas de funciones, expresa su dominio y rango por medio de intervalos (las gráficas están acotadas tal como se presentan en la imagen).



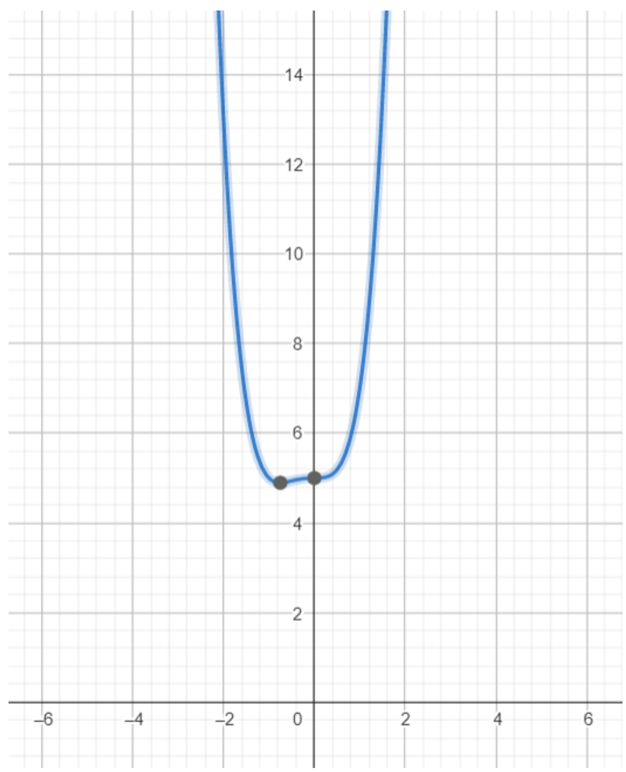
7
6
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2



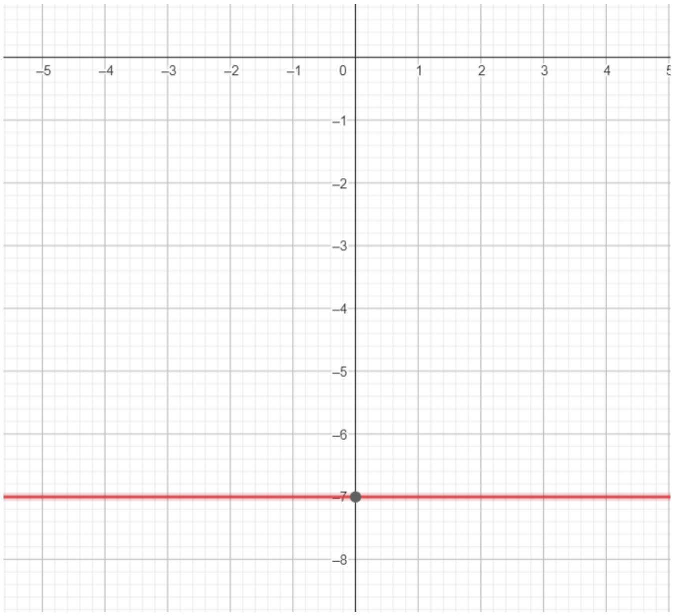
3
2
1
-4
−3
−2
−1
0
1
2
−1
−2
−3
−4



3
2
1
-5
−4
−3
-2
−1
0
1
2
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9



14
12
10
8
6
4
2
−6
−4
−2
0
2
4
6



EJERCICIOS DE REPASO DE LA SECCIÓN

E 1.15 Plantea cuatro funciones polinomiales de diferente grado y realiza:

a) La gráfica de la función

b) Expresa su dominio y rango por intervalos

E 1.16 Determina cuales de las siguientes funciones son polinomiales, para las que lo sean establece el grado y para las que no, especifica por que.

a) $f(x) = 3 - 4x^3$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x^4}$

c) $f(x) = -2x^3(x+1)^2$

d) $f(x) = \frac{x^3+4x^2-5x}{x(x-1)}$

E 1.17 Para el polinomio $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$ realiza:

a) La gráfica de la función

b) Identifica las intercepciones de la gráfica con los ejes X e Y

c) ¿Cuánto vale la función en los puntos de intercepción con el eje X?

d) Determina su dominio y rango

E 1.18 Realiza los inciso del ejercicio anterior para la función $f(x) = x^2(x-4)(x+1)$

Sección 3

Tema: División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y s recíproco. Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación. Raíces de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico. Graficación de funciones

Aprendizaje: Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor y su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.

Algunos polinomios de grado superior a dos se pueden factorizar permitiendo reducir su expresión hasta obtener expresiones más sencillas de resolver. La operación que se utiliza es la división de polinomios.

División sintética

La división sintética es un método que se utiliza para dividir un polinomio por un binomio de la forma $x - a$.

Ejemplo: Dividir $8x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x - 6$ por $x + 1$

1. Establece la división sintética colocando los coeficientes del dividendo y el valor de $a = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 8 & 3 & -2 & 0 & 4 & -6 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

2. Baje el coeficiente principal a la tercera fila.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 8 & 3 & -2 & 0 & 4 & -6 \\ & \downarrow & & & & & \\ \hline & 8 & & & & & \end{array}$$

3. Multiplica -1 por el coeficiente principal 8.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 8 & 3 & -2 & 0 & 4 & -6 \\ & \downarrow \nearrow & -8 & & & & \\ \hline & 8 & & & & & \end{array}$$

4. Suma los elementos de la segunda columna.

-1	8	3	-2	0	4	-6
	↓ ↗	-8				
	8	-5				

5. Luego repite el paso 4 hasta que se llegue al término constante -6.

-1	8	3	-2	0	4	-6
	↓ ↗	-8 ↗	5 ↗	-3 ↗	3 ↗	-7
	8	-5	3	-3	7	-13

6. Escribe el cociente y resto

Cociente: $8x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 3x + 7$

Residuo: -13

Teorema del residuo y del factor

Si un polinomio $f(x)$ es dividido entre $x - a$, entonces:

a) El polinomio se puede expresar como:

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a)$$

donde $q(x)$ es un polinomio con un grado menor que el grado de $f(x)$ y el residuo es igual a $f(a)$.

b) Si $f(x)$ es divisible por el término $x - a$, significa que el valor a **es una raíz o cero** del polinomio y $x - a$ es un factor.

Ejemplo: Si $f(x) = 3x^2 + x - 1$ es dividido por $x + 2$, entonces:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -2 \\ & -6 & 10 & \\ \hline 3 & -5 & 9 & \end{array}$$

$q(x) = 3x - 5$ y el residuo es $f(-2) = 9$. Por lo tanto:

$$3x^2 + x - 1 = (3x - 5)(x + 2) + 9$$

Ejemplo: Si $f(x) = 2x^5 - 9x^4 + 11x^3 - 6x^2 - 6x + 18$ es dividido por $x - 3$, entonces:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc} 3 & 2 & & -9 & & 11 & & -6 & & -6 & & 18 \\ & \downarrow & \nearrow & 6 & \nearrow & -9 & \nearrow & 6 & \nearrow & 0 & \nearrow & -18 \\ \hline & 2 & & -3 & & 2 & & 0 & & -6 & & 0 \end{array}$$

$q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ y como el residuo es cero, entonces $a = 3$ es una raíz del polinomio y $x - 3$ es un factor.

$$2x^5 - 9x^4 + + 11x^3 - 6x^2 - 6x + 18 = (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6)(x - 3)$$

EJERCICIOS

E 1.19 Realiza las siguientes divisiones de polinomios y expresa al polinomio como el cociente por el divisor más el residuo:

a) $x^3 - 3x^2 - x - 2 \div x - 2$
b) $2x^3 - x^2 - 2x - 1 \div x + 1$
c) $3\,x^3 - 8x^2 - 4x - 3 \div x - 3$
d) $2x^3 + x^2 - 2x - 1 \div x + 1$

E 1.20 Comprueba en cada caso que: Dividendo=(cociente)(divisor)+residuo

a) $2x^3 - x^2 - 5x + 7 = (2x^2 + 5x + 10)(x - 3) + 37$
b) $3x^3 + 4x^2 - 5x - 2 = (3x^2 - 2x - 1)(x + 2)$
c) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = (x + 1)(x^2 + 7x + 10)$

E 1.21 Determina en cada caso, sin efectuar la división, si el polinomio es divisible por el monomio:

a) $x^3 - 4x^2 + 7x - 6$ entre $x - 2$
b) $x^2 - x - 6$ entre $x - 3$
c) $x^3 + 4x^2 - x - 10$ entre $x + 2$
d) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 7x + 8$ entre $x + 3$

E 1.22 Determina cuáles de los valores propuestos son raíces de los polinomios:

a) $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 7x + 22;\ x = \frac{11}{2},\ x = -2,\ x = -1$

b) $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 19x - 10$; $x = \frac{5}{3}$, $x = \frac{-1}{2}$, $x = -1$

c) $f(x) = 25x^4 - 100x^3 - 19x^2 + 82x - 24$; $x = 4, x = 1, x = \frac{3}{5}, x = -\frac{2}{5}$

Número de Raíces y gráfica de una función polinomial

Dado el polinomio $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, el número de **raíces** o ceros de la función corresponde al grado n del polinomio y son aquellos valores para los cuales la función vale cero.

(KhanAcademyEspañol, 2014)

Ejemplo: Determinar las raíces y gráfica de la función $f(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$

Como primer paso, buscamos por exploración cuál de los divisores del término independiente es un cero o raíz de la función:

El término independiente del polinomio es 10 y sus divisores son: $\mp 1, \mp 2, \mp 5, \mp 10$

Como $f(-1) = 3(-1)^3 + 8(-1)^2 + 17(-1) + 10 = 0$, entonces $a = -1$ es una raíz y $x + 1$ es un factor por lo que:

$$x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = (x + 1)Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}{x + 1}$$

Al realizar la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 8 & 17 & 10 \\ & & -1 & -7 & -10 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 7x + 10$, y el polinomio se puede expresar como:

$$x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = \ (x + 1)(x^2 + 7x + 10)$$

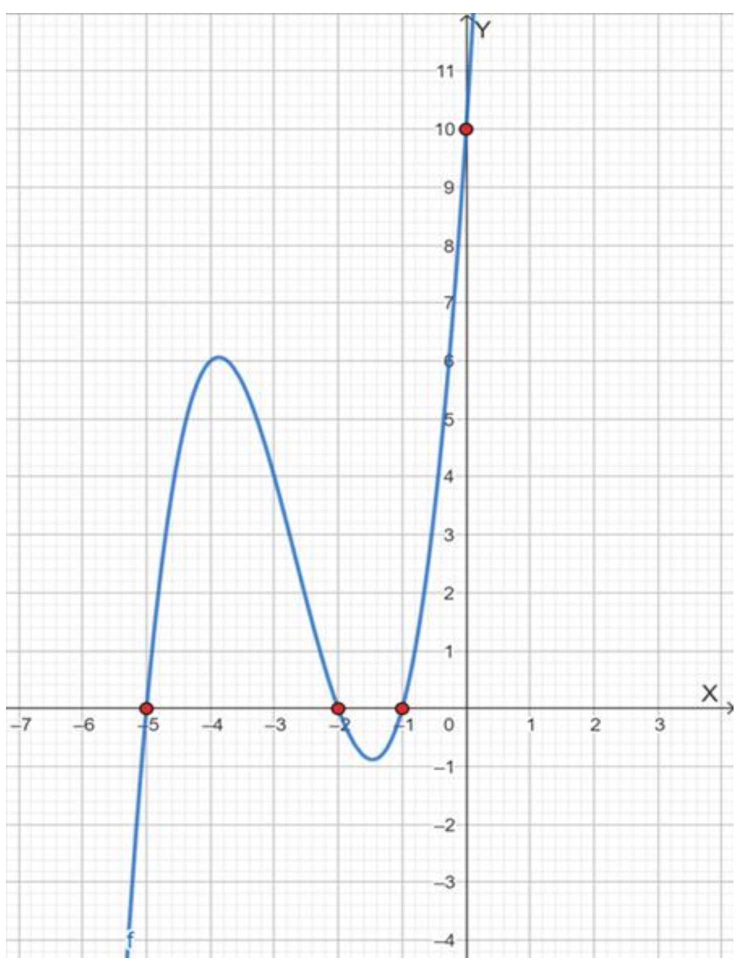
Encontrando las raíces del polinomio $x^2 + 7x + 10$ por factorización, tenemos que:

$$x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = (x + 1)(x + 5)(x + 2)$$

Por lo tanto: $-1, -5\ y - 2$ son raíces del polinomio.

Gráfica de la función

Dado que $-1, -5\ y - 2$ son raíces de la función, entonces $f(-1) = 0, f(-5) = 0\ y\ f(-4) = 0$, por lo que la gráfica de la función interseca al eje de las abscisas en los puntos $(-1,0), (-5,0)\ y\ (-2,0)$, además $f(0) = 10$, por lo que interseca al eje Y en el punto $(0,10)$. Dado que el coeficiente principal es positivo, entonces la gráfica de la función es:



EJERCICIOS DE REPASO DE LA SECCIÓN

E 1.23 Para cada una de las siguientes funciones, determina:

1. Sus raíces
2. La gráfica de la función
3. Su dominio y rango

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
c) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
d) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
e) $f(x) = 3x^3 + 11x^2 + 12x + 4$

Sección 4

Tema: Cálculo de ceros y graficación de funciones.

Aprendizaje: Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica.

Ejemplo: Determinar la gráfica de una función polinomial cuyas raíces sean $-3, 1\ y\ 4$.

Dado que son tres raíces, el polinomio a obtener es de grado tres y se puede expresar como:

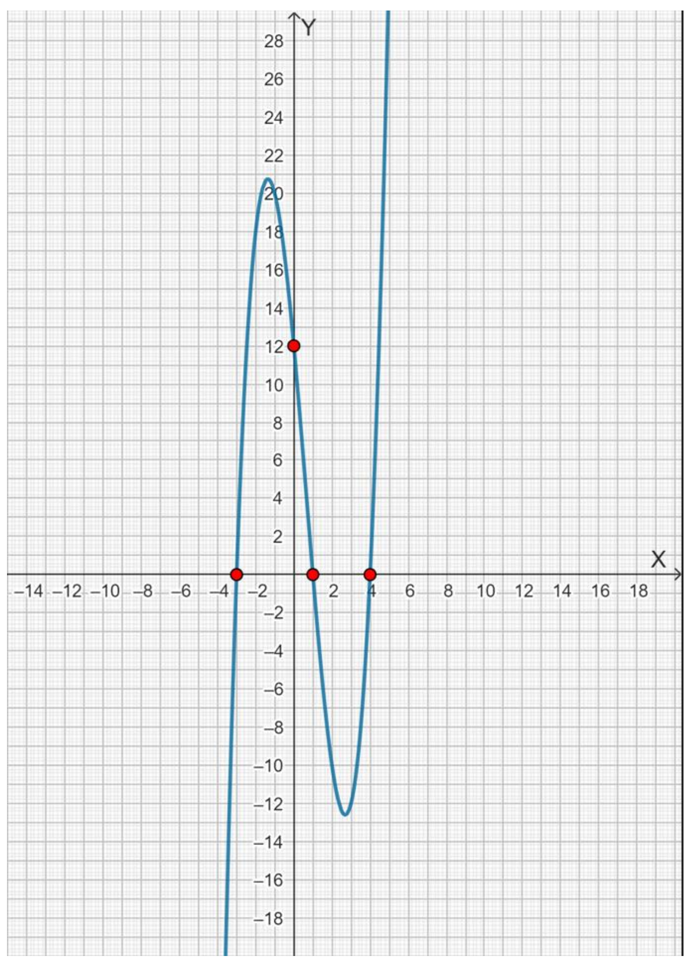
$$f(x) = (x+3)(x-1)(x-4)$$

Se desarrolla el producto de los binomios y finalmente la función polinomial es:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

Gráfica de la función

Dado que $-3, 1\ y\ 4$ son raíces de la función, entonces $f(-3) = 0, f(1) = 0\ y\ f(4) = 0$, por lo que la gráfica de la función interseca al eje de las abscisas en los puntos $(-3{,}0), (1{,}0)\ y\ (4{,}0)$, además $f(0) = 12$, por lo que interseca al eje Y en el punto $(0{,}12)$. Dado que el coeficiente principal es positivo, entonces la gráfica de la función es:



Ejemplo: Determina una función polinomial de cuarto grado con ceros en $2, -3, 1\ y\ f(4) = 6$.

Dado que queremos una función polinomial de cuarto grado y conocemos tres de sus raíces, entonces:

$$f(x) = (x-2)(x+3)(x-1)(x-a_4)$$

Sabemos además que $f(4) = 6$, esto implica que:

$$6 = (4-2)(4+3)(4-1)(4-a_4)$$

$$6 = (2)(7)(3)(4-a_4)$$

$$6 = 42(4-a_4)$$

$$6 = 168 - 42a_4$$

lo que implica que:

$$a_4 = \frac{27}{7}$$

Así que:

$$f(x) = (x-2)(x+3)(x-1)(x-\frac{27}{7})$$

Se desarrolla el producto de los binomios y finalmente la función polinomial es:

$$f(x) = x^4 - \frac{27}{7}x^3 - 7x^2 + 33x - \frac{162}{7}$$

Ejemplo: Determina la gráfica y las raíces de la función $f(x) = x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25$.

Como primer paso, buscamos por exploración cuál de los divisores del término independiente es un cero o raíz de la función:

El término independiente del polinomio es 25 y sus divisores son: $\mp 1, \mp 5, \mp 25$

Como $f(-1) = (-1)^4 + 12(-1)^3 + 46(-1)^2 + 60(-1) + 25 = 0$, entonces $a = -1$ es una raíz y $x+1$ es un factor por lo que:

$$x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25 = (x+1)Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25}{x+1}$$

Al realizar la división:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 12 & 46 & 60 & 25 \\
 & & -1 & -11 & -35 & -25 \\
\hline
 & 1 & 11 & 35 & 25 & 0
\end{array}
$$

$Q(x) = x^3 + 11x^2 + 35x + 25$, y el polinomio se puede expresar como:

$$x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25 = (x+1)(x^3 + 11x^2 + 35x + 25)$$

Para seguir con la factorización, se procede a encontrar las raíces del polinomio $x^3 + 11x^2 + 35x + 25$. De igual manera buscamos por exploración cuál de los divisores del término independiente es una raíz:

Como $Q(-1) = (-1)^3 + 11(-1)^2 + 35(-1) + 25 = 0$, entonces $a = -1$ es una raíz y $(x+1)$ es un factor, por lo tanto:

$$x^3 + 11x^2 + 35x + 25 = (x+1)H(x)$$

$$H(x) = \frac{x^3 + 11x^2 + 35x + 2}{x+1}$$

realizando la división, se tiene que $H(x) = x^2 + 10x + 25$, por lo que:

$$x^3 + 11x^2 + 35x + 25 = (x+1)(x^2 + 10x + 25)$$

encontrando las raíces del polinomio $x^2 + 10x + 25$ por factorización, tenemos que:

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)(x+5)$$

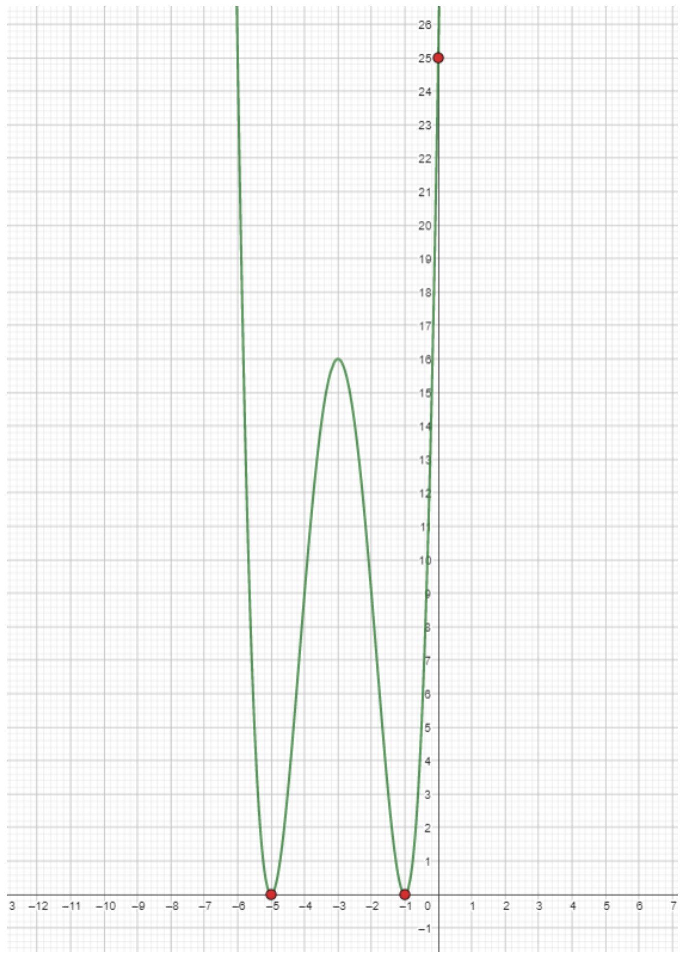
Finalmente se tiene que:

$$x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25 = (x+1)(x+1)(x+5)(x+5)$$

Por lo tanto: $-1, -1, -5\ y -5$ son raíces del polinomio.

Gráfica de la función

Dado que -1 y -5 son raíces de multiplicidad dos, entonces la gráfica de la función intersecará al eje de las abscisas únicamente en dos puntos: $(-1,0),(-5,0)$, además $f(0) = 25$, por lo que interseca al eje Y en el punto $(0,25)$. Dado que el coeficiente principal es positivo, entonces la gráfica de la función es la siguiente:



(Ricardo Jara, 2019)

EJERCICIOS

E 1.24 Hallar una función polinomial que tenga como raíces a $5, 4\ y\ 3$ de multiplicidad 2.

E 1.25 Encuentra una función polinomial que tenga como raíces a $-3, -2, 1\ y\ 5$

E 1.26 Determina las raíces y gráfica del polinomio $f(x) = 4x^3 + 10x^2 - 5x + 3$

E 1.27 Hallar un polinomio que tenga como raíces a: $x = -1, x = 4\ y\ x = 0$

E 1.28 Realiza la gráfica de la función que tenga como raíces a: $4\ y - 5$.

EJERCICIOS DE REPASO DE LA SECCIÓN

E 1.29 Determina las raíces y gráfica del polinomio $f(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48$

E 1.30 Dada la función $f(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$:

a) ¿Cuántas raíces tiene la función?

b) ¿Cuál es el valor de las raíces?

c) Expresa al polinomio en su forma general

E 1.31 Construye la gráfica de una función polinomial de grado tres que tenga como raíces a $3\ y\ -2$ de multiplicidad 2 y que $f(-1) = 6$

Para los problemas del 32 al 34, para cada función polinomial f:

a) Determina los ceros o raíces de la función y la intercepción con el eje Y

b) Un bosquejo de la gráfica

E 1.32 $f(x) = 3(x - 7)(x + 3)^2$

E 1.33 $f(x) = 2(x - 3)(x + 4)^3$

E 1.34 $f(x) = 4x(x^2 - 3)$

Sección 5

Tema: Problemas de aplicación

Aprendizaje: Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

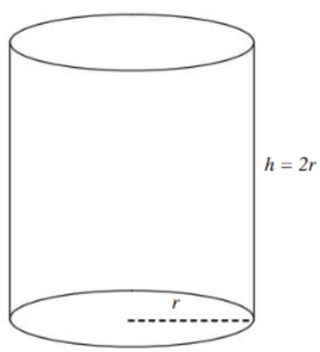
Como se mencionó con anterioridad, las funciones polinomiales tienen muchas aplicaciones en la vida diaria. Ayudan en la modelación de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

Ejemplo:

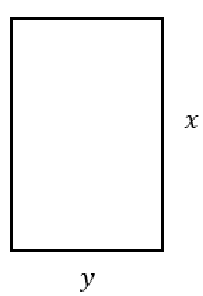
(Oscar Martínez -El Ingeniero y las Matemáticas- 2020)

EJERCICIOS

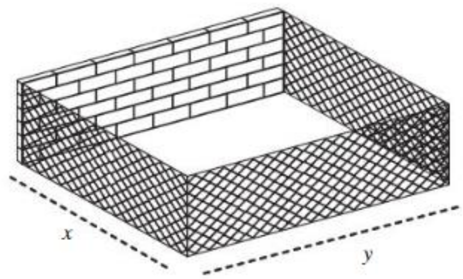
E 1.35 La altura de un recipiente cilíndrico es el doble que el radio de su base. Expresa el volumen del cilindro en función de h.



E 1.36 El perímetro de un rectángulo es de 26 unidades, expresa el área del rectángulo en función de su largo.



E 1.37 Una persona tiene una pared de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1600 metros de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. Expresa el área del corral en términos del ancho de éste.



E 1.38 Un granjero desea cercar un terreno rectangular y dispone de 320 m de alambre. Determina:

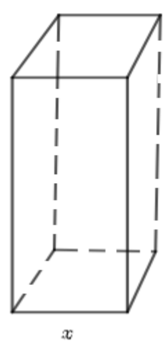
a) El área A del terreno en función de x.

b) Traza la gráfica de A vs x y estima el área máxima de la caja.

c) El valor de x para tener un área máxima.

d) El dominio de A

E 1.39 Una caja de madera tiene una base cuadrada, siendo x la longitud de cada lado del cuadrado. En total las doce aristas de la caja suman 120 cm.



a) Expresa el volumen V en función de x

b) El dominio de V

c) El volumen máximo de la caja

EJERCICIOS DE REPASO DE LA SECCIÓN

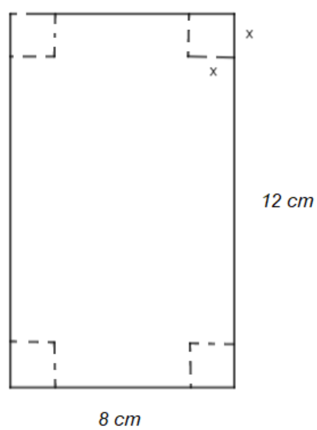
E 1.40 En cierta zona del norte de Chihuahua la temperatura registrada de la una a las seis de la mañana estuvo por debajo de los cero grados, marcando exactamente $0°\mathrm{C}$ a la 1 y 6 a.m. A las 8 de la mañana, la temperatura registrada fue de $4°\mathrm{C}$ y nuevamente a las 17 y 24 horas se registró una temperatura de $0\ °\mathrm{C}$. Encuentra una función que represente la Temperatura en función del tiempo.

E 1.41 Se desea construir una caja con una pieza rectangular de cartón de $12\ por\ 8\ cm$. Para ello se cortarán cuadrados de longitud x en cada esquina y luego se doblarán hacia arriba, como se muestra en la figura.

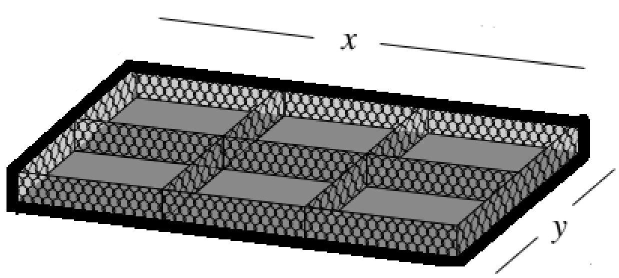
a) Encuentra una función que represente el Volumen en función de la longitud x

b) Cuál es el volumen máximo posible

c) Determina el valor de x para que el volumen de la caja sea exactamente $50\ cm^3$



E 1.42 1000 metros de alambre se van a usar para construir seis corrales del mismo tamaño para resguardar animales, como se muestra en la figura:



a) Expresa el ancho y en función de la longitud x

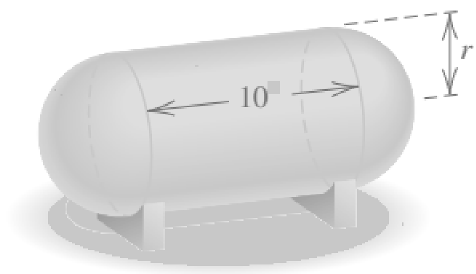
b) Expresa el área A de cada jaula en función de x

c) Encuentra una función que represente el área total en función de y

E 1.43 Se desea construir un tanque de acero para gas en forma de cilindro circular recto de 10 metro de altura, con una semiesfera unida a cada extremo, tal y se muestra en la figura.

a) Expresa el volumen V en función del radio r

b) Expresar el área A superficial del tanque en función del radio



PROPUESTA DE EVALUACIÓN

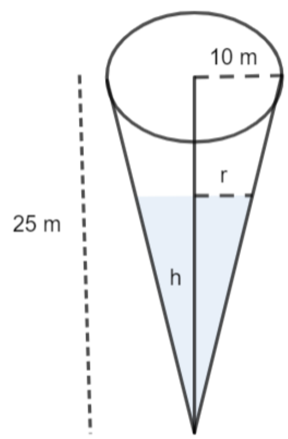
1. Para la función $f(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$, determina:

   a) Las raíces
   b) Su dominio y rango
   c) La gráfica de la función

2. Encuentra una función polinomial de grado cuatro cuyas raíces sean: $x = 3, x = 2$ y $x = -4$ de multiplicidad 2.

3. Indica si $x = 3, x = 4$ y $x = 5$ son raíces del polinomio $f(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$. Justifica tu respuesta.

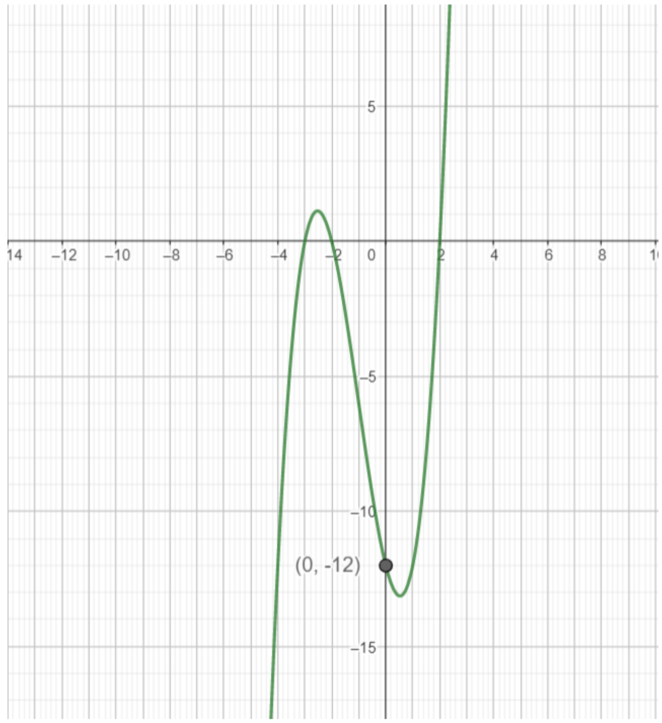
4. Fluye agua por un tanque en forma de cono de 10 metros de radio y 25 metros de altura.



a) Cuando el nivel del agua está a una altura h y radio r, expresa el volumen del agua en función de la altura.
b) Si la altura $h = 10\ metros$, ¿cuál será el volumen de agua en el tanque?
c) ¿Qué altura deberá tener de agua para tener un volumen de agua en el tanque de $1,308\ m^3$?

5. Construye la gráfica de una función polinomial de grado tres que tenga como raíces a 3 y -2 de multiplicidad 2 y que $f(-1) = 6$

6. Determina una función polinomial que corresponda a la siguiente representación gráfica:


(0, -12)

RÚBRICA

Muy bien	Bien	Suficiente	Insuficiente
Reconoce las condiciones necesarias para determinar si una relación es función en cualquiera de sus representaciones y justifica correctamente en términos de la definición	Reconoce las condiciones necesarias para determinar si una relación es función en cualquiera de sus representaciones	Puede identificar relaciones que son funciones en alguna de sus representaciones	No reconoce las condiciones necesarias para determinar si una relación es función
Reconoce una función polinomial de la que no lo es y, evalúa correctamente los valores para obtener una representación gráfica de la función. Utiliza correctamente la notación de intervalos para representar dominio y rango.	Reconoce una función polinomial únicamente si esta representada en su forma general y , evalúa correctamente los valores para obtener una representación gráfica de la función. Utiliza intervalos para denotar dominio y rango o puede identificar que el dominio y rango son los números reales,	Reconoce una función polinomial únicamente si se encuentra representada en su forma general, sabe obtener la gráfica de la función e identifica que el dominio y rango son los números reales.	No comprende el significado de la notación funcional, así como no logra evaluar correctamente las funciones para obtener su representación gráfica.
Utiliza la división sintética , el teorema del residuo y del factor para determinar los ceros o raíces de la función.	Utiliza métodos alternativos para identificar las raíces de la función.	Solo logra identificar las raíces de la función por medio de su representación grafica	No determina correctamente las raíces de una función polinomial
Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y realiza el bosquejo de su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y construye su gráfica.	Realiza adecuadamente la gráfica de la función con una de las dos condiciones y muestra un poco de dificultad con la restante.	Únicamente a partir de la función polinomial determina las raíces y construye su gráfica	No construye una función polinomial dadas sus raíces y no logra obtener los ceros dada la función polinomial.
Modela situaciones a través de funciones polinomiales y a partir de ella busca las soluciones y las interpreta en el contexto del problema.	Modela algunas situaciones por medio de funciones polinomiales y busca las soluciones y las interpreta en el contexto del problema	Modela algunas situaciones a través de funciones polinomiales, sin embargo, muestra dificultad para expresar resultados en el contexto del problema	No modela situaciones con funciones

BIBLIOGRAFÍA PARA LA UNIDAD

Bibliografía para el alumno

Before you continue to YouTube. (s. f.). https://www.youtube.com/@RicardoJara277/search?query=funciones%20polinomiales

Colegio de Ciencias y Humanidades. (s. f.). https://www.rua.unam.mx/portal/plan/index/69806

Expresiones, ecuaciones y funciones polinomiales. (s. f.). https://es.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. (13ª ed.) México: Cengage Learning.

Bibliografía para el profesor

Colegio de Ciencias y Humanidades. (s. f.). https://www.rua.unam.mx/portal/plan/index/69806

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. (13ª ed.) México: Cengage Learning.

Referencias bibliográficas

Oscar Martinez -El Ingeniero y las Matemáticas-. (2020, 25 marzo). *Problemas de Aplicación con Ecuaciones Polinomiales* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=d1BZ2BrTouQ

Matemáticas profe Alex. (2018, 10 abril). *Qué es función | Concepto de función* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Ll7xfe3HoZE

Matemáticas profe Alex. (2018b, abril 10). *Representación de funciones* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=A7OrJ8IlIeE

KhanAcademyEspañol. (2014, 12 mayo). *Teorema fundamental del álgebra* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=o5Lx_1U2d0k

Ricardo Jara. (2019, 17 mayo). *Función Polinómica Hallar la Función Partiendo de su Gráfica* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=BKkd4wAkGxg

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

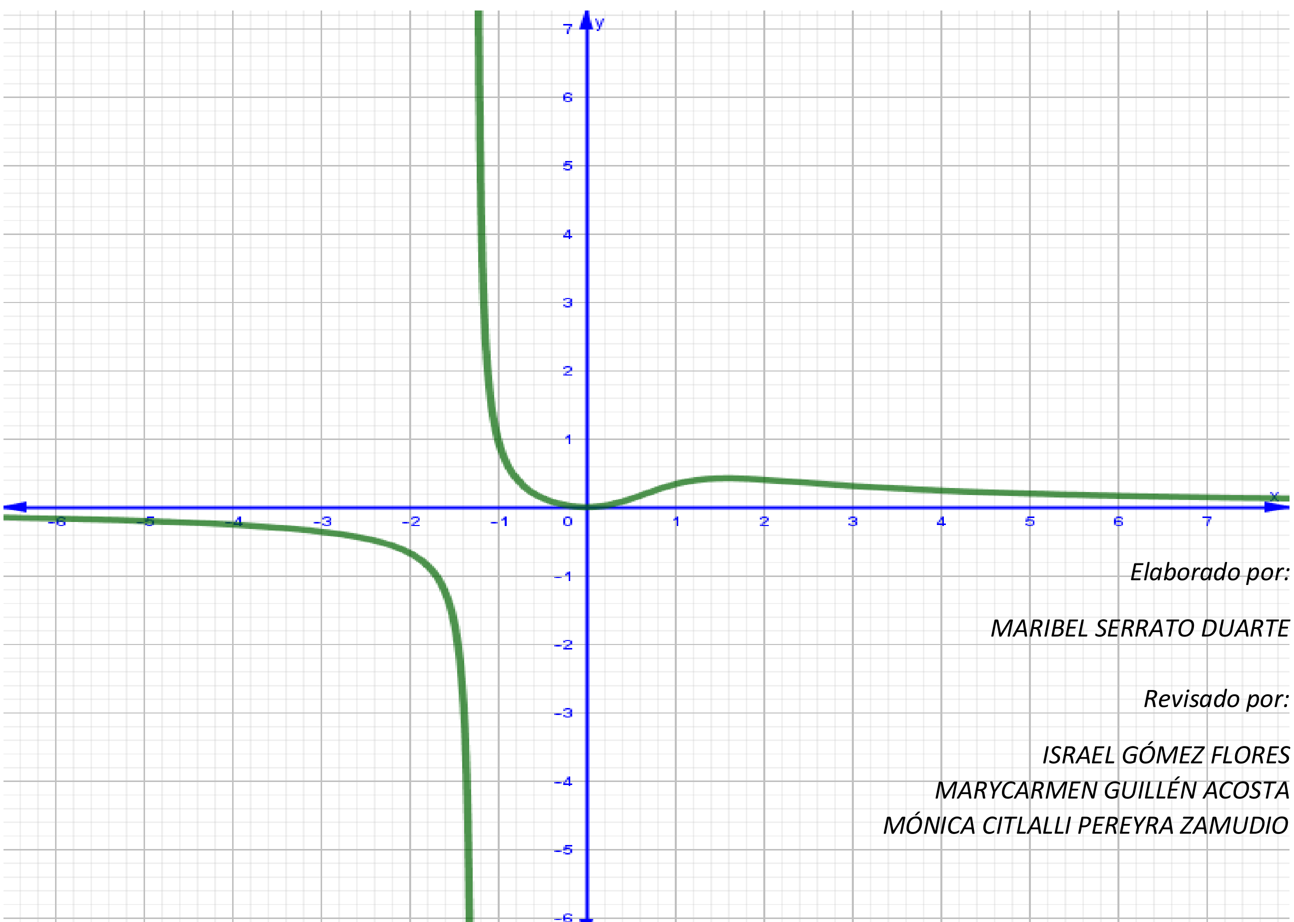
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS IV

UNIDAD II. Funciones racionales y funciones con radicales



Elaborado por:

MARIBEL SERRATO DUARTE

Revisado por:

ISRAEL GÓMEZ FLORES
MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA
MÓNICA CITLALLI PEREYRA ZAMUDIO

MATEMÁTICAS IV UNIDAD II	FUNCIONES RACIONALES Y FUNCIONES CON RADICALES
Propósito: Al finalizar, el alumno: Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada. Tiempo: 15 Horas Elaborado por: Maribel Serrato Duarte	**Aprendizajes** **Para funciones racionales** **Sección 1.** Explora situaciones que se modelan con funciones racionales. **Sección 2.** Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla. **Sección 3.** Realiza gráficas de funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango. **Sección 4.** Resuelve problemas de aplicación. **Para funciones con radicales** **Sección 5.** Explora problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales. **Sección 6.** Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica. **Sección 7.** Resuelve problemas de aplicación.

Sección 1

Aprendizaje: Explora situaciones que se modelan con funciones racionales.

Tema: Funciones de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, q(x)$

Con P(x) y Q(x) son funciones polinomiales de coeficientes reales.

Recordemos que los números racionales, se pueden escribirse como el cociente de dos enteros p y q en donde $q \neq 0$. Donde el conjunto de los números racionales se denota por letra Q, es decir,

$$Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in z, q \neq 0\right\}$$

Teniendo presente los números racionales y que a cada número le podemos determinar su inverso o recíproco.

E 2.1 ¿Cuánto es $\frac{0}{5}$? ¿Cuánto es $\frac{5}{0}$?

En caso de haber dudas te sugiero revises el siguiente video.

(Derivando, 2017)

E 2.2 Un alumno cuenta con su beca de $1000 bimestral, el alumno desea saber ¿Cuántos artículos podrá adquirir? Completar la tabla:

Costo de los artículos ($)	Artículos por adquirir
1000	
500	
250	
200	
100	
50	
25	
10	
1	
0.50	
0.10	
0.01	

¿Qué sucede si el costo del artículo es cada vez más pequeño?

¿Cuál es su función racional?

¿Qué sucede cuando el costo del artículo se aproxima a cero, que sucede con el número de artículos por adquirir?

Definición de función racional.

Una función racional es una función que puede especificarse mediante una regla de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales. El dominio de la función racional es el conjunto de los números reales para los cuales $Q(x) \neq 0$, (Robledo, Aguilar y Martínez; 2014).

E 2.3 A partir de las siguientes funciones, indica ¿Cuál es una función racional?

a) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 5$	______________________
b) $g(x) = \frac{7-x}{x-5}$	______________________
c) $h(x) = 5\sqrt{x-1}$	______________________
d) $i(x) = \frac{7}{x+2}$	______________________

E 2.4 A ciertas comunidades se les apoya a emprender la cría de truchas arcoíris, por ello se tiene la función

$$C(r) = \frac{5900r}{236 + r}$$

donde C representa el número de crías arcoíris que sobreviven y r representa los reproductores que incluyen machos y hembras.

a) ¿Cuántas crías se tendría si el número de reproductores aumenta considerablemente?

b) Encuentre el número de reproductores si aumenta el 80% de un mayor número de crías.

c) Traza su gráfica y realiza su análisis.

E 2.5 Se tiene un terreno de forma rectangular con un área de 80 metros cuadrados. Determina:

a) La función de su perímetro.

b) ¿Qué medidas debe de tener si se desea cercar con la menor cantidad de malla?

c) Traza su gráfica.

d) Indica el dominio y rango para la situación.

E 2.6 Los perritos de pradera de cola negra son muy sociales y viven en colonias organizadas en zonas como Sonora, Chihuahua, Coahuila, Nuevo León, ante la destrucción de su hábitat y fragmentación por actividades agropecuarias y venta ilegal como mascotas, su población se encuentra en peligro de extinción, esta se determina a través de la función:

$$P(t) = \frac{2500}{t+4}$$

donde P representa la población de perritos de pradera y t el tiempo en años.

a) ¿Qué población habrá en 40 años?
b) ¿En qué año habrá tan sólo 120 perritos de pradera?
c) Traza su gráfica y realiza su análisis tanto de la situación como de manera generalizada.
d) Determina su dominio y rango.

En caso de seguir con dudas, se sugiere que revises el siguiente video:

(Martínez, 2020)

EJERCICIOS

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas y justifica tus respuestas.

E 2.7 Un productor de lonas ha determinado que el costo $L\ (x\ )$ de producir x lonas mensualmente se puede calcular con: $L\ (x\ ) = \frac{20000}{x} +\ 200\ x$-

a) Calcula el costo marginal

b) El número de lonas que debe producir para minimizar el costo de producción.

E 2.8 El costo $Z(x)$ por limpiar x por ciento del sargazo que ha llegado a las playas, este va en aumento por los meses de abril y mayo, x se aproxima a 100. Sea

$$Z(x) = \frac{0.3x}{101 - x}$$

a) Compare $Z(100)$ con $Z(90)$.

b) Traza la gráfica $\forall\ x \in (0,100)$

E 2.9 La densidad P de población $(en \frac{habitantes}{mi^2})$ en una gran ciudad está relacionada con la distancia x (en millas) del centro de la ciudad por

$$P(x) = \frac{4000x}{25 + x^2}$$

a) ¿Si la densidad cuando la distancia desde el centro de la ciudad cambia de 25 a 30 millas?

b) ¿En qué áreas de la ciudad su densidad de población excede de 600 habitantes/mi2?

Sección 2.

Aprendizaje: Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.

Tema: Elementos de las funciones: Dominio. Rango. Asíntotas verticales. Puntos de discontinuidad. Ceros de la función.

Retomando que una función racional es de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Esta da información relevante, resulta que si el denominador $Q(x) = 0$, significa que la función tiene una dificultad o problema, resulta que son asíntotas verticales para la función $f(x)$.

Para determinar su dominio será dado, por el conjunto de los números reales, excepto las asíntotas verticales, es decir, para todos aquellos valores donde $Q(x) = 0$.

Definición de asíntota vertical:

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función *f* si $f(x) \to +\infty$ ó $f(x) \to -\infty$ cuando *x* se aproxima a a por la izquierda o por la derecha, es decir, $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$ ó $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

Las funciones racionales, también pueden presentar asíntotas horizontales y/o oblicuas.

Definición de asíntota horizontal:

La recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función *f* si

$f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ ó cuando $x \to -\infty$.

Asíntota oblicua:

Una asíntota oblicua es una recta de la forma $y = mx + b$, es una función lineal, para la gráfica de una función la cual se aproxima a ella, sin lograrla tomar.

¿Cómo saber que una función racional tendrá asíntotas horizontales? Para ello se recurre al siguiente teorema (Swokowski, 2011):

Sean $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^k + b_{n-1}x^{k-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$, donde $a_n \neq o$ y $b_k \neq 0$.

a) Si $n < k$, entonces el eje x (la recta $y = 0$) es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

b) Si $n = k$, entonces la recta $y = \frac{a_n}{b_k}$ (la razón entre los coeficientes principales) es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

c) Si $n > k$, la grafica de f no tiene asíntota horizontal. En cambio, $f(x) \to \infty$ ó $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Nota: en una función racional el numerador indicara las raíces y el denominador las asíntotas verticales.

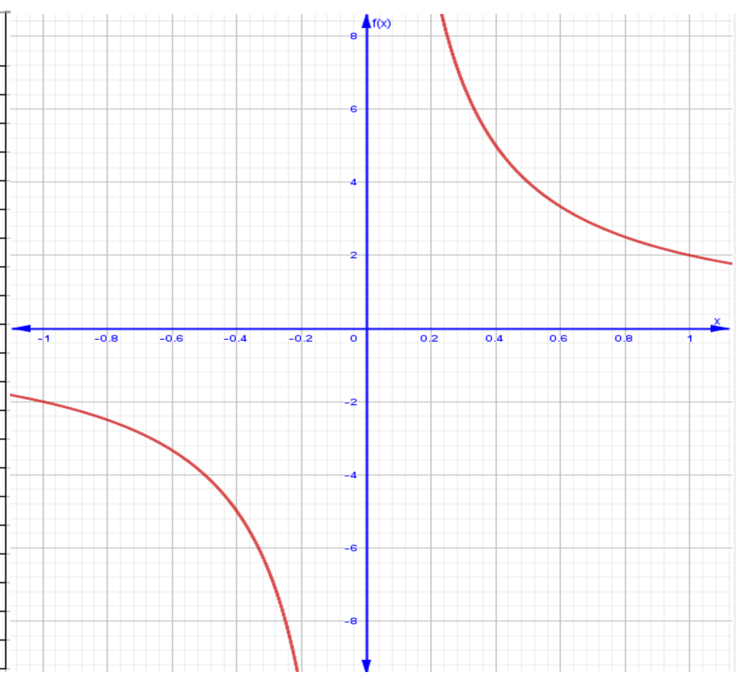
Ejemplos. Determina el dominio, rango, ceros de la función, asíntotas y su grafica para:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

Sol. De acuerdo con el teorema de las asíntotas el grado del denominado es mayor que el numerador, por lo tanto, tiene una asíntota horizontal y esta es $y = 0$.

Ahora el denominador, $x = 0$, es una asíntota vertical, esto significa que la función presenta problemas en este valor, para ello se debe brindar valores a su alrededor de x, por ejemplo:

x	$\frac{2}{x}$
-1	-2
-0.9	-2.22
-0.8	-2.5
-0.7	-2.86
-0.6	-3.33
-0.5	-4
-0.4	-5
-0.3	-6.67
-0.2	-10
-0.1	-20
0	-----
0.1	20
0.2	10
0.3	6.67
0.4	5
0.5	4
0.6	3.33
0.7	2.86
0.8	2.5
0.9	2.22
1	2



Realizando el análisis acorde a la función y su gráfica:

Si $x \to 0^+$, entonces $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 0^-$, entonces $f(x) \to$- ∞

Se tiene que es una asíntota vertical, $x = 0$.

Si $x \to +\infty$, entonces $f(x) \to 0$

Si $x \to -\infty$, entonces $f(x) \to 0$

Se tiene que es una asíntota horizontal, $y = 0$, es decir, el eje "x" es una asíntota horizontal para la función $f(x)$.

Su dominio=$R - \{0\}$ esto quiere decir que es el conjunto de los números reales excepto las asíntotas verticales, Rango=$R - \{0\}$, mientras el rango en el conjunto de los números reales excepto las asíntotas horizontales.

La función no tiene raíces, por el sólo hecho que el eje x es una asíntota.

b) $g(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

Sol. El numerador se iguala a cero, es decir, $x - 2 = 0$, entonces se despeja quedando como $x = 2$, significa que es una raíz para la función.

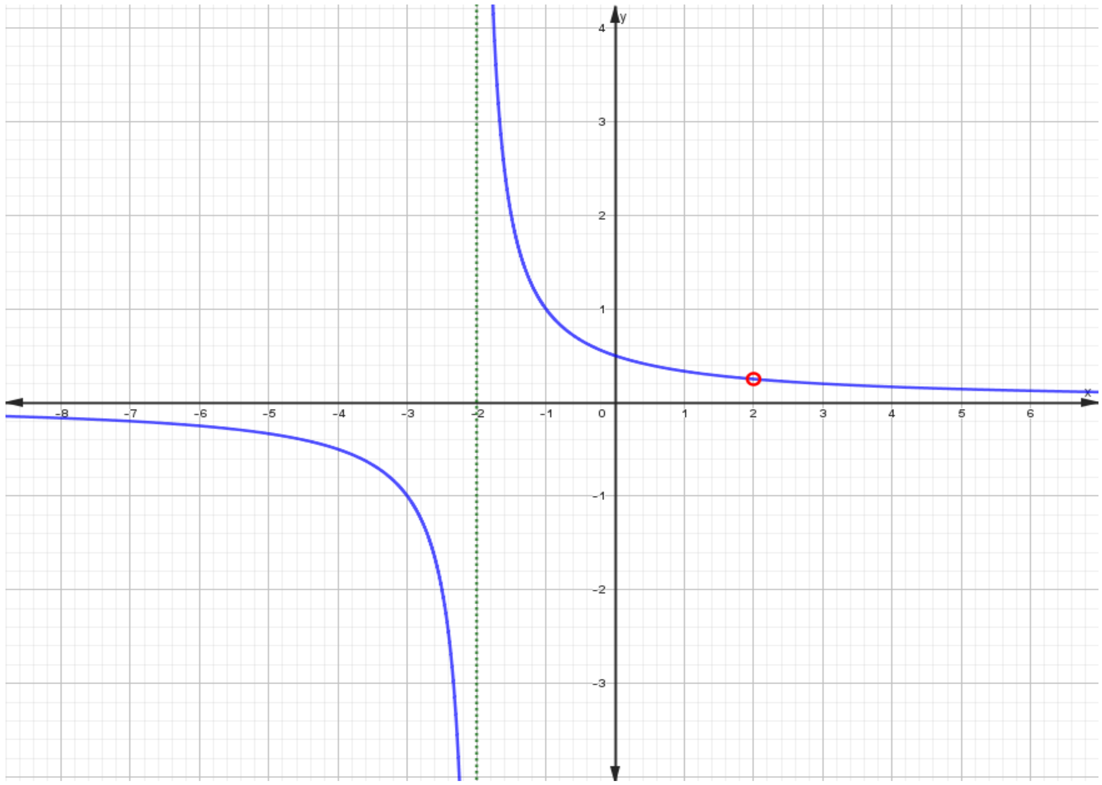
El numerador tiene problemas cuando se iguala a cero, $x^2 - 4 = 0$, despenjando x, $x = \pm 2$, es decir, $x = 2$ y $x = -2$, son las asíntotas verticales de la función.

Sin embargo, $x = 2$ por un lado nos dice que es raíz y a su vez es asíntota, lo cual no es posible, significa que la función tiene un hueco en dicho valor. Se procede a factorizar y simplificar a la función:

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

De esta manera la función tiene un hueco en la coordenada $(2, f(2)) = (2, \frac{1}{4})$.

Se procede a graficar a la función:



E 2.10 Realizando el análisis acorde a la función y su gráfica:

Si $x \rightarrow 0^+$, entonces $g(x) \rightarrow$___________

Si $x \rightarrow 0^-$, entonces $g(x) \rightarrow$___________

Se tiene que es una ______________________________.

Si $x \rightarrow +\infty$, entonces $g(x) \rightarrow$___________

Si $x \rightarrow -\infty$, entonces $g(x) \rightarrow$___________

Se tiene que es una ______________________________.

Su dominio=$R - \{ -2, (2, \frac{1}{4}) \}$

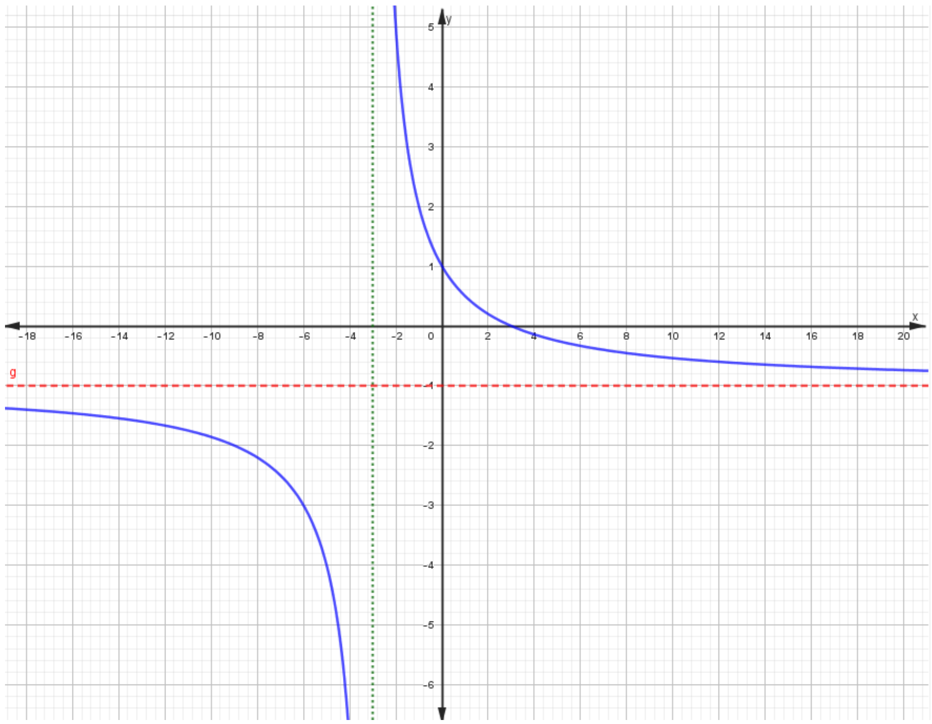
Rango=$R - \{ 0 \}$

c) $h(x) = \frac{3-x}{x+3}$

Sol. El denominador indica que $x + 3 = 0$, es decir, $x = -3$ la función tiene problemas, lo cual implica que es una asíntota vertical.

Mientras que el numerador indica que tiene una raíz en $3 - x = 0$, es decir, $x = 3$.

Su gráfica es la siguiente:



Realizando el análisis acorde a la función y su gráfica:

Si $x \to -3^{+}$, entonces $h(x) \to +\infty$

Si $x \to -3$, entonces $h(x) \to \ -\infty$

Se tiene que es una asíntota vertical, $x = -3$.

Si $x \to +\infty$, entonces $h(x) \to -1$

Si $x \to -\infty$, entonces $h(x) \to -1$

Se tiene que es una asíntota horizontal, $y = -1$.

Su dominio=$R - \{\,-3\}$

Rango=$R - \{\,-1\,\}$

E 2.11 Determina los ceros o raíces de la función, huecos, dominio, rango, asíntotas y su grafica para:

a) $f(x) = \frac{2x+6}{x-3}$

b) $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$

c) $h(x) = \frac{x-5}{x^2-3x-10}$

d) $i(x) = \frac{x-2}{x^2-8x+16}$

Se sugiere que una vez que el alumno resolvió sus ejercicios verifique si lo que realizo es correcto sobre todo en la construcción de la gráfica, por ellos se sugiere que se apoye del software de GeoGebra, en este caso de su calculadora para graficar.

(GeoGebra, 2022)

Por otro lado, si aún tiene dudas, se sugiere consultar los siguientes videos donde se presentan varios ejercicios por nivel, el primer QR presenta ejercicios de primer nivel, siguiente de segundo nivel y por último de tercer nivel:

(Matemóvil, 2017) (Matemóvil, 2017) (Matemóvil, 2017)

EJERCICIOS

E 2.12 Resolver los siguientes ejercicios y determina los ceros o raíces de la función, huecos, dominio, rango, asíntotas y su grafica para:

a) $i(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$
b) $j(x) = \frac{2x-3}{4x^2-1}$
c) $k(x) = \frac{3x-6}{x^2-4}$
d) $l(x) = \frac{2x - 5}{x - 4}$
e) $m(x) = \frac{5}{x^2+1}$

Sección 3.

Aprendizaje: Realiza gráficas de funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.

Tema: Gráfica de funciones racionales con asíntotas verticales y horizontales.

Ejemplo: Hallar los ceros, raíces, asíntotas si es que las hay, dominio, rango y trazar su gráfica para la función:

$$n(x) = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^3 - 25x}$$

Sol. Para encontrar las raíces $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, se procede a factorizar,

$$(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0$$

Ahora se tiene, $x^2 - 9 = 0$ o $x^2 - 4 = 0$, se procede a despejar a cada una de estas ecuaciones

$$x^2 - 9 = 0, x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x^2 - 4 = 0, x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Por lo tanto, $x = -3, x = -2, x = 2\ y\ x = 3$ son las raíces de la función $n(x)$.

Ahora para conocer las asíntotas verticales, $x^3 - 25x = 0$, se factoriza

$$x(x^2 - 25) = 0$$

Ahora se tiene, $x = 0$ o $x^2 - 25 = 0$, despejando a x

$$x = 0$$

O

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

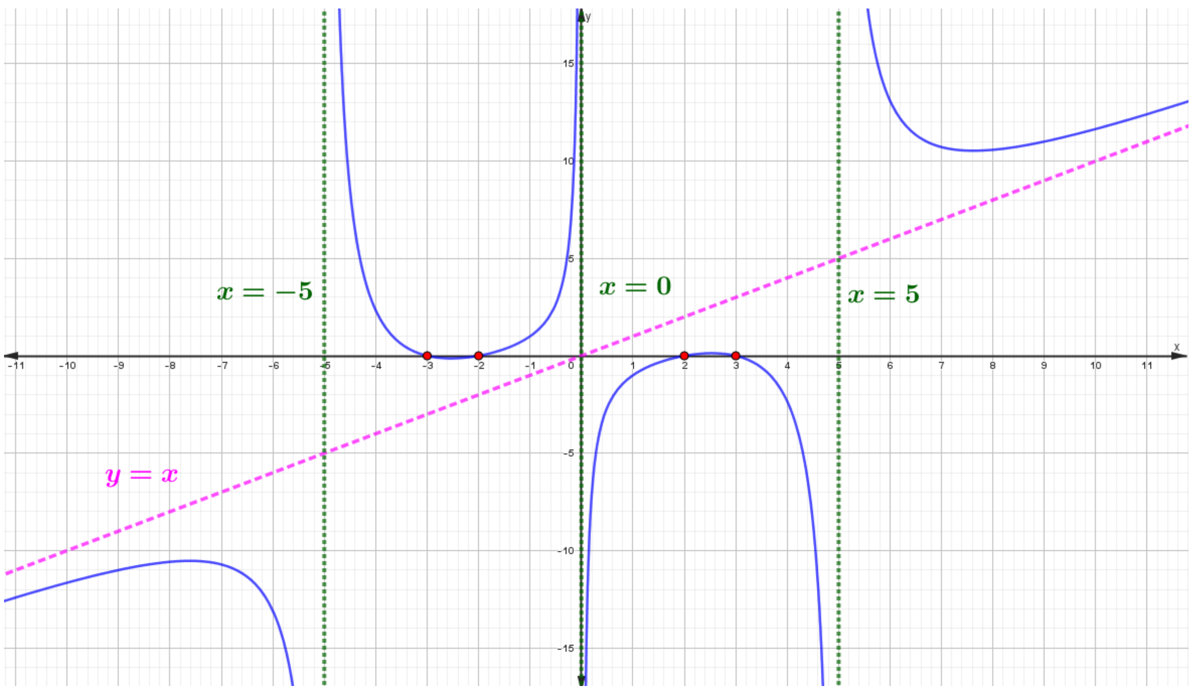
Por lo tanto, $x = -5, x = 0$ y $x = 5$ son asíntotas verticales.

Al tabular se tiene

x	$n(x) = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^3 - 25x}$
-10	-11.64
-9	-11
-8	-10.57
-5	-----------
-4	2.3333
-3	0
-2	0

-1	1
0	-----------
1	-1
2	0
3	0
4	-2.333
5	--------
6	13.09
7	10.714
8	10.576

Ahora se traza su gráfica



Al realizar su análisis

Si $x \to -5^+$, entonces $n(x) \to +\infty$

Si $x \to -5^-$, entonces $n(x) \to -\infty$

Si $x \to 0^+$, entonces $n(x) \to -\infty$

Si $x \to 0^-$, entonces $n(x) \to +\infty$

Si $x \to 5^+$, entonces $n(x) \to +\infty$

Si $x \to 5^-$, entonces $n(x) \to -\infty$

Siendo estas asíntotas verticales.

Si $x \to +\infty$, entonces $n(x) \to +\infty$

Si $x \to -\infty$, entonces $n(x) \to -\infty$

La función presenta una asíntota oblicua, estas son de la forma $y = mx + b$, para conocerla basta hacer la división y el cociente representa la ecuación de la asíntota oblicua.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ \cline{2-2} x^3 - 25x & x^4 - 13x^2 + 36 \\ & -x^4 + 25x^2 \\ \cline{2-2} & \quad 12x^2 + 36 \end{array}$$

Por lo tanto, $y = x$ la asíntota oblicua.

Su dominio=$R - \{ -5,0,5\}$

Rango=R

En caso de haber dudas, se sugiere revisar el siguiente video:

(Juliana la Profe, 2020)

E 2.13 Determina los ceros o raíces de la función, huecos, dominio, rango, asíntotas y su grafica para:

a) $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$

b) $g(x) = \frac{32}{x^2+8}$

c) $h(x) = \frac{2x^2}{x^2+2}$

d) $i(x) = \frac{x-1}{x^2-x+6}$

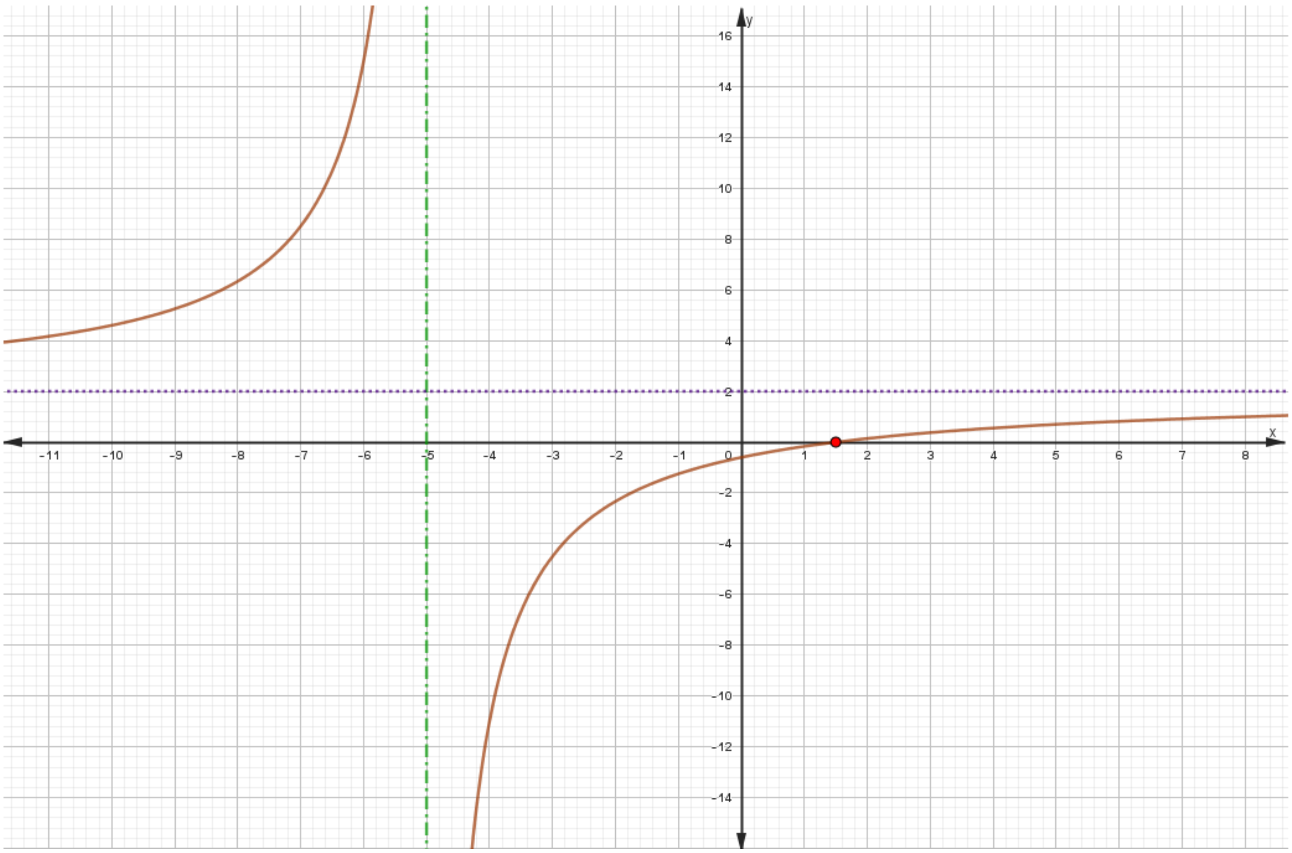
e) $j(x) = \frac{x^3}{2x^3+5x^2}$

f) $k(x) = \frac{x^2+5x-14}{x^3-9x^2}$

g) $l(x) = \frac{x^2-4x-5}{x-2}$

h) $m(x) = \frac{x^2-4}{x+6}$

E 2.14 Usa la siguiente gráfica para completar las siguientes afirmaciones:



Cuando $x \to -5^-, f(x) \to$______________________

Cuando $x \to -5^+, f(x) \to$______________________

Cuando $x \to -\infty, f(x) \to$______________________

Cuando $x \to +\infty, f(x) \to$______________________

Cuando $x \to 0, f(x) \to$______________________

EJERCICIOS

E 2.15 Resolver los siguientes ejercicios y determina los ceros o raíces de la función, huecos, dominio, rango, asíntotas y su grafica para:

a) $k(x) = \frac{x-4}{x+4}$

b) $l(x) = \frac{3x^2-30x+63}{2x^2-6x-56}$

c) $m(x) = \frac{x^2-4}{2x^2+5x-14}$

d) $n(x) = -\frac{3x}{x^2+1}$

Sección 4.

Aprendizaje: Resuelve problemas de aplicación.

Tema: Problemas de aplicación.

E 2.16 Un medicamento es inyectado en un paciente, la concentración del medicamento C (mg/L) en el torrente sanguíneo está dada por la función.

$$C(x) = \frac{30t}{t^2+2}$$

Donde t, se mide en horas.

a) Calcula cuál es la concentración de medicamento 1 hora.

b) Calcula cuál es la concentración de medicamento 4 horas.

c) Elabora una tabla que muestre la concentración de medicamento las primeras 12 horas.

d) Realiza la gráfica de la función para las primeras 12 horas.

E 2.17 Un resistor de 6 ohm y un resistor variable se conectan en paralelo. La resistencia R que resulta (en ohm) se relaciona con la resistencia r (en ohm) del resistor variable, mediante la función:

$$R(r) = \frac{6r}{6-r}$$

a) Traza la gráfica de R en función de r, para $r > 0$.

b) Supongamos que $r = 2$, ¿Cuánto resulta R?

c) ¿Cuál es la resistencia R que resulta cuando r se vuelve muy grande?

E2.18 El número total de pulgadas $L(t)$ de lluvia durante una tormenta de duración t horas se puede aproximar con la función

$$L(t) = \frac{at}{t+b}$$

Se sugiere que se apoye del software GeoGebra y empelar deslizadores para los parámetros a y b, ambos son constantes positivas que dependen del lugar geográfico.

a) Traza la gráfica haciendo variar a y b.

b) Discuta la variación de $L(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

c) La intensidad I de lluvia (en pulgadas/hora) está definida por $I(t) = \frac{L(t)}{t}$. Si $a = 2$ y $b = 8$, trace la gráfica de L e I en el mismo plano de coordenadas para $t > 0$.

E 2.19 Se tiene un libro de texto, donde cada página debe tener 260 cm^2 de material impreso, con márgenes laterales de 1 cm y márgenes superior e inferior de 2 cm.

a) Determina la función del área impresa respecto a la base de la región impresa.

b) ¿Qué tipo de función sea obtenido?

c) ¿Cuál es el valor mínimo que debe tener la base del área impresa?

d) Determina su dominio, rango y sus asíntotas si es que las hay.

e) Traza su gráfica y realiza el análisis de la gráfica.

EJERCICIOS

E 2.20 La presión de un gas encerrado es inversamente proporcional al volumen, expresado como $P = \frac{k}{V}$, donde P es la presión del gas, k es la constante de proporcionalidad y V es el volumen de una esfera. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 18 pulgadas de radio es $40 \frac{lb}{in^2}$, con un radio de 21 pulgadas.

a) Traza su gráfica.
b) Determina el dominio y rango para el problema y de manera general.

E 2.21 A un resorte soporta cierta masa en kg, si se parte de 10 kg y sea x la deformación del resorte en cm, y está dada: $F = kx$, donde F es la fuerza, x la deformación y k la constante de proporcionalidad.

a) Despeja a la constante de proporcionalidad.
b) Traza su gráfica.
c) ¿Presenta asíntota vertical y horizontal la función?

E 2.22 La función $V(t) = \frac{240}{t}$, donde $V(t)$ es la función de un móvil en un t tiempo en segundos.

a) Traza su grafica.

b) Que velocidad llevara al cabo de 30 segundos.

E 2.23 La posición dada de un móvil en metros cambia respecto a su tiempo en movimiento, está dada por $d(t) = t^2 - 7t + 6$.

a) Determina su función de velocidad.

b) ¿Qué velocidad tendrá el móvil al cabo de 14 segundos?

c) Traza su gráfica.

Sección 5.

Aprendizaje: Explora problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales.

Tema: Funciones de la forma:

$$f(x) = \sqrt{ax + b}$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

Con $a, b\ y\ c \in R$.

Elementos de las funciones: Dominio. Rango. Ceros de la función.

Definición de una función con radicales:

Una función con radicales es de la forma

$$f(x) = \sqrt{h(x)}$$

Donde $h(x) \geq 0$ es una función polinomial, en este caso pude ser una función lineal o cuadrática.

E 2.24 Se tiene un triángulo isósceles cuyo perímetro es de 20 cm.

a) Determina el área A del triángulo en términos de la base.

b) ¿Qué tipo de función representa?

c) Determina su dominio y su rango.

d) Determina $A(4)$ e interprete el resultado.

e) Traza la gráfica de la función.

E 2.25 La vida útil de un determinado aparato de ejercicio, está dado por la función

$$P(t) = \sqrt{10000 - 500t}$$

donde t se mide en años y P representa el porcentaje de utilidad que tiene el aparato.

a) ¿Qué porcentaje de utilidad tendrá después de 5 años?

b) ¿Qué porcentaje de utilidad tendrá después de 10 años?

c) Elabora una tabla y realiza la gráfica (en papel milimétrico) que represente la vida útil del equipo

d) Determina su dominio y rango.

e) Traza su grafica.

E 2.26 Se tiene una pantalla de 55 pulgada, la cual representa la diagonal de la pantalla.

a) expresa el ancho y en términos del largo x
b) ¿qué tipo de función representa?
c) Si el largo mide 7 pulgadas, ¿Cuánto mide su ancho?
d) Interpreta su dominio y su rango.
e) Traza su gráfica.

En caso de haber dudas, puedes apoyarte en la siguiente plataforma donde se te presentan varios problemas donde pondrás en práctica tus conocimientos adquiridos:

(Fonseca, 2014)

EJERCICIOS

E 2.27 La cosecha de cereza se da en determinado tiempo, se determina $C(t) = \sqrt{2500 - t^2}$, donde $C(t)$ representa la cosecha en toneladas y t en días.

a) A los cuantos días se logra cosechar la cereza.

b) Traza su gráfica.

c) Si se quiere cosechar 14 toneladas, ¿Cuántos días se requieren?

E 2.28 Dada la función $f(x) = 7 - \sqrt{x^2 - 5x - 14}$.

a) Traza su grafica.

b) Determina sus raíces.

c) Determina su dominio y rango.

E 2.29 Un fabricante de uniformes se ha dado cuenta que el precio P y el número x de uniformes a producir esta relacionados por la expresión: $P(x) = \frac{\sqrt{x}}{100} - \frac{x}{10000}$

a) ¿Qué precio le conviene vender los uniformes para maximizar sus ventas?

b) Traza su grafica.

c) Determina el dominio y rango para el problema.3

E 2.30 Una compañía fabricante de celulares ha encontrado que la $U(x)$es la utilidad de producir x productos está dada por: $U(x) = \frac{800}{\sqrt{x^2+16}} - x$

a) Calcula la utilidad marginal.

b) Traza su grafica.

Sección 6.

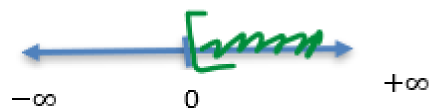
Aprendizaje: Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.

Tema: Gráfica de funciones con radicales.

Ejemplos. Determinar los ceros de la función, las asíntotas, dominio, rango y su gráfica:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

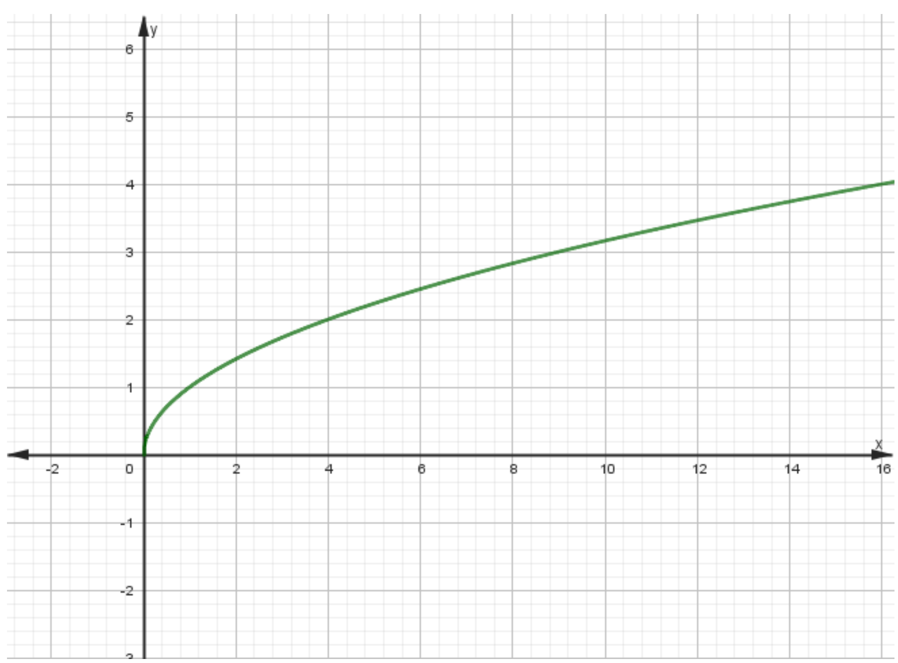
Sol. $x \geq 0$, significa



Dominio= $[0, +\infty) = R^{+}$ u otra forma de indicar el Dominio=$\{\forall x \in R | x \geq 0\}$

Se procede a tabular y a obtener su gráfica:

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
7	2.645
3	1.7320
14	3.7416



Si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

La función tiene una raíz, $\sqrt{x} = 0$, se despeja a x, tal que $x = 0$.

Su Rango= R^{+}.

No presenta asíntotas.

b) $g(x) = \sqrt{5x + 4}$

Sol. $5x + 4 \geq 0$

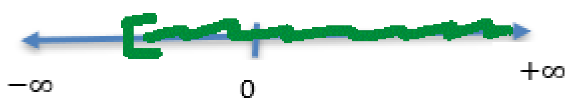
Se procede a despejar x

$$5x + 4 - 4 \geq 0 - 4$$

$$5x \geq -4$$

$$\frac{5x}{5} \geq -\frac{4}{5}$$

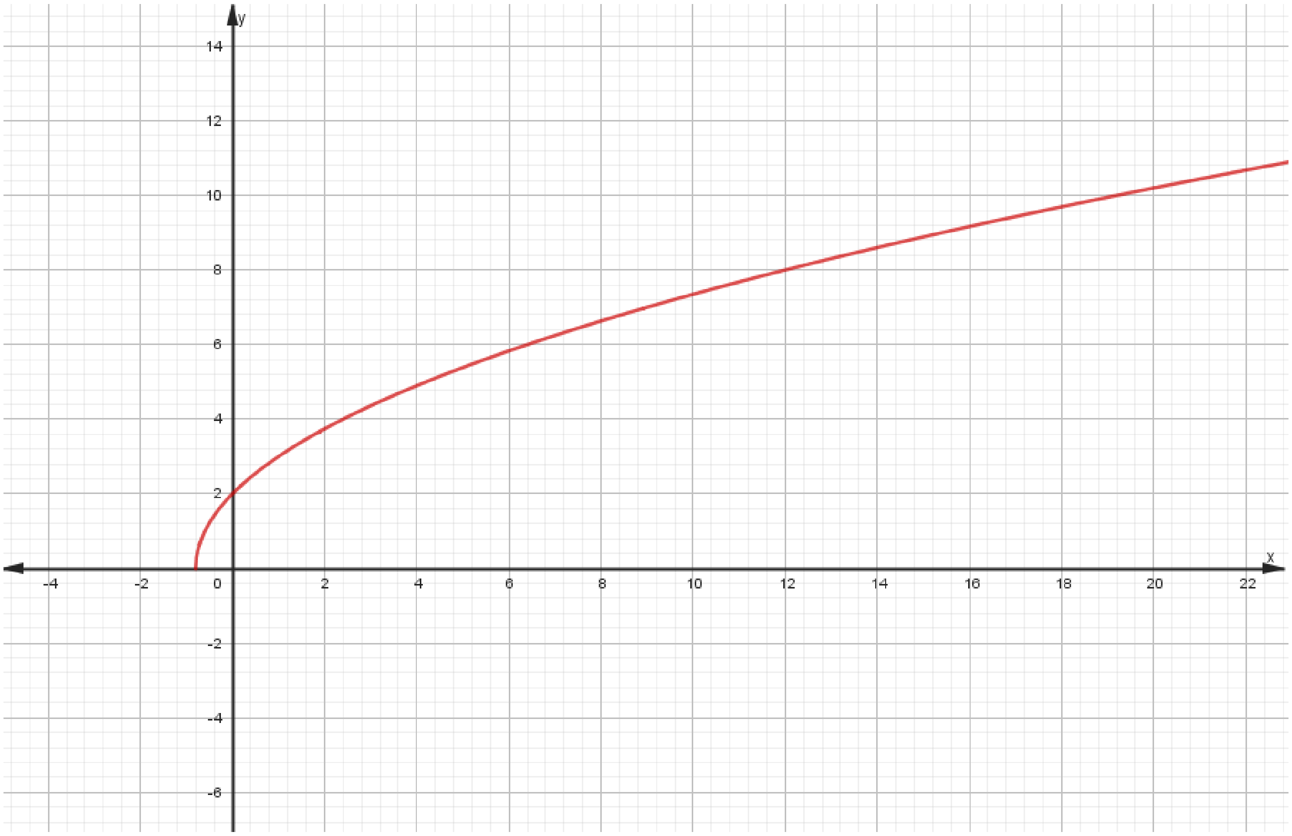
$$x \geq -\frac{4}{5}$$



Su Dominio= $[-\frac{4}{5}, +\infty)$

Se tabula para trazar su grafica

x	$g(x) = \sqrt{5x + 4}$
$-\frac{4}{5}$	0
-0.5	$\frac{\sqrt{6}}{2} = 1.2247$
1	3
3.2	4.4721
17	9.4339
20	10.1980



Si $x \to +\infty \Rightarrow g(x) \to +\infty$

La función tiene una raíz, $\sqrt{5x+4} = 0$, se despeja a x, tal que $x = -\frac{4}{5}$.

Su Rango$= R^{+}$.

No presenta asíntotas.

c) $h(x) = -3 + \sqrt{25 - x^2}$

Sol. $25 - x^2 \geq 0$

Se procede a factorizar,

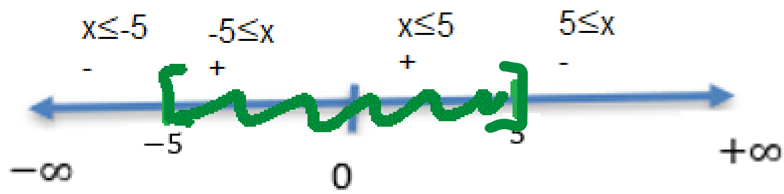
$$(5 - x)(5 + x) \geq 0$$

Se tiene las siguiente condiciones si

$$5 - x \geq 0 \; y \; 5 + x \geq 0 \text{ o } 5 - x \leq 0 \; y \; 5 + x \leq 0$$

Se brindan valores en cada intervalo y se verifica que valores son verdaderos para la desigualdad inicial:

$(-\infty, -5]$	$[-5,5]$	$[5, +\infty)$
Si $x = -7$, se tienen un $25 - (-7)^2 = -24$ no se cumple	Si $x = -3$, se tienen un $25 - (-3)^2 = +16$ se cumple	Si $x = 12$, se tienen un $25 - (12)^2 = -119$ no se cumple



Dominio$= [-5, 5]$

Para conocer a las raíces, $h(x) = 0$

$$-3 + \sqrt{25 - x^2} = 0$$

Se procede a despejar x

$$\sqrt{25 - x^2} = 3$$

$$\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 = (3)^2$$

$$25 - x^2 = 9$$

$$-x^2 = 9 - 25$$

$$(-x^2 = -16)(-1)$$

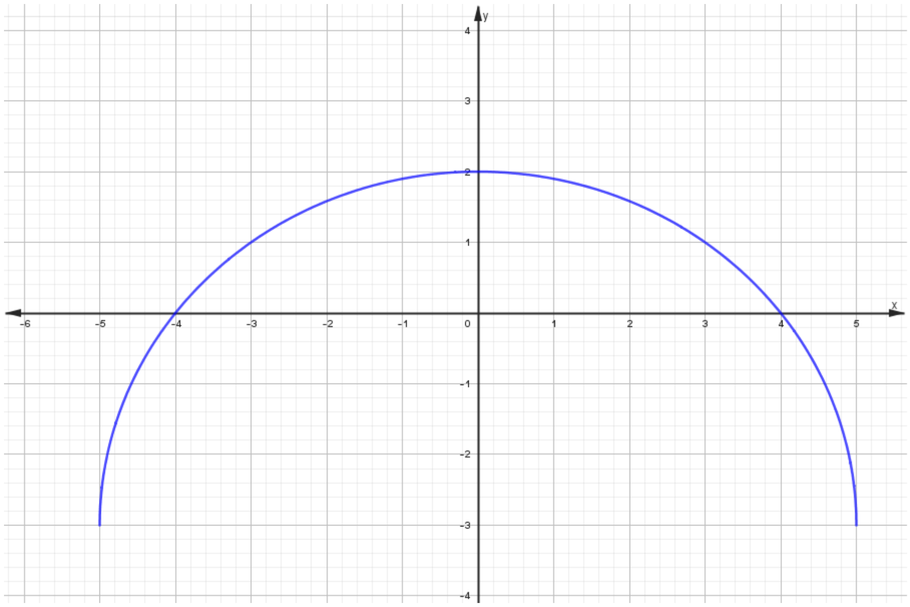
$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

Sus raíces son $x = -4$ y $x = 4$. Se tabula

x	$f(x) = -3 + \sqrt{25 - x^2}$
-5	-3
-4	0
-3	1
-2	1.5825
-1	1.8989
0	2
1	1.8989
2	1.5825
3	1
4	0
5	-3

Su grafica es la siguiente:



Rango= $[-3,2]$.

No presenta asíntotas.

E 2.31 Hallar los ceros de la función, raíces, asíntotas si es que las hay, dominio, rango y trazar su gráfica:

a) $f(x) = \sqrt{5x - 4}$

b) $g(x) = 4 + \sqrt{x^2 - 4x - 12}$

c) $h(x) = \sqrt{7 - x}$

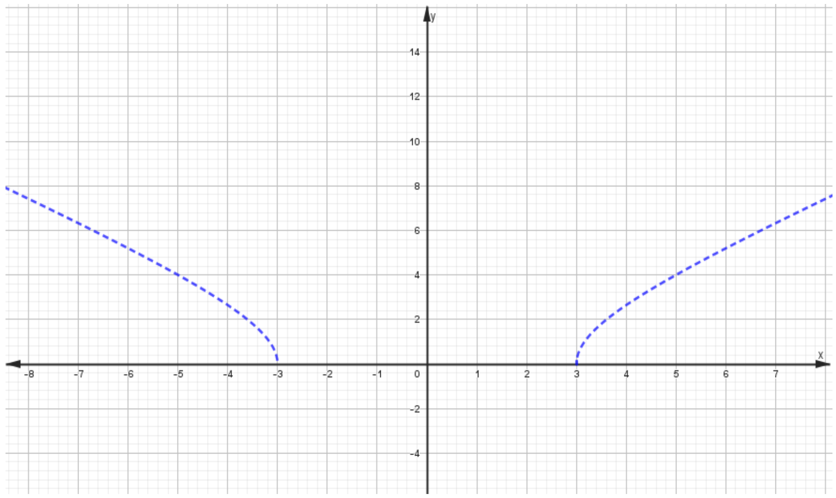
E 2.32 Determina las raíces, dominio, rango y traza la gráfica para:

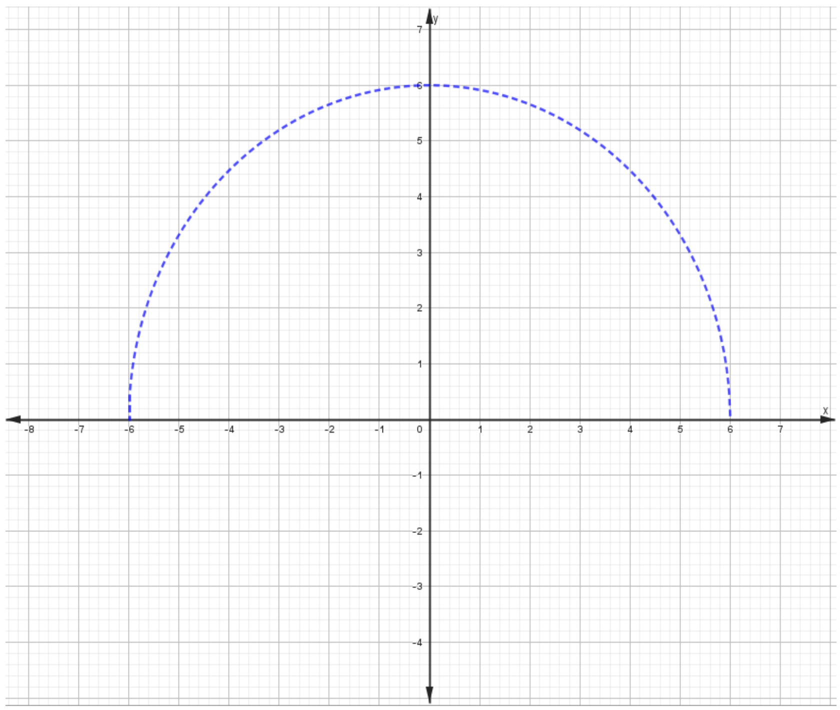
a) $f(x) = 2 - \sqrt{81 - x^2}$

b) $g(x) = -6 + \sqrt{x^2 + 8x + 12}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

E 2.33 A partir de la siguiente grafica determina la función, su dominio y su rango.

a) 

b) 

EJERCICIOS

E 2.34 Determinar las raíces, dominio, rango y trazar la gráfica para:

a) $i(x) = x + \sqrt{x+2}$

b) $j(x) = -4 + \sqrt{x^2 + 16}$

a) $k(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

b) $(x) = \frac{5}{\sqrt{x-4}}$

Sección 7.

Aprendizaje: Resuelve problemas de aplicación

Tema: Problemas de aplicación

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas y justifica tu respuesta.

E 2.35 Se tiene un terreno cuadrado cuya área es desconocida. Determina:

a) una función para encontrar el perímetro del cuadrado en términos su área.

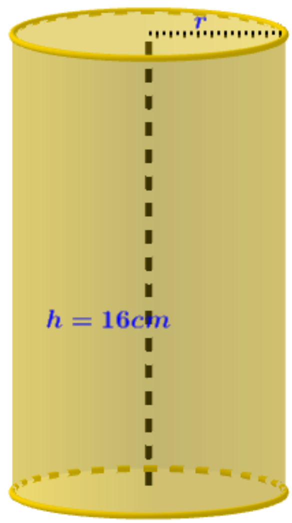
b) Sus raíces de la función.

c) Si se tiene un área de 50 metros cuadrados, ¿cuál es su perímetro?

d) El dominio y rango para los cuales se cumple el problema.

e) Traza la gráfica.

E 2.36 Se tiene una lata cilíndrica cuya altura es h = 16 cm, como se muestra en la figura.



Determinar:

a) Su función del radio que dependa del volumen de la lata.

b) El dominio y rango para la función.

c) Las raíces de la función si es que tiene.

d) Traza su grafica.

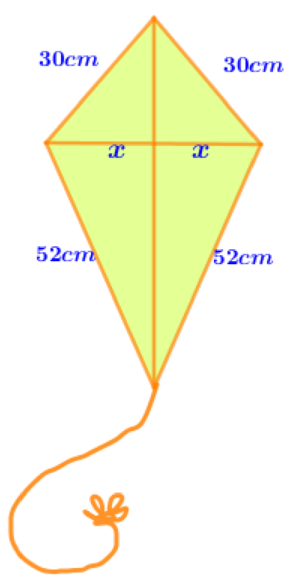
E 2.37 Se desea instalar un telón para hacer una obra de teatro siendo este de forma rectangular, si se sabe que la altura del escenario es de 4 metros menos que el doble de su ancho y su área es variable. Determina:

a) La función del ancho del telón en términos del área.

b) Su dominio y rango.

c) Traza su grafica.

E 2.38 Se va a construir una cometa a partir de 6 trozos de madera. Los cuatro trozos externos que forman el contorno se han cortado de 30 cm y 52 cm, como se muestra en la figura.



a) Expresa el área A delimitada por la armazón de la cometa en términos de x, siendo x mitad de la diagonal menor.

b) Determina su dominio y su rango.

c) Calcula $A(4)$ y $A(12)$.

d) Traza la gráfica.

Ejercicios adicionales de la sesión 7.

E 2.39 Un celular de alta gama mide 8 pulgadas la diagonal de su pantalla.

a) Expresa su ancho respecto al largo.

b) Traza su grafica.

c) Determina el dominio y rango del problema.

E 2.40 Un inversionista tiene su modelo que le indica en que tiempo (días) no le conviene invertir, pues en ese día tendrá las ganancias mínimas, se determina $I(t) = \frac{1000}{\sqrt{x^2+25}} + 4x$, con $I(t)$ representa la inversión en euros y t en días.

d) ¿Qué día se tendrá la inversión mínima?.

e) Traza su gráfica.

f) Determina a partir de que día se tendrá mayores ganancias a sus inversiones.

E 2.41 Un fabricante principiante de mochilas se ha dado cuenta que el precio $M(x)$ y el número x mochilas que produce, está dado por $M(x) = \sqrt{x-10} - \frac{x^2}{1000000}$

d) ¿Cuántas mochilas debe producir para maximizar sus ventas?

e) Traza su grafica.

f) Determina el dominio y rango para el problema.

EJERCICIOS

E 2.42 Determinar las raíces, dominio, rango, asíntotas y trazar su gráfica para:

a) $i(x) = \frac{x-2}{x^2-8x+16}$

b) $j(x) = \frac{5}{x^2+1}$

c) $k(x) = \frac{x-4}{x+4}$

d) $l(x) = \sqrt{81 - x^2} - 6$

e) $m(x) = -\sqrt{\frac{5}{2}x - 15}$

f) $n(x) = -2 + \sqrt{7x - 21}$

g) $p(x) = -3 + \sqrt{25 - x^2}$

h) $q(x) = 5 + \sqrt{x^2 - 4x - 12}$

E 2.43 Se quiere construir un corral que tenga un área de 16 metros cuadrados.

a) Determina su función de perímetro

b) Traza su grafica

c) ¿Cuáles deben ser las dimensiones del corral, si queremos emplear la menor cantidad de material posible?

d) Indica su dominio y rango.

e) Determina sus asíntotas.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

Instrucciones: Resolver los siguientes ejercicios y anexar el procedimiento que te conlleva a la solución, sin este carece de valor.

1. Determinar las raíces, dominio, rango, asíntotas y trazar su gráfica para:

   a) $i(x) = \frac{x^2 - 9x + 20}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12}$

   b) $j(x) = \sqrt{25 - x^2} - 3$

   c) $k(x) = 1 + x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

2. Determinar las dimensiones de una lata cilíndrica cuyo volumen es de 64 cm^3 . Si queremos usar la menor cantidad de material en su construcción. Si tiene un radio r y una altura h. Determina:

   a) La función del área en términos del radio.

   b) Traza la gráfica de la función.

   c) El dominio y rango de la función.

   d) Las raíces o ceros de la función.

   e) Las asíntotas si es que las tiene la función.

RÚBRICA

UNIDAD 4: OBJETIVO: PORCENTAJE:	Funciones trigonométricas Se busca evaluar los aprendizajes en el alumno acorde a la unidad. 100%			
Criterios	Excelente 10 puntos.	Bueno 8 puntos.	Regular 5 puntos.	Total
Funciones racionales				
Explora situaciones que se modelan con funciones racionales.	Modela algebraicamente situaciones que describen funciones racionales de acuerdo con las condiciones dadas, transitando en los diferentes registros de representación (verbal, tabular o gráfico).	Reconoce situaciones que describen funciones racionales, sin embargo, no logra obtener su modelo algebraico acorde a las condiciones dadas.	No reconoce situaciones que describen funciones racionales.	
Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.	Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y horizontales, así como huecos, dominio, rango para graficarla.	Identifica algunos elementos para la gráfica.	Identifica solo unos cuantos elementos y presenta dificultades para trazar la gráfica.	
Realiza gráficas de funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.	Realiza la gráfica con sus respectivas asíntotas, huecos, ceros, considerando su dominio y rango.	Realiza la gráfica y solo considera algunos elementos.	Tiene dificultades para trazar la gráfica acorde a sus elementos.	
Resuelve problemas de aplicación.	Resuelve problemas, interpreta la información y dando respuesta a lo que solicita el problema	Realiza el planteamiento del problema acorde a las condiciones, pero no logra resolverlo.	No resuelve los problemas planteados.	

Funciones con radicales				
Explora problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales.	Modela situaciones que describen funciones con radicales de acuerdo con las condiciones dadas, transitando en los diferentes registros de representación (verbal, tabular o gráfico).	Reconoce situaciones que describen funciones con radicales, sin embargo, no logra obtener su modelo acorde a las condiciones dadas.	No reconoce situaciones que describen funciones con radicales.	
Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.	Identifica los elementos de una función con radicales: ceros, dominio, rango y traza la gráfica.	Identifica algunos elementos y trazar la gráfica.	Identifica solo unos cuantos elementos y presenta dificultades para graficar.	
Resuelve problemas de aplicación.	Resuelve problemas a través de las condiciones del problema e interpreta la información y dando respuesta a lo que solicita el problema	Realiza el planteamiento del problema acorde a las condiciones, pero no logra resolverlo.	No resuelve los problemas planteados.	

BIBLIOGRAFÍA

Para el alumno:

Allen, R. (2013). Álgebra intermedia. Pearson.

Demana, F., Waits, B., Foley, G. y Kennedy, D. (2007*). Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. Pearson Educación.

Kaufmann, Jerome E. y Schwitters, Karen L. (2013). *Álgebra*. Cengage Learning.

Manson, J., Burton, L. y Stayce K. (2013). *Cómo razonar matemáticamente*. Trillas

Robledo-Rella, V., Aguilar, G. y Martínez, A. (2014). *Introducción a las matemáticas. ejercicios y problemas*. Patria

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning.

Para el profesor:

Demana, F., Waits, B., Foley, G. y Kennedy, D. (2007*). Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. Pearson Educación.

ENCCH. (2016). Programas de estudio Área de Matemáticas, Matemáticas I a IV. Consultado el 4 de octubre de 2021 de https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf

Oteyza, de O. E, Et Al. (2015). *Geometría analítica y trigonometría* (3ª ed.). Pearson HispanoAmérica Contenido. https://bookshelf-ref.vitalsource.com/books/9786073233866

Johnson, L., Steffensen, Arnold R. (2009). Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones. Trillas.

Kaufmann, Jerome E. y Schwitters, Karen L. (2013). *Álgebra*. Cengage Learning.

Polya, G. (1976). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas.

Robledo-Rella, V., Aguilar, G. y Martínez, A. (2014). *Introducción a las matemáticas. ejercicios y problemas*. Patria

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning.

Swokowski, E. y Cole, J. (2018). *Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning.

Mesografía

Fonseca, Ramos Octavio. (2014). Funciones con radicales: Modelación de problemas con funciones algebraicas. http://prometeo.matem.unam.mx/recursos/Bachillerato/DGEE_DGTIC/?tema=13&subtema=4&pagina=4

Juliana la Profe. (23 de septiembre 2020). FUNCIÓN "RACIONAL" Dominio, Rango, Hueco (Discontinuidad) y Gráfica. YouTube. https://youtu.be/Ub-JJfKB8oY

Martínez, M. M. (2020). Ejercicios de aplicación de funciones racionales. YouTube. https://youtu.be/kIDzQmV1-Tc

Matemóvil. (12 de diciembre 2017). Función Racional - Ejercicios Nivel 1 – Introducción. YouTube. https://youtu.be/KnQDIl6zSHY

Matemóvil. (29 de noviembre 2017). Función Racional - Ejercicios Nivel 2 – Introducción. YouTube. https://youtu.be/NrLG3AQ7ydk

Matemóvil. (29 de noviembre 2017). Función Racional - Ejercicios Nivel 3 – Introducción. YouTube. https://youtu.be/JkcxHrF5zyg

Sáenz, de Cabezón Eduardo. Derivando. (2017). ¿Por qué un número divido entre cero “da” infinito? YouTube. https://youtu.be/5mjX7g9EbGY

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

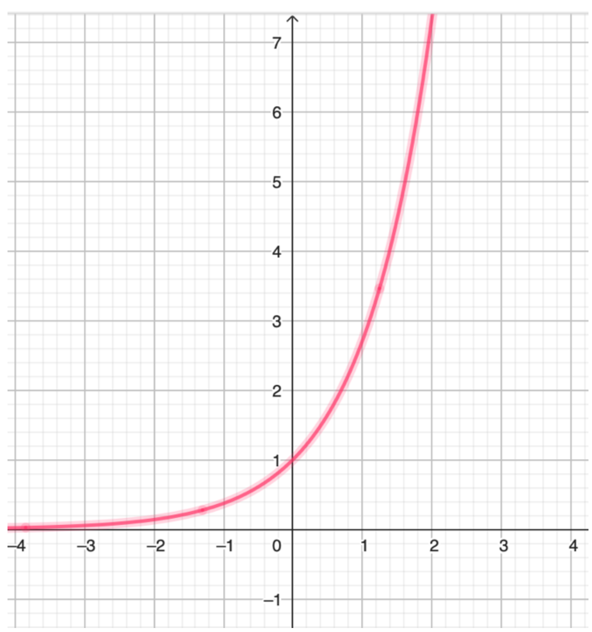
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS IV

UNIDAD III: Funciones exponenciales y logarítmicas



Elaborado por:

MÓNICA CITLALLI PEREYRA ZAMUDIO

Revisado por:

MARIBEL SERRATO DUARTE

MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA

ISRAEL GÓMEZ FLORES

2023- 2024

MATEMÁTICAS IV UNIDAD III	FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS
Propósito: Al finalizar, el alumno: Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar. Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica. Tiempo: 20 Horas Elaborado por: Mónica Citlalli Pereyra Zamudio	**Aprendizajes** **Sección 1:** Explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación. **Sección 2:** Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica. **Sección 3:** Identifica el dominio y rango de una función exponencial y traza su gráfica. **Sección 4:** Analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número *e.* **Sección 5:** Resuelven problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales. **Sección 6:** Comprende el concepto de logaritmo de un número base b y las relaciones: $b^y=x \leftrightarrow y=log_b\, x$ **Sección 7:** Opera con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades. **Sección 8:** Grafica funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango. **Sección 9:** Verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial. **Sección 10:** Resuelve problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales. **Sección 11:** Resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.

Sección 1

Aprendizaje: Explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.
Tema: Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial.

Las funciones exponenciales se utilizan en la descripción de fenómenos relacionados con el crecimiento y decrecimiento, por esta razón, las aplicaciones de este tipo de funciones abarcan una amplia variedad de disciplinas científicas, entre las que destacan Física, en la que son útiles para explicar fenómenos como desintegración radiactiva. En Química, para determinar el porcentaje de carbono 14 en fósiles. En Biología, se utilizan para encontrar y/o predecir el tamaño de poblaciones. En Medicina, este tipo de funciones permiten conocer cómo ocurre el proceso de acumulación de medicamentos en la sangre, o cual es la concentración de alcohol en conductores de vehículos etc.

En las ciencias sociales también tienen una amplia gama de aplicaciones; por ejemplo, en Administración o en Economía, son usadas para el cálculo de interés compuesto en inversiones bancarias. Y sorprendentemente, incluso en algunas artes, son útiles, por ejemplo, en Música son empleadas para el estudio del tono musical (el tono de una nota musical está determinado por la frecuencia de la vibración).

¿Sabes qué es el crecimiento exponencial?

(Derivando, 2016)

E 3.1 El número de células cancerígenas crece lentamente al principio, pero luego aumenta con rapidez. Dibuja una posible gráfica del número de células cancerosas contra el tiempo en el siguiente recuadro y contesta ¿se trata de un crecimiento exponencial?

E 3.2 Un medicamento se inyecta en el torrente sanguíneo de un paciente en un intervalo de 5 minutos. Durante este tiempo, la cantidad del medicamento en la sangre aumenta en forma lineal y después de 5 minutos se suspende la inyección, y entonces la cantidad decae exponencialmente traza una gráfica de la cantidad contra el tiempo en el siguiente recuadro y contesta ¿se trata de un crecimiento exponencial?

E 3.3 Cada año se eleva el consumo mundial de electricidad.. Traza una gráfica el consumo anual mundial de electricidad como función del tiempo en el siguiente recuadro y contesta ¿se trata de un crecimiento exponencial?

EJERCICIOS

E 3.4 Investiga algunas situaciones o fenómenos que involucren crecimiento o decaimiento exponencial y enlístalos a continuación

Fenómeno o situación:

1.-

2.-

3.-

E 3.5 Comparte con tus compañeros tus respuestas y analícenlas. Identifica si se tratan de situaciones que involucren crecimiento o decaimiento exponencial y escribe dos de ellas.

Situación 1:

____

____

Situación 2:

____

____

Sección 2

Aprendizaje: Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica.

Tema: Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo:

f(x) = ab^x *con* $b > 1$ ó $0 < b < 1$ y $a \neq 0$.

El tamaño de una población es un fenómeno que involucra un crecimiento exponencial. Considera los datos de la siguiente tabla, donde se muestra el crecimiento de la población en México a principios de la década de 1980.

Año	Población (millones)	Cambio en la población (millones)
1980	67.38	1.75
1981	69.13	1.80
1982	70.93	1.84
1983	72.77	1.89
1984	74.66	1.94
1985	76.60	1.99
1986	78.59	_____

Para ver como crece la población (**patrón de cambio**), puede observarse el aumento de la cifra de personas cada año que se muestra en la tercera columna. Si la población hubiera crecido en forma lineal, todos los números que aparecen en la tercera columna hubieran sido los mismos. Pero las poblaciones suelen crecer más rápidamente a medida que son mayores, en este ejemplo ocurre porque hay más gente que tiene hijos, de modo que no debe sorprender que crezcan los números de la tercera columna.

E 3.6 ¿A qué razón crece el número de habitantes?

Si dividimos la población de cada año entre el año previo obtenemos, aproximadamente

$$\frac{\text{Población en 1981}}{\text{Población en 1980}} = \frac{69.13 \text{ millones}}{67.38 \ millones} = \_\_\_$$

$$\frac{\text{Población en 1982}}{\text{Población en 1981}} = \frac{70.93 \text{ millones}}{69.13 \text{ millones}} = \_\_\_$$

$$\frac{\text{Población en 1983}}{\text{Población en }\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$$

$$\frac{\text{Población en 1984}}{\text{Población en }\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$$

$$\frac{\text{Población en 1985}}{\text{Población en }\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$$

$$\frac{\text{Población en }\_\_\_}{\text{Población en }\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$$

Entonces: ¿A qué razón crece el número de habitantes?

____

Que en porcentaje equivale a: ___________

Siempre que tengamos un factor constante de crecimiento (en este caso 1.026) se tiene un crecimiento exponencial. Entonces, si consideramos la variable t como el número de años desde 1980 tenemos el siguiente **patrón de crecimiento**.

Cuando $t = 0$ la población es de $67.38 = 67.38\ (1.026)^0$

Cuando t = 1 la población es de $69.13 = 67.38\ (1.026)^1$

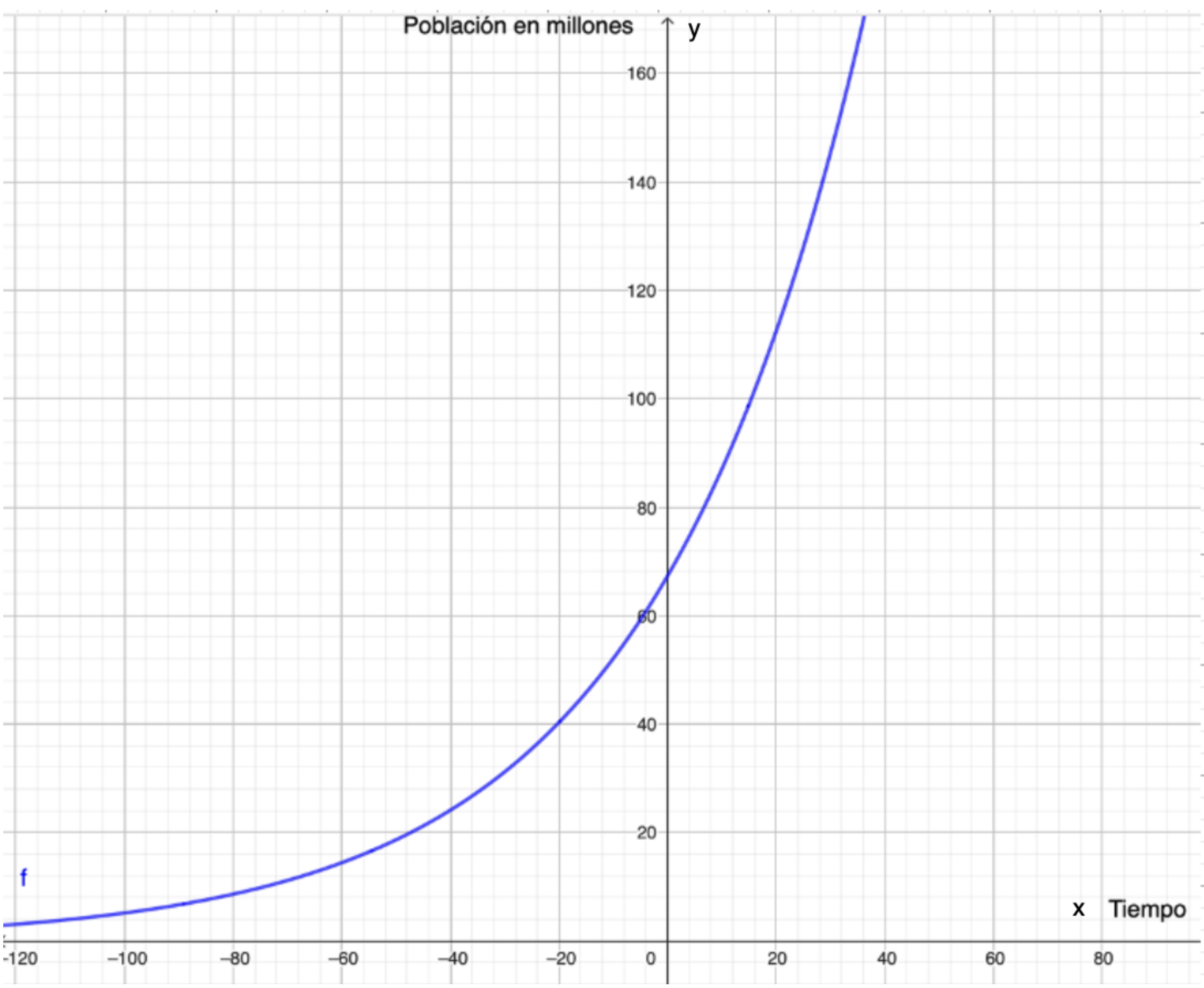
Cuando t = 2 la población es de $70.93 = 69.13\,(1.026) = 67.38(1.026)^2$

Cuando t = 3 la población es de $72.77 = 70.93\,(1.026) = 67.38(1.026)^3$

Así, t años después de 1980 la población estaría dada por:

$$f(t) = 67.38(1.026)^t \qquad ec.(1)$$

Esta es una función exponencial con base 1.026. Se llama exponencial porque la variable t está en el exponente. **La base** representa el factor por el cual crece la población cada año. Así, suponiendo que la misma fórmula se cumple para los siguientes 50 años, la gráfica del crecimiento de la población se vería:



En esta gráfica se refleja el comportamiento típico de las funciones exponenciales las cuales, sin importar que suban en forma lenta al principio, como en este caso, acaban por subir en forma muy pronunciada. Esta es la razón por la cual el crecimiento exponencial de una población de humanos podría en una situación dada convertirse es una amenaza para el mundo (semejando el crecimiento de poblaciones que son consideradas biológicamente como plagas).

Ahora bien, en la ecuación (1) observamos que para cada número real t le corresponde un único número real $f(t) \; = 67.38(1.026)^t$. Lo que nos lleva a la definición de función exponencial.

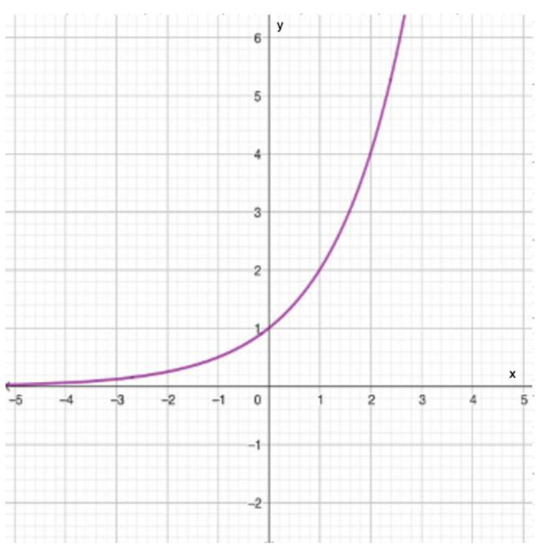
Definición:

$f(x)$ es una **función exponencial** de x con base a sí

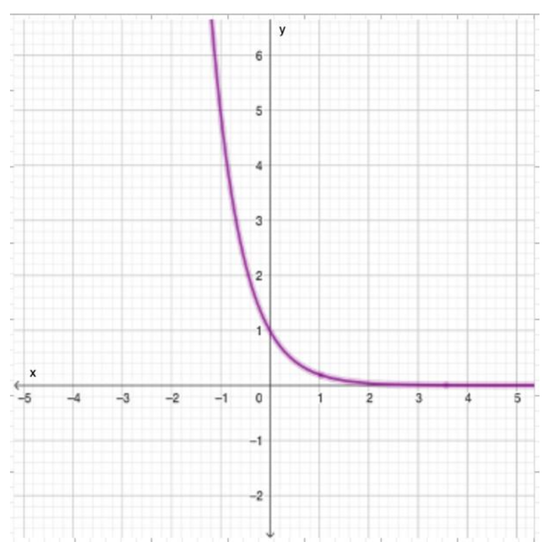
$$f(x) \; = \; P_0 a^x$$

Donde P_0 representa la cantidad inicial (es decir, cuando $x = 0$), y la base a es el factor mediante el cual $f(x)$ cambia cuando x aumenta.

Si $a > 1$, tenemos crecimiento exponencial; en cambio si $0 < a < 1$, tenemos un decaimiento exponencial, como se muestra en la siguiente imagen. (Modificado de Hughes, D. 1988 p.19).



Aspecto geral de la gráfica
cuando $a > 1$



Aspecto geral de la gráfica
cuando $0 < a < 1$

La fórmula $f(x) = P_0 a^x$ indica una familia de funciones exponenciales con parámetros P_0 (cantidad inicial) y a (base o factor de crecimiento). La base es tan importante para las funciones exponenciales como la pendiente lo es para una función lineal. Suponiendo que $a > 0$ y $a \neq 1$.

E 3.7 Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es un modelo en matemáticas?

____

____

2. ¿Qué es un patrón de cambio?

____

____

3. ¿Qué es una variable?

____

____

4. ¿Qué representa la gráfica de una función?

____

____

5. ¿Qué es función creciente y decreciente?

____

____

E 3.8 En la cabeza de un niño se coloca un número determinado de piojos a las 10 de la mañana del día lunes 5 de agosto, y se observa la evolución de la población de piojos mediante un sofisticado procedimiento computarizado (es decir, los piojos se pueden contar con precisión en cada momento).

Transcurridos 10 días, el niño convive con 180 piojos en su cabeza. Si se sabe que una población cualquiera de piojos tarda 5 días en triplicarse.

Responde las siguientes preguntas:

¿Cuántos piojos habrá transcurridos 20 días?____

¿Cuántos piojos había el 10 de agosto?____

¿Cuántos piojos se pusieron en la cabeza?____

¿Cuántos piojos había el 6 de agosto?____

E 3.9 Tabulan las respuestas a las preguntas del inciso anterior

Día "x"	No. de piojos "y"
0	
5	
10	
15	
20	

E 3.10 Traza el plano cartesiano y realiza el bosquejo de la gráfica con los valores que obtuviste en la tabla anterior.

Nota: Para verificar, realiza el registro en GeoGebra de los datos de tu tabla y grafica.

GeoGebra

E 3.11 Encontrar una función o modelo que permita calcular la cantidad de piojos en la cabeza del niño en cualquier día. Para encontrar el modelo responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué datos nos proporciona el problema?

____

____

b) ¿Cuál es tu incógnita? ____

c) ¿Qué letras designarán a tus variables?____

d) ¿Cuál es la condición que relaciona los datos del problema con tus variables?

____

____

e) ¿Cómo varía la cantidad de piojos respecto a los días? ¿Se sigue algún patrón?

____

____

EJERCICIOS

E 3.12 Fátima pesa 70 kg y comienza un programa de ejercicios y una dieta para reducir su peso. Debido a esto, pierde diariamente 0.3%. Llena la siguiente tabla y contesta

Días	0	1	2	3
Peso				

En este registro ¿son iguales los intervalos en que se efectúa cada registro? ¿Cómo compruebas que existe un factor constante entre el peso corporal de un día y del siguiente? ¿ Qué función representa el peso de Fátima en el día x?

E 3.13 Un estudiante quiere ir a visitar a su novia, quien se había mudado a otro estado. Así que solicitó un préstamo de 1400 pesos a un interés del 12% anual compuesto mensualmente para comprar los boletos de autobús de ida y vuelta para reencontrarse con ella. ¿De qué manera aumenta su deuda cada mes y cuánto deberá pagar el estudiante al cabo de t meses, 7 meses, y 15 meses?

Sección 3

Aprendizaje: Identifica el dominio y rango de una función exponencial y traza su gráfica.

Tema: Relación entre los parámetros de: *f(x)* = ab^x con su gráfica.

Entonces como pudimos ver en la sección anterior, en la función

$$f(x) = P_0 a^x$$

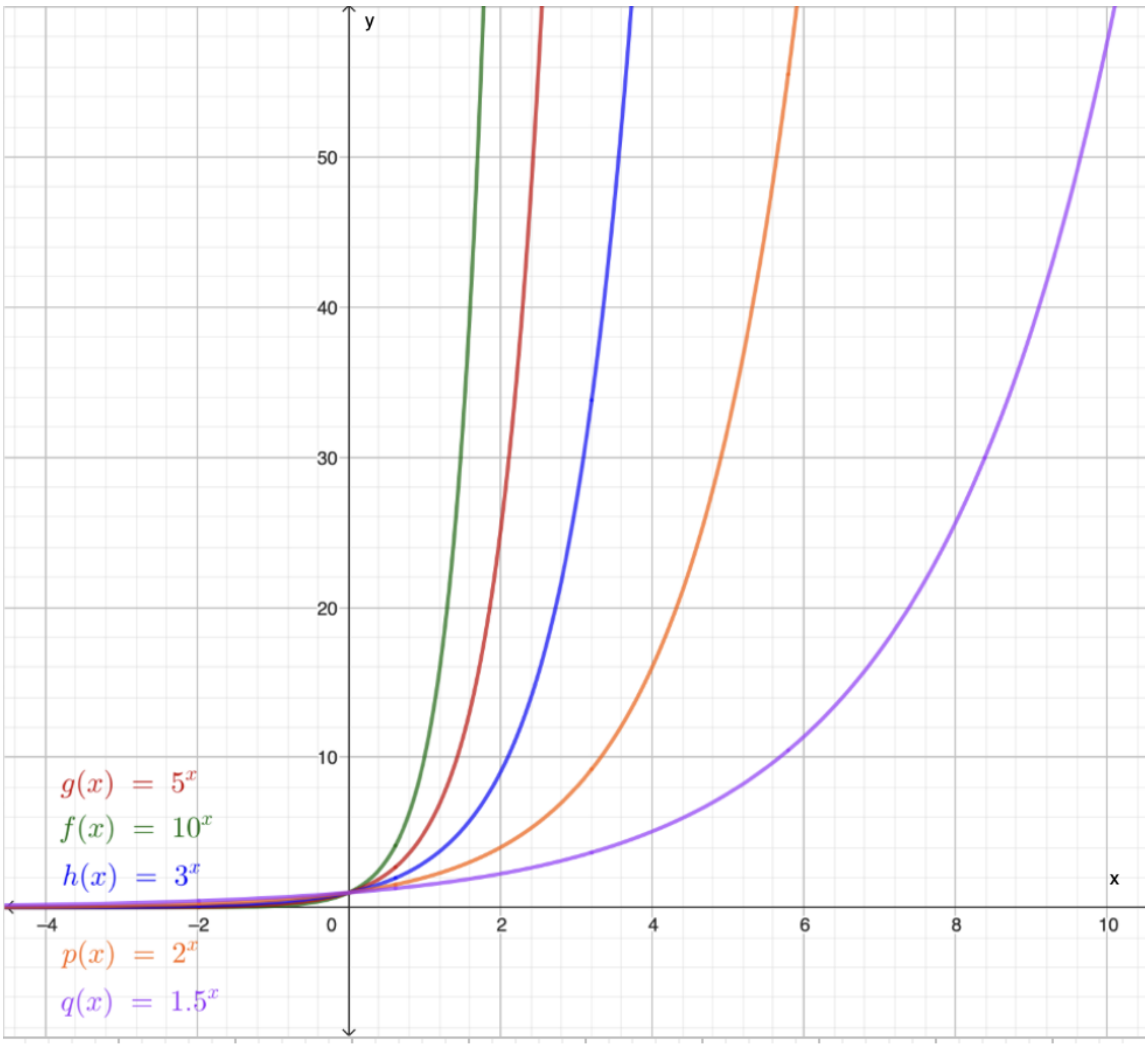
La base indica si la función es creciente en todo su dominio, ($a > 1$), o decreciente ($0 < a < 1$)

Definiciones: Calderón, C. y Manzur, N. (2015), p. 37

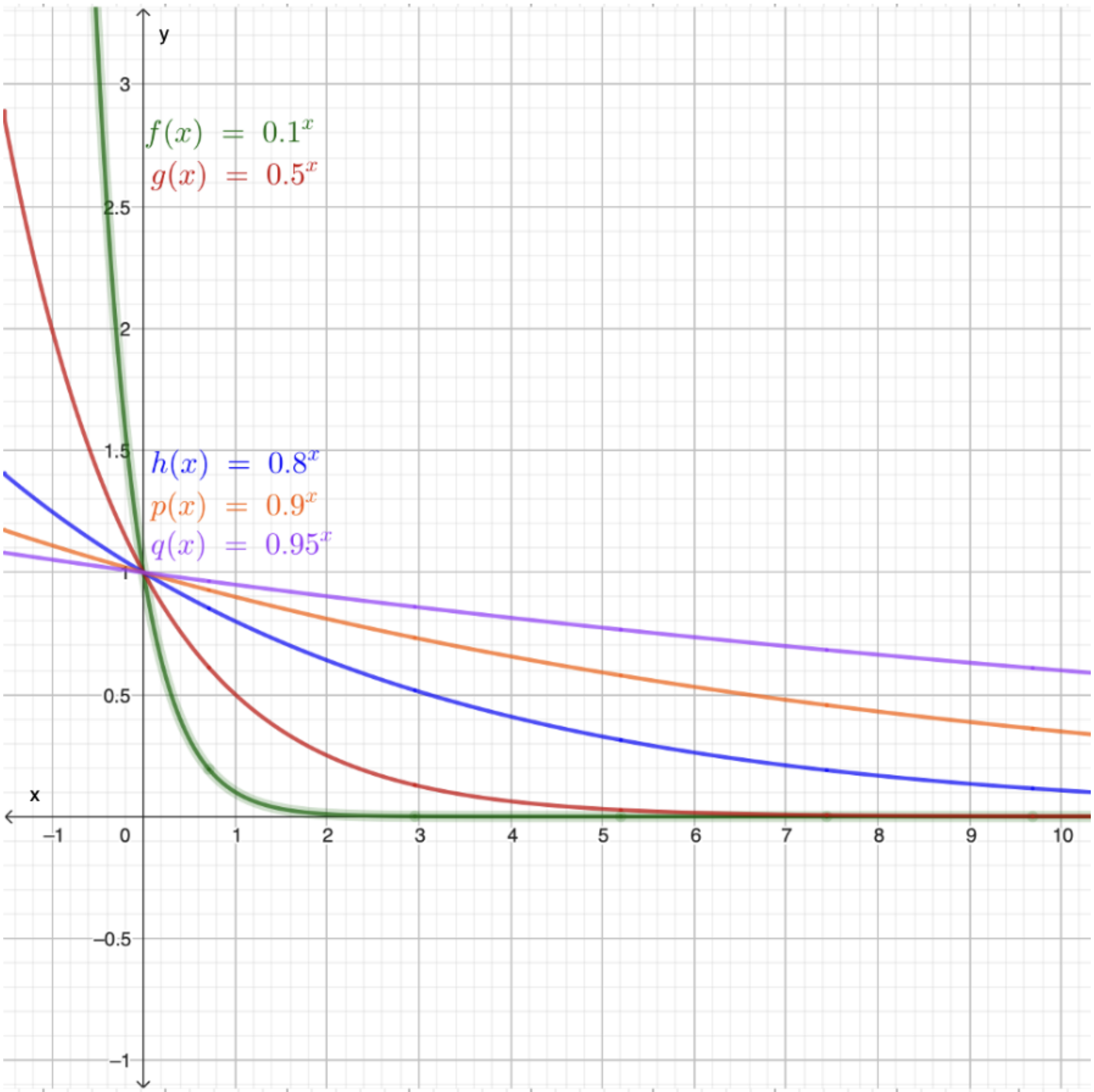
Una **función** es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente x, aumenta la variable dependiente y.

Una **función** es **decreciente** cuando al aumentar la variable independiente x, disminuye la variable dependiente y.

En particular, como a es el factor por el cual $f(x)$ cambia cuando x aumenta en 1, los valores grandes de a significan un crecimiento rápido; los valores de a cercanos a 0 quiere decir que hay un decaimiento rápido.



Crecimiento exponencial de la función $f(x) = a^x$, para los valores de $a > 1$.



Decaimiento exponencial de la función $f(x) = a^x$, para los valores de $0 < a < 1$.

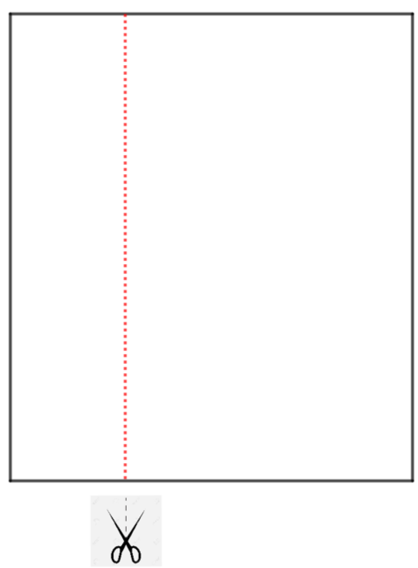
De las imágenes anteriores, podemos notar que:

El **dominio** de las funciones exponenciales son todos los números reales, es decir $x \in \mathbb{R}$ que es lo mismo que la notación con intervalos; $x \in (-\infty,\infty)$ con x número real. Siempre que $a > 0$, y excluyendo los casos en los que $a \leq 0$.

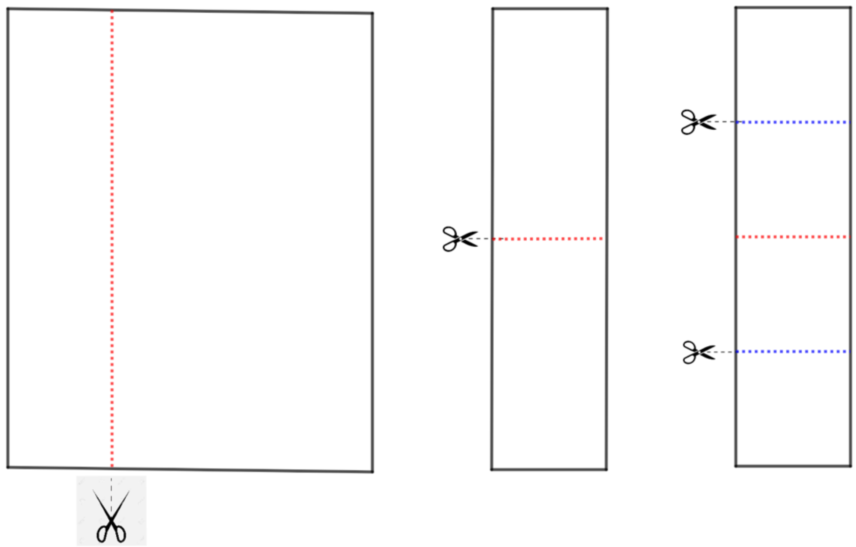
El **rango** está definido como todos los reales positivos, que se escribe como $x \in \mathbb{R}^+$. o en notación de intervalos como todos los reales $y \in (0. \infty)$. Modificado de Miller, C. (2012), p. 367

La restricción anterior (de que $a \neq 1$ y excluyendo el caso $a \leq 0$) en el dominio de la función es necesaria, ya que si tomáramos el caso en el que $a < 0$ el número a^x no siempre se tratará de un número real, como por ejemplo para el valor $x = \frac{1}{2}$. Por otro lado, si $a = 0$ podríamos tener el caso 0^0, el cual no está definido. De igual manera excluimos el caso en el que la base $a = 1$, ya que esta función será tan sólo la función constante. Además, observemos que: El eje de las x es la asíntota horizontal de estas funciones

E 3.14 En una hoja de papel recortar tiras de ancho de 4 cm y de largo, el largo de la hoja (es decir 28 cm**)**



1. Tomar la tira de papel y cortarla en dos partes iguales.
2. Superponer las dos tiras obtenidas en el paso anterior y nuevamente cortarlas en dos partes iguales.
3. Repetir el paso anterior cuatro veces más.



¿Cuántas tiras de papel se obtuvieron en el primer corte? _____________

¿Y en el segundo? ___________

¿Y en el tercero? ____________

¿Cuántas tiras de papel se obtuvieron en el sexto corte? ____________

E 3.15 Tabula las respuestas a las preguntas del inciso anterior.

Cortes "x"	**No. de tiras "y"**
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

E 3.16 Traza el plano cartesiano y realiza la gráfica con los valores que obtuviste en la tabla anterior.

Nota: Para verificar lo anterior realiza el registro en GeoGebra de los datos anotados en la tabla y grafica usando la aplicación.

GeoGebra

E 3.17 ¿Tiene sentido tomar valores para "x" racionales o negativos? ¿Por qué? Argumenta tu respuesta.

____

____

____

____

E 3.18 Indica el dominio y rango de tu función por medio de intervalos.

Dom_f = ____

Ran_f = ____

EJERCICIOS

E 3.19 Gráfica las siguientes funciones exponenciales e indica por medio de intervalos el dominio y rango de cada una de ellas. Señala también las características comunes y diferencias entre las gráficas.

$f(x) = (1.5)^x$

$f(x) = (0.3)^x$

$f(x) = -12(3)^x$

$f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$f(x) = (2)^{-x}$

E 3.20 Utilizando GeoGebra completa la siguiente tabla.

GeoGebra

Función	Ordenada al origen	Creciente o decreciente	Rango	Dominio
$f(x) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x$				
$f(x) = -3(5)^x$				
$f(x) = -5(0.8)^x$				
$f(x) = \frac{3}{5}(10)^x$				
$f(x) = -\frac{1}{2}(1.5)^x$				

Sección 4

Aprendizaje: Analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número *e*

Tema: Importancia de la función: $f(x) = ae^{x}$ y sus aplicaciones.

De todas las bases posibles para una función exponencial, hay una que es más conveniente para hacer estudios teóricos y prácticos; la base con el número $\boldsymbol{e}$**,** que da lugar a la función exponencial denomina también exponencial natural.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$$

Notación elegida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1727 probablemente porque es la primera letra de la palabra exponencial.

Leonhard Euler (1707- 1783)

E 3.21 Para conocer más acerca de Euler y su trabajo escanea el siguiente còdigo

(Derivando,2021)

El número e, surge de aproximar el número $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ conforme n crece.

n	$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718268237
1000000	2.718280469

E 3.22 Analizaremos cómo varía la gráfica de la función exponencial $f\ (t)=\ P_0(a)^X$ cuando el parámetro a cambia. Para ello, mantendremos fijo el parámetro P_0 en 1.

i) En la aplicación GeoGebra grafica la función $f(x)=\ 2^x$ y utiliza el deslizador para hacer variar a con diferentes bases, incluyendo la base con el número e.

Describe con tus palabras lo que sucede con la gráfica.

____

____

____

ii) Ahora responde:

a) ¿Para qué valores de *a* la función es creciente? ______________________________

b) ¿Para qué valores de *a* la función es decreciente? ____________________________

c) ¿Cuál es el rango de $f(x)\ =\ P_0a^x$ con P_0 = 1? _____________________________

d) ¿Cuáles son las coordenadas del corte con el eje y?____________________________

E 3.23 Ahora analizaremos cómo varía la gráfica de la función exponencial $f(x) = P_0 a^x$ cuando el parámetro P_0 cambia.

Fija el parámetro *a* en 2 (es decir, *a = 2*), y utiliza el deslizador para hacer variar P_0.

a) Posicionando el deslizador en P_0 = -10, -5, -3, 1, 3, 5, 10,

¿En qué punto cada una de las gráficas corta el eje y?

____

____

¿Qué representa P_0 en la gráfica?

____

b) ¿Cuál es el rango para $P_0 > 0$? ____

c) ¿Cuál es el rango para $P_0 < 0$? ____

d) ¿Qué pasa si el parámetro $a = \frac{1}{2}$ en las preguntas E 3.22 y E 3.23?

E 3.24 ¿Qué es el número de Euler? Escanea el siguiente código QR

(CuriosaMente,2021)

EJERCICIOS

E 3.25 Para determinar los ahorros en un banco se utiliza la expresión $A = P_0 e^{rt}$, dónde P_0 es la cantidad que se invierte inicialmente, e es el número de Euler, r es el interés expresado como decimal, t el número de años que se guarda la inversión y A la cantidad que se obtiene después de t años. Si en un banco se invierte una cantidad inicial de $300, 000. 00 a 12% de interés compuesto de manera continua ¿Qué cantidad tiene la cuenta a los 8 años de inversión?

E 3.26 Suponga que el porcentaje R de personas qué responde a un anuncio periodístico relativo a un nuevo producto y que adquieren el artículo después de t días, se determina mediante la fórmula

$$R = 50 - 100e^{-0.3(t)}$$

a) ¿Qué porcentaje ha respondido y adquirido el artículo después de una semana?
b) ¿Qué porcentaje ha respondido y ha adquirido el artículo después de 15 días?
c) ¿Cuál es el máximo porcentaje de personas que se espera respondan y adquieran el artículo?
d) Elabora la gráfica de $R = 50 - 100e^{-0.3(t)}$ en GeoGebra y compara los valores de R para $t = 7$ y $t = 15$ ¿ Cuántos días son necesarios para que R sea mayor al 40%?

E 3.27 La recuperación normal de una herida se puede modelar mediante una función exponencial. Sí A_0 representa el área original de la herida y A es el área de la herida después de t días entonces la fórmula

$$A = A_0 e^{-0.35(t)}$$

Que describe el área de una herida en el día t, después de una lesión si no hay infecciones que retarden la recuperación. Suponga que una herida tiene una área inicial de 1 cm^2

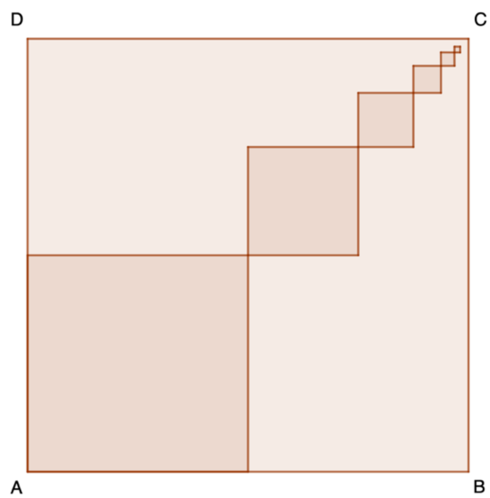
a) Sí hay un proceso de recuperación ¿cuánto medirá el área de la herida después de 5 días?
b) ¿Cuánto medirá después de 7 días? .

Sección 5

Aprendizaje: Resuelven problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.

Tema: Problemas de aplicación.

E 3.28 El cuadrado ABCD tiene una área igual a $1cm^2$. Si los puntos medios de los lados del cuadrado se unen para formar un nuevo cuadrado (sombreado) y este procedimiento se repite una y otra vez, se podrá construir infinidad de nuevos cuadrados como se muestra en la siguiente figura.



E 3.29 ¿Cuál es el área del cuadrado que queda sombreado en el paso 1, en el paso 2, 3, 4 y 5? Llena la siguiente tabla:

Paso "x"	Área "y"
0	
1	
2	
3	
4	

E 3.30 ¿Habrá algún paso en el que se sombree un cuadrado de área $\frac{1}{60}$? Argumenta tu respuesta.

____

____

E 3.31 Encuentra el modelo que te permita conocer el área de cualquiera de los cuadrados sucesivos, elabora la gráfica de éste en GeoGebra y copiala a continuación.

E 3.32 Alberto debe 40, 000.00 pesos en su tarjeta de crédito que tiene una taza del 40% anual. Si no realiza ningún pago al mes los intereses se integran a la deuda, de modo que, en el periodo, el interés se calcula a partir de la deuda que tiene más los intereses acumulados.

Si la tasa de interés del banco es del 40% anual, ¿qué tasa debe pagarse al mes de acuerdo con la cantidad adeudada? ____

¿Qué cantidad debe pagar Alberto por la deuda de $40, 000.00 transcurrido un mes? ___________________

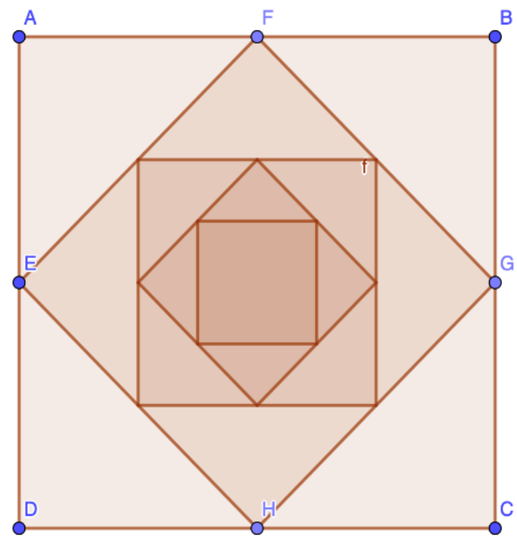
Sí Alberto no hace el pago al banco ¿de cuánto será su deuda a los 3 meses?

____

E 3.33 Llena la tabla siguiente y establece un modelo que te ayude a predecir cómo crece la deuda de Alberto a medida que pasan los meses sin hacer el pago.

Mes	Monto de la deuda	Cantidad que debe pagarse al mes por el interés	Monto nuevo de la deuda por falta de pago
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

E 3.34 La siguiente figura muestra los 5 primeros cuadrados de una secuencia de cuadrados. El cuadrado exterior mide 16 m² de área. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de los lados del cuadrado en el que esta inscrito.



¿Podrías indicar cómo serán las áreas de los cuadrados que se van obteniendo, respecto del cuadrado original? Llena la siguiente tabla.

Pasos	Área del cuadrado obtenido
0	$16\ m^2$
1	
2	
3	
4	

¿Cómo varía el área en cada paso?

____

¿Escribe una expresión generalizada del área del cuadrado obtenido en el paso n?

____

EJERCICIOS

E 3.35 Al sacar un pastel del horno su temperatura es de 200 °F. Si la temperatura ambiente es de 70°F ¿Cuál será la temperatura del pastel al cabo de 10 minutos 15 minutos y 20 minutos?.

Utiliza la ley de enfriamiento de Newton que dice que la temperatura T de un objeto después de t tiempo está dada por la fórmula

$$T = A - (A - T_0)e^{-kt}$$

Donde A representa la temperatura ambiente y T_0 la temperatura inicial, que en este caso es de 200 °F. Supongamos que la constante k = 0.19018

E 3.36 Una colonia de 5 millones de bacterias está creciendo en un medio de cultivo. La población P después de t horas está dada por la fórmula.

$$P = 6(10)^6(2.3)^t$$

Encuentra la población después de 12 horas

E 3.37 Alrededor de 1950, el químico Willard Libby ideó un método en el cual se usa carbono radioactivo para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría se basa en que él isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La proporción del isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción del carbono 14 cesa. De esta manera, comparando la proporción de carbono 14 presente en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de su edad. La vida media del carbono 14 es de 5600 años. Así:

$$N(t) = N_0e^{-kt}$$

Donde $N(t)$ representa la cantidad de carbono restante en el fósil al cabo de t años.

Un fósil fue encontrado en cierta ciudad, ¿cuál es el porcentaje de carbono 14 que contiene sí tiene una antigüedad de 1500 años?. Suponiendo que para el carbono 14, la tasa de decaimiento k = 0.00 1216.

Sección 6

Aprendizaje: Comprende el concepto de logarítmo de un número base b y las relaciones:

b^y=x $\leftrightarrow$ y = log_b x

Tema: Logarítmo base b de un número y su relación con la potencia base *b.*

E 3.38 En el problema de las tiras de papel (ver sección 3), la función que representa el problema es: $y = 2^x$ donde “x” representa el número de cortes y la “y” la cantidad de tiras de papel. Traza la gráfica de esta función en el siguiente recuadro

E 3.39 Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos cortes se deberían realizar sí se desea obtener 64 tiras de papel?
2. ¿Cuántos cortes se deberían realizar sí quisiéramos obtener 32, 16, 18, 4, 2 tiras de papel?
3. Sí sólo se deseará tener una tira de papel ¿cuántos cortes deberían realizarse? A continuación llena la siguiente tabla:

Cantidad de tiras de papel	No. de cortes
64	
32	
16	
18	
4	
2	
1	

E 3.40 Con los datos que obtuviste en la tabla elabora la gráfica correspondiente a esta “nueva función” sobre la misma gráfica de la función que trazaste en el inciso anterior y compáralas.

Sobre la gráfica anterior traza la función $y = x$ y contesta: ¿Cómo son las dos curvas con respecto a la recta $y = x$? ____

En la nueva función ¿Quién es la variable dependiente? ___________________________________

Y ¿quién es la variable independiente?____

Observa que a cada valor de la variable independiente se le asocia un único valor de la variable dependiente

E 3.41 Completa la siguiente tabla

	$y = 2^x$	Nueva función
Variable independiente "x"	Número de cortes	Cantidad de tiras de papel
Variable dependiente "y"	Cantidad de tiras de papel	
Dominio	$\mathbb{R}$	
Rango	$\mathbb{R}^+$	
Coordenadas de los cortes con los ejes	$(0,1)$	

Para definir y construir esta nueva función, se conocía la cantidad de tiras de papel y se deseaba saber cuántos cortes se necesitaban hacer para obtener la cantidad de tiras indicadas. Así como se muestra en la tabla siguiente:

Cantidad de tiras de papel "x"	Número de cortes "y"	
64	6	$64 = 2^?$
32	5	$32 = 2^?$
16	4	$16 = 2^?$
8	3	$8 = 2^?$
4	2	$4 = 2^?$
2	1	$2 = 2^?$
1	0	$1 = 2^?$

A este tipo de exponentes se les conoce como logaritmos. Por ejemplo, el logaritmo base dos de cuatro es dos ($log_2 4 = 2$), porque $4 = 2^2$ y el logaritmo base cinco de ciento veinticinco es tres ($log_5 125 = 3$), pues $125 = 5^3$.

Definición:

Un **logaritmo** de x con base a se define como:

$$y = log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad a^y = x$$

Donde a es un número real positivo distinto de uno.

EJERCICIOS

E 3.42 Utiliza la fórmula anterior para cambiar cada expresión logarítmica a una equivalente con exponenciales y resuélvelas

$log_2 3 = x$

$log_2 8 = x$

$log_3 81 = x$

$log_{10} 10{,}000 = x$

$log_3 \frac{1}{3} = x$

$log_{1/2} 0.25 = x$

Nota: Los logaritmos base 10 se les llama logaritmos decimales y se omite el subíndice, es decir $log_{10}x = \log x$.

Cuando la base es el número "e" el logaritmo se escribe $\ln x$ y se le conoce como logaritmo natural.

E 3.43 Cambia las siguientes expresiones a una equivalente con logaritmos

$10^3 = 1000$

$6^5 = 7776$

$10^{-3} = 0.001$

$3^4 = 81$

$10^{-2} = 0.01$

$e^0 = 1$

E 3.44 Revisando el video que aparece en el siguiente código QR responde ¿Para qué sirven los logaritmos? , ¿Qué significa la base en los logaritmos? ¿Por qué el logaritmo es la operación inversa a la exponencial? ¿Por qué son útiles los logaritmos? ¿Por qué son importante los logaritmos de base e?

(Derivando,2022)

Sección 7

Aprendizaje: Opera con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades.

Tema: Propiedades de los logaritmos. Cambio de base.

Para todo a número real positivo distinto de uno se tienen las siguientes propiedades:

$$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$$

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$$

$$log_a(x^r) = r\, log_a\, x$$

E 3.45 Expresa $log_a(6x)$ como la suma o resta de logaritmos

$$log_a(6x) = log_a(6) + log_a(x)$$

E 3.46 Expresa $log_a\left(\frac{p}{q}\right)$ como la suma o resta de logaritmos

$$log_a\left(\frac{p}{q}\right) = log_a(p) - log_a(q)$$

E 3.47 Expresa $log_a\left(\frac{px}{qy}\right)$ como la suma o resta de logaritmos

$$log_a\left(\frac{px}{qy}\right) = log_a\,(px) - log_a(qy) = log_a\, p + log_a\, x - (log_a\, q + log_a\, y)$$

$$= log_a\, p + log_a\, x - log_a\, q - log_a\, y$$

E 3.48 Expresa $log_a(xy)^5$ como la suma o resta de logaritmos

$$log_a(xy)^5 = 5\, log_a(xy) = 5(\,log_a x + log_a y) = 5\, log_a x + 5\, log_a y$$

E 3.49 Sea a un número real positivo distinto de uno. Utiliza las propiedades anteriores para escribir las siguientes expresiones logarítmicas como una suma/resta de logaritmos, además expresa todas las potencias como factores.

$$log_a(2xy) =$$

$$log_a(yx^2) =$$

$$log_a\left(\frac{xy}{z^3}\right) =$$

$$log_a\left(\sqrt[3]{x}\right) =$$

$$log_a\left(\frac{\sqrt{x}}{yz}\right) =$$

$$log_a\left(x\sqrt{x^2+1}\right) =$$

$$log_a\left(\sqrt{\frac{x^5}{y}}\right) =$$

EJERCICIOS

E 3.50 Simplifica las siguientes expresiones logarítmicas y escribelas como una suma/resta de logaritmos

$log_a(5x^2) =$

$log_a\left(x\sqrt[3]{8x^6}\right) =$

$log_a\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{z^3}\right) =$

$log_a\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right) =$

$log_a\left(\frac{x^2-1}{(x-1)}\right) =$

Sección 8

Aprendizaje: Grafica funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango.

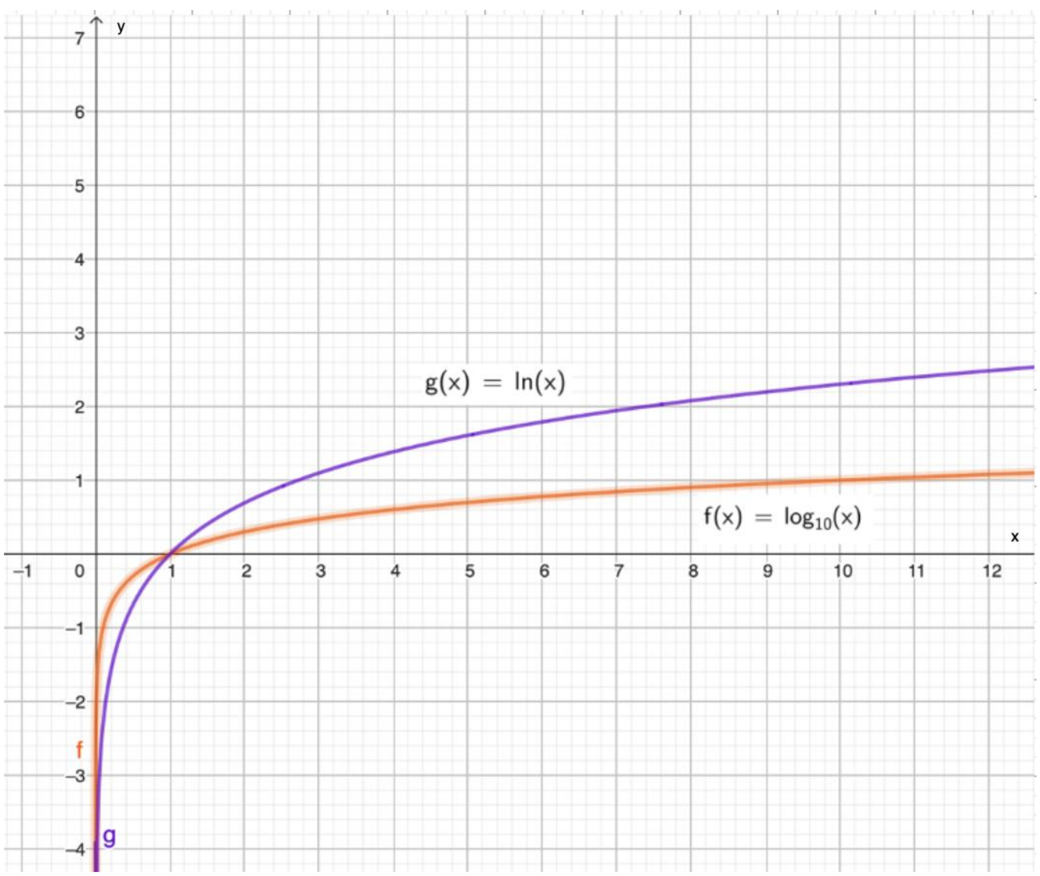
Tema: Definición, gráfica, dominio y rango.

Recordemos que en la sección seis se definió a los logaritmos mediante la siguiente equivalencia :

$$y = log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad a^y = x$$

Con $a > 0$ y distinta de uno.

Si analizamos la gráfica de estas funciones, por ejemplo para las bases 10 y e se observa lo siguiente



A continuación veamos como se ve gráficamente la función logaritmo al modificar la base a por distintos valores.

E 3.51 Primero abre la aplicación de GeoGebra

GeoGebra

Y haz variar la base “a” de la función logaritmo para los valores de $a\ = 2,\ 5\ y\ 100,$ traza sus gráficas a continuación y describe con tus palabras lo que sucede con las gráficas

Descripcion:

____

____

____

E 3.52 Ahora, traza las funciones logarítmicas para valores de la basa $a = 0.5, 0.9\ y\ 0.1$ y describe con tus palabras lo que sucede con las gráficas.

Descripcion:

____

____

____

E 3.53 Contesta las siguientes preguntas

1. ¿Para qué valores de “a” la función es creciente?

   ____

2. ¿Para qué valores de “a” la función es decreciente?

   ____

3. ¿Para qué valores de (x, y) la función es igual a cero?

   ____

4. ¿Para qué valores de (x, y) la función es mayor que cero?

____

5. ¿Para qué valores de (x, y) la función es menor que cero?

____

6. ¿En qué se parecen todas las funciones que trazaste?

____

7. A medida que el valor de la base "a" de las funciones logarítmicas es más grande ¿qué cambio tiene su gráfica?

____

EJERCICIOS

E 3.54 Completa la siguiente tabla a continuación

Función	**Base**	**Creciente o Decreciente**	**Raíz**	**Función mayor que cero**	**Función menor que cero**	**Dominio**	**Rango**
$y = log_a x$	$a > 1$						
	$a < 1$						

Sección 9

Aprendizaje: Verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial.

Tema: La función logaritmo como inversa de la función exponencial.

E 3.55 Se extirpa un tumor de 5 cm cuadrados a un hombre pero quedan 10 células cancerigenas, suponiendo que estas se duplican cada 24 horas como se muestra en la siguiente tabla, podemos comparar el número de días respecto a la cantidad de células en el cuerpo.

Días x	No. de células y
0	10
1	20
2	40
3	80
4	160
5	320

Ahora si cambiamos nuestro punto de vista del problema y nos preguntamos acerca del tiempo que pasó, es decir, ¿cuántos días habrían pasado si tuviera 80 células cancerigenas? La respuesta sería fácil, 3 días. Al pasar de esta forma (de número de células a tiempo) se obtiene una función llamada función inversa de f denotada por f^{-1}. Por lo tanto $f^{-1}(y)$ es el número de días que transcurrieron para que hubiera "y" cantidad de células. Por lo tanto, para hallar los valores de f^{-1} podemos leer la tabla hacia atrás.

Las dos funciones de f y f^{-1} llevan a la misma información, pero la expresan de manera diferente. Por ejemplo, el hecho de que en el cuerpo del hombre después de 3 días hubieran 80 células cancerígenas puede escribirse ya sea en forma de f y f^{-1}

$$f(3) = 80 \text{ o } f^{-1}(80) = 3$$

La variable independiente para f es la variable dependiente para f^{-1}, y viceversa. Los dominios y rangos de f y f^{-1} también se intercambian.

Cabe señalar que no todas las funciones tienen una función inversa, para que ésta exista es necesario que números diferentes del dominio se les asocie valores diferentes de f. Las funciones con dicha característica se les llama funciones biunívocas. Por ejemplo la función $f(x) = x^2$ tiene el mismo valor para diferentes números en su dominio, esto es $f(2) = 4$ y también $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$, entonces no es una función biunívoca.

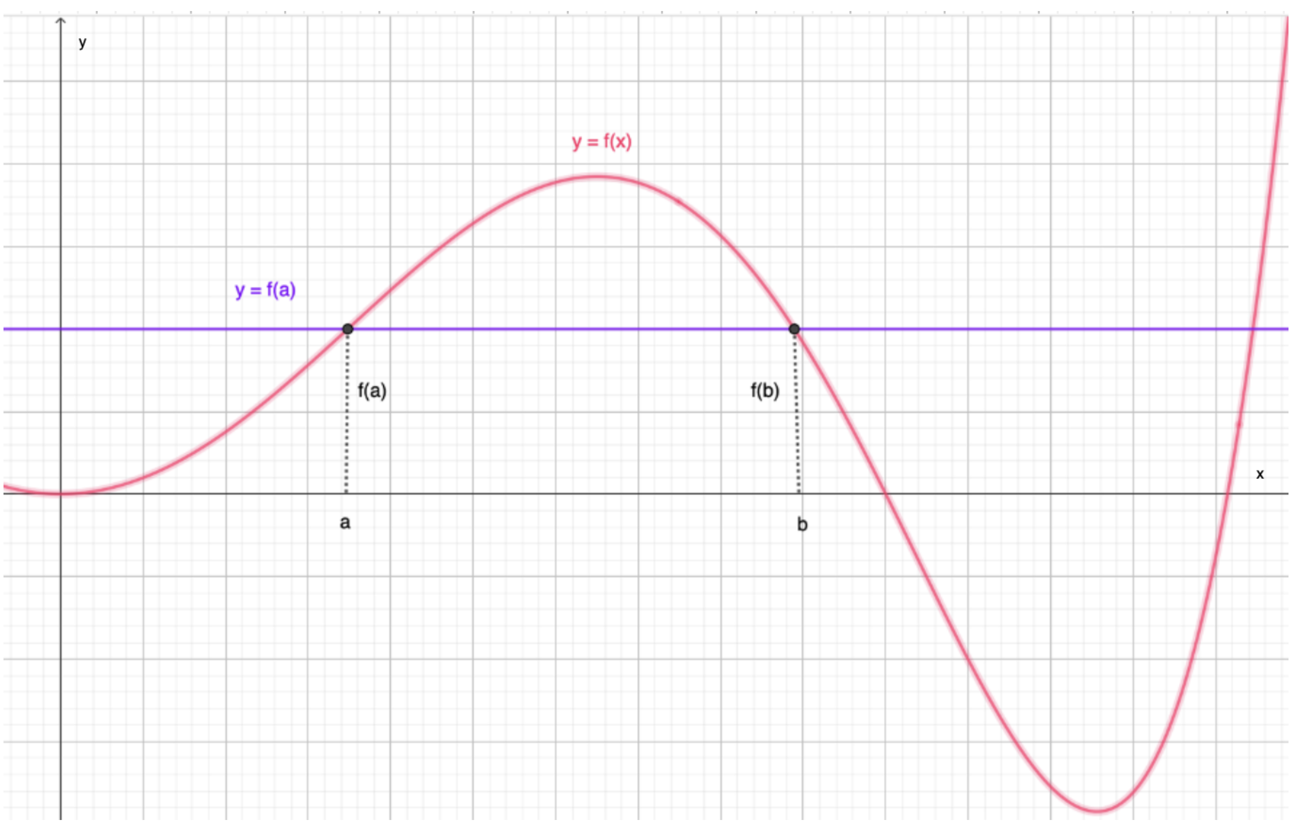
Definición:

Sean $a,\ b\ \in\ Dom_f$ y f$(a),\ f(b) \in\ Ran_f$ entonces f es **biunívoca** sí se cumple alguna de las siguientes condiciones

a) Si $a\ \neq b\ \Rightarrow\ f(a) \neq f(b)$
b) Si $f(a) = f(b)\ \Rightarrow\ a = b$

(Modificado de Swokowski, E. y Cole, J., 2011, p. 294)

Gráficamente es fácil averiguar si una función f es biunívoca o no. Por ejemplo, la función cuya gráfica se traza en la figura siguiente:



No es biunívoca porque $a \neq b$, pero $f(a) = f(b)$ Observa que la recta horizontal *y* = *f* (*a*) (o bien la recta *y* = *f* (*b*)) cruza la gráfica en más de un punto. En general, una función *f* es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal cruza la gráfica de *f* a lo más en un punto. Swokowski, E. y Cole, J., 2011, p. 295.

E 3.56 Grafica en GeoGebra las siguientes funciones y decide si son biunívocas o no argumenta tu respuesta

$y = \ x^2 - 4$

$y = 2x + 5$

$y = \ x^3 - 8x$

$y = In\ x$

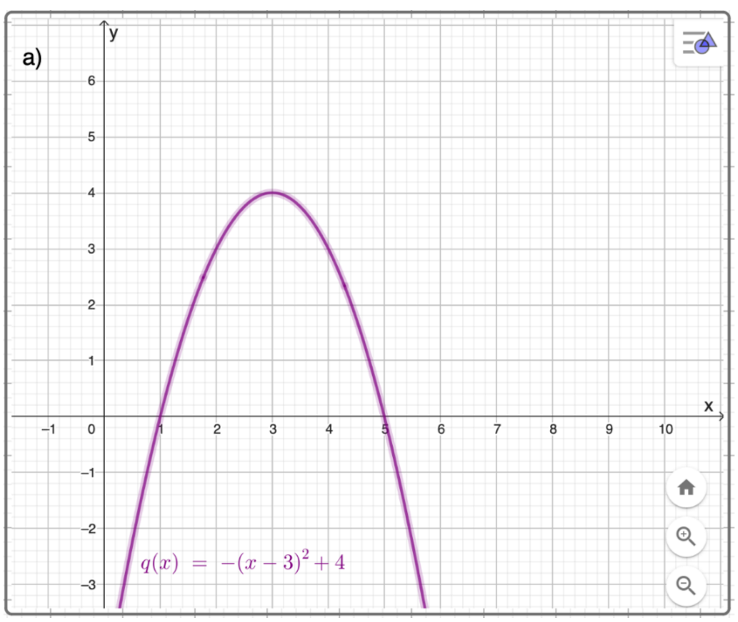
$y = \ e^x$

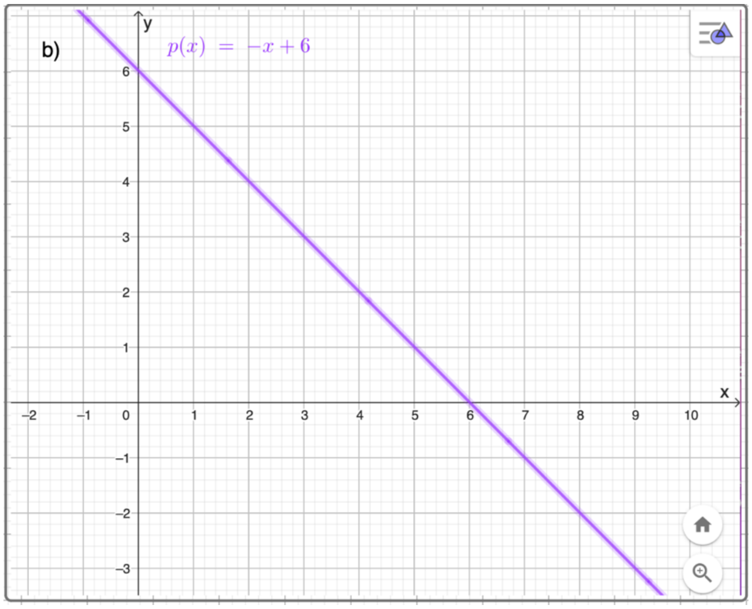
GeoGebra

Entonces el que una función tenga inversa o no depende de si ¿cada valor de y corresponde a un valor único de x? Si la respuesta es sí entonces la función tiene inversa, en caso contrario no existe la función inversa. Este principio puede analizarse geométricamente como sigue:

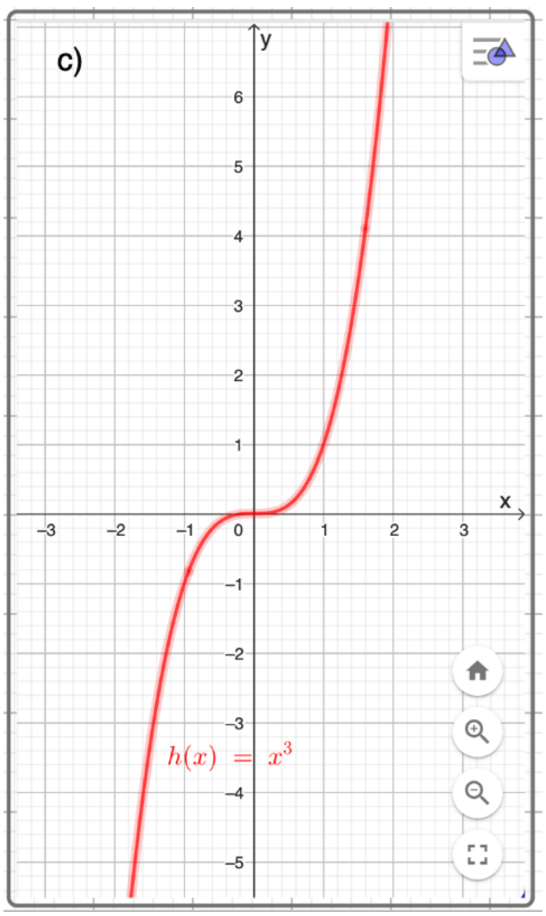
Nota: Una función tiene inversa sí sólo sí su gráfica intersecta cualquier línea horizontal a lo sumo una vez.

E 3.57 Indica cuáles de las siguientes funciones tienen función inversa. Argumenta tus respuestas

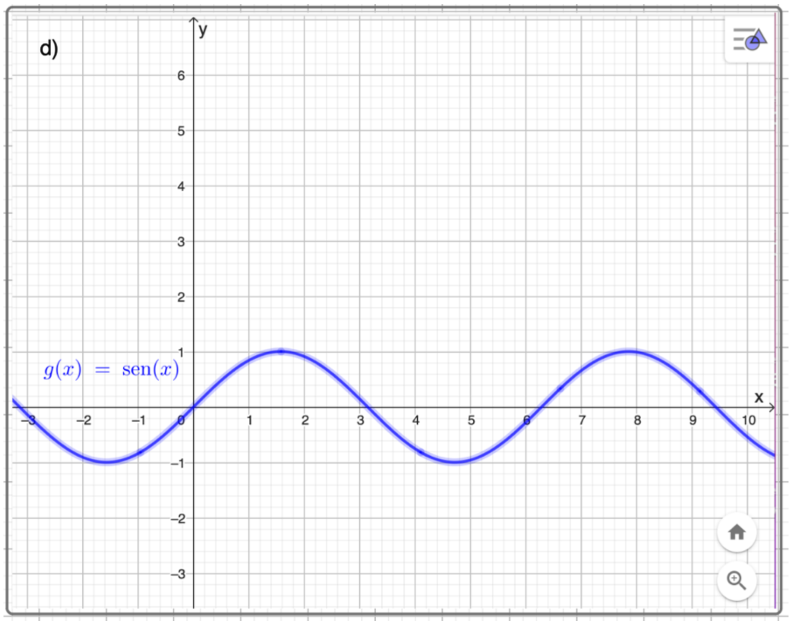


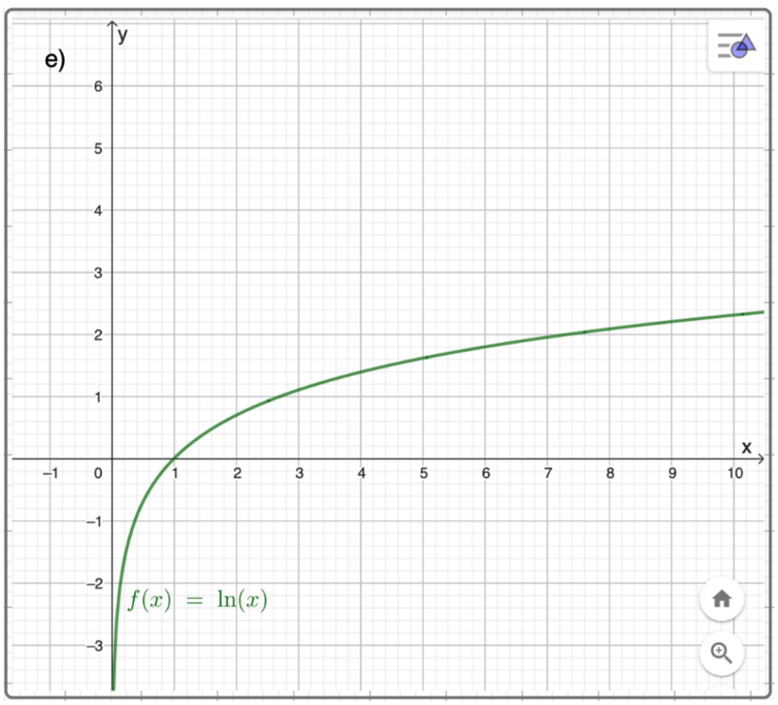


b)
$p(x) = -x + 6$
y
x



c)
$h(x) = x^3$
y
x


d)
y
x
$g(x) = \text{sen}(x)$


e)
y
x
$f(x) = \ln(x)$

Cuando existe la función inversa se define como sigue:

$$f^{-1}(y) = x \text{ significa que } f(x) = y.$$

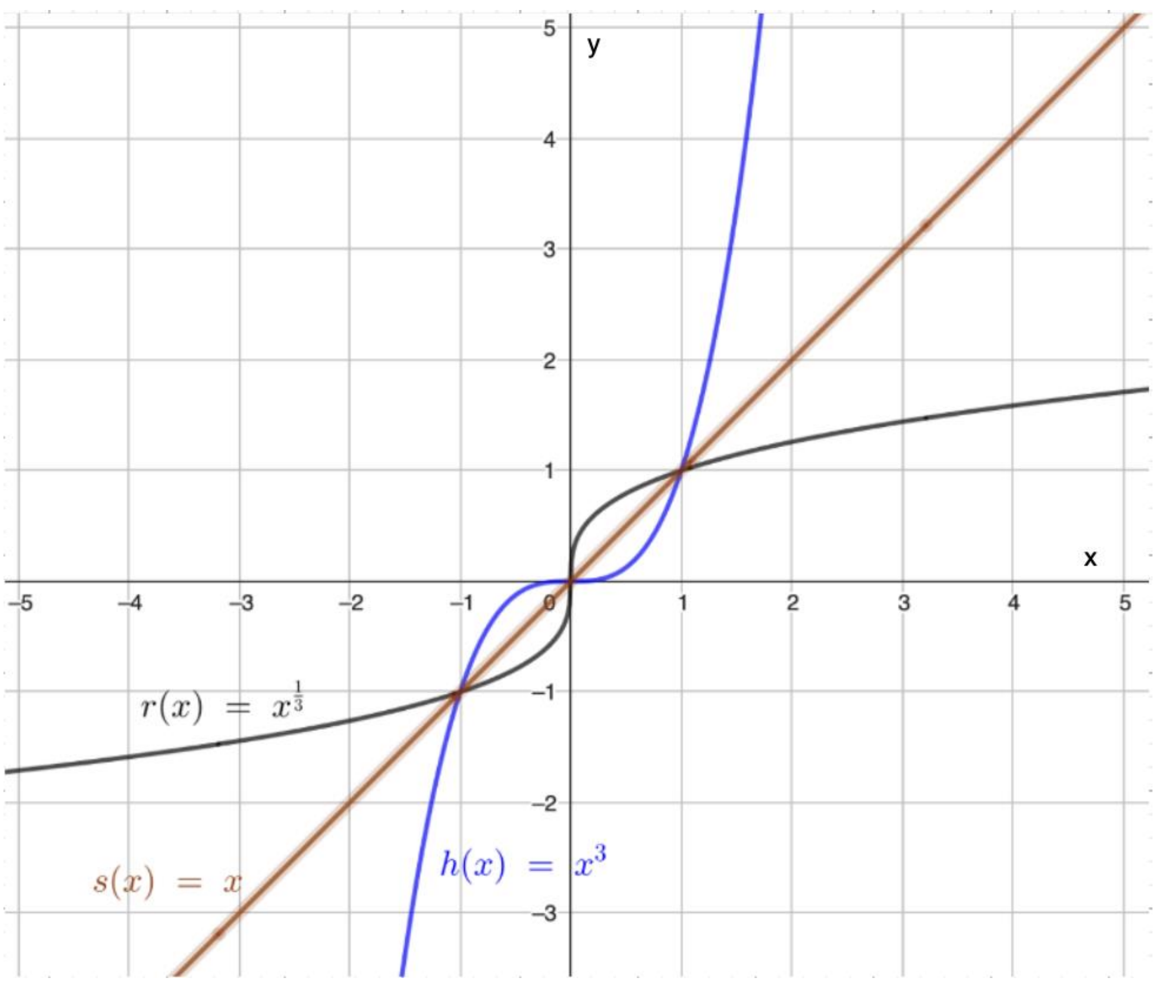
Por ejemplo considera la función $f(x) = x^3$ que como viste en el ejercicio anterior tiene inversa. Para encontrar la inversa de esta se resuelve la ecuación

$$y = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Por lo tanto: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, si quisiéramos llamar a la variable “x”

Las gráficas de ambas funciones se muestran a continuación



Observa que estas gráficas son las imágenes reflejadas una de otra respecto a la identidad $y = x$

EJERCICIOS

E 3.58 Dada la función exponencial $y\ = 3^x$

a) Encuentra la fórmula de su función inversa

b) Gráfica ambas funciones en geogebra

c) Observa las gráficas y responde ¿Qué puedes decir de la simetría de estas funciones?

E 3.59 Dada la función exponencial $y\ = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

a) Encuentra la fórmula de su función inversa

b) Gráfica ambas funciones en geogebra

c) Observa las gráficas y responde ¿Qué puedes decir de la simetría de estas funciones?

E 3.60 Dada la función exponencial $y\ = 2\ (5^x)$

a) Encuentra la fórmula de su función inversa

b) Gráfica ambas funciones en geogebra

c) Observa las gráficas y responde ¿Qué puedes decir de la simetría de estas funciones?

Sección 10

Aprendizaje: Resuelve problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.

Tema: Situaciones que involucren variación de tipo logarítmico. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

E 3.61 A continuación escanea el siguiente código QR y contesta ¿Qué situaciones involucran variación de tipo logarítmico? Menciona algunas de las aplicaciones de los logarítmos que más te hayan llamado la atención.

(MetaMotiva,2018)

Aplicaciones:

1.-

2.-

3.-

EJERCICIOS

E 3.62 La cantidad A en que el capital principal P se convertirá después de t años a una tasa de interés de r, compuesto anualmente, está dado por la fórmula $A = P(1 + r)^t$. Si un capital de 4000 se invierte a una tasa de interés del 6% hasta alcanzar un valor de 6000 ¿por cuántos años fue la inversión?

E 3.63 imagina que se invierten 5,000.00 al 14% de interés anual compuesto y qué la inversión alcanza un valor de 18540 ¿por cuánto tiempo se hizo la inversión?

E 3.64 La intensidad del sonido se mide en belios (En honor a Alexander Graham Bell) O en unidades más pequeñas llamadas decibeles. La intensidad L en decibeles de un sonido de intensidad I se define mediante la fórmula.

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Donde I_0 es la mínima intensidad detectable por el oído humano (tal como el tic tak de un reloj a 6 m de distancia en condiciones de silencio). Cuando un sonido es 10 veces más intenso que otro, su estridencia es de 10 decibeles mayor. Si un sonido es 100 veces más intenso que otro, su estridencia es 20 decibeles mayor que la del otro y así sucesivamente.

Encuentra la intensidad en decibeles del ruido de fondo de un estudio de radio , en el cual la intensidad I es de 199 veces I_0

E 3.65 Encuentra la intensidad del sonido en un concierto de rock, en el que la intensidad I es $10^{12}\ I_0$

E 3.66 La magnitud R (en la escala de Richter) de un terremoto de intensidad I se define con

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

Dónde I_0 es una intensidad mínima utilizada como punto de referencia. Si un terremoto tiene una intensidad de $4\ x\ 10^8$ veces I_0 ¿cuál es su magnitud en la escala Richter?

Sección 11

Aprendizaje: Resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.

Tema: Resolución de problemas.

La leyenda del tablero de ajedrez y los granos de trigo

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram.

En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: el ajedrez. Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte. Sissa lo había conseguido. Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara.

– Sissa, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado —dijo el rey.

El sabio contestó con una inclinación.

– Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado — continuó diciendo el rey—. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás. Sissa continuó callado.

– No seas tímido —le animó el rey—. Expresa tu deseo. No escatimaré nada para satisfacerlo.
– Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditar la respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.

Cuando al día siguiente Sissa se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición, sin precedente por su modestia.

– Soberano —dijo Sissa—, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero del ajedrez.
– ¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey.
– Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32...

– Basta —le interrumpió irritado el rey—. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo: por cada casilla doble cantidad que por la precedente.

Pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad. Al pedirme tan mísera recompensa, menosprecias, irreverente, mi benevolencia. En verdad que, como sabio que eres, deberías haber dado mayor prueba de respeto ante la bondad de tu soberano. Retírate. Mis servidores te sacarán un saco con el trigo que solicitas.

Sissa sonrió, abandonó la sala y quedó esperando a la puerta del palacio. Durante la comida, el rey se acordó del inventor del ajedrez y envió a que se enteraran de si habían ya entregado al irreflexivo Sissa su mezquina recompensa.

– Soberano, están cumpliendo tu orden —fue la respuesta—. Los matemáticos de la corte calculan el número de granos que le corresponde. El rey frunció el ceño. No estaba acostumbrado a que tardaran tanto en cumplir sus órdenes.
Por la noche, al retirarse a descansar, el rey preguntó de nuevo cuánto tiempo hacía que Sissa había abandonado el palacio con su saco de trigo. *– Soberano —le contestaron—, tus matemáticos trabajan sin descanso y esperan terminar los cálculos al amanecer.*

– ¿Por qué va tan despacio este asunto? —gritó iracundo el rey—. Que mañana, antes de que me despierte, hayan entregado a Sissa hasta el último grano de trigo. No acostumbro a dar dos veces una misma orden.
Por la mañana comunicaron al rey que el matemático mayor de la corte solicitaba audiencia para presentarle un informe muy importante.

El rey mandó que le hicieran entrar.

– Antes de comenzar tu informe —le dijo Sheram—, quiero saber si se ha entregado por fin a Sissa la mísera recompensa que ha solicitado.
– Precisamente por eso me he atrevido a presentarme tan temprano — contestó el anciano—. Hemos calculado escrupulosamente la cantidad total de granos que desea recibir Sissa. Resulta una cifra tan enorme...

– Sea cual fuere su magnitud —le interrumpió con altivez el rey— mis graneros no empobrecerán. He prometido darle esa recompensa, y por lo tanto, hay que entregársela.
– Soberano, no depende de tu voluntad el cumplir semejante deseo. En todos tus graneros no existe la cantidad de trigo que exige Sissa. Tampoco existe en los graneros de todo el reino. Hasta los graneros del mundo entero son insuficientes. Si deseas entregar sin falta la recompensa prometida, ordena que todos los reinos de la Tierra se conviertan en labrantíos, manda desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve que cubren los lejanos desiertos del Norte. Que todo el espacio sea totalmente sembrado de trigo, y ordena que toda la cosecha obtenida en estos campos sea entregada a Sissa. Sólo entonces recibirá su recompensa.

El rey escuchaba lleno de asombro las palabras del anciano sabio.

– Dime cuál es esa cifra tan monstruosa —dijo reflexionando.
– ¡Oh, soberano! Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince.

E 3.67 Elabora una tabla con los valores del número de casillas del tablero vs la cantidad de granos de trigo que le corresponde

No. de casilla	Cantidad de granos de trigo
1	
2	
3	
4	
5	
6	

¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

____

E 3.68 Con los datos que obtuviste en la tabla elabora la gráfica correspondiente a esta función y verifica en GeoGebra.

GeoGebra

¿Cuántos granos habrá que colocar en la última casilla?

____

¿Cuántos granos habrá que colocar en la casilla número 16?

____

¿En qué número de casilla habrá que colocar 4194304 granos de trigo?

____

E 3.69 Encuentra la expresión de la función inversa

E 3.70 Grafica la función y su función inversa en la misma gráfica

E 3.71 Supongamos que Sissa le pidiera al rey que colocará 3 granos de trigo en la primera casilla y que en cada casilla del tablero coloque el triple de trigo que en la casilla anterior ¿cómo sería la función que modela la situación en este caso?

____

E 3.72 Grafica la función que obtuviste en el inciso anterior

E 3.73 ¿Qué diferencias existen entre esta grafica y la del inciso 3.68? ¿A qué se debe?

____

____

____

EJERCICIOS

E 3.74 En cierto lugar se encontró un fósil que contenía 75% de carbono 14 que se encuentra en una muestra de carbono actual de la misma masa. Sí se sabe que el decaimiento radioactivo está dado por $N(t) = N_0e^{-kt}$ Dónde en este caso k =0.001216 ¿Cuál es la edad de la muestra?

E 3.75 Una sustancia radiactiva decae exponencialmente. Con una vida media de 350 años. Determina el valor de la tasa de decaimiento k en $N(t) = N_0e^{-kt}$

E 3.76 Si la población en India en 1995 era de 5700 millones de habitantes y la tasa de crecimiento relativa estimada era del 2% anual ¿en qué año se alcanzará los 57,000 millones de habitantes, si se continua creciendo al mismo ritmo?

E 3.77 Un cultivo se inicia con 10000 bacterias y su número se duplica cada 50 minutos. Obtén una función para determinar el número de bacterias en el tiempo t. ¿Cuál será el número de bacterias después de 90 minutos?, ¿después de cuántos minutos habrá 50000 bacterias?

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

Cuestionario. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica.

1) La función exponencial $f(x) = -(10^x)$ es creciente.

2) Si en la expresión $f(x) = P_0\ a^x$, el parámetro $\boldsymbol{a}$ es igual al valor 1, entonces no es una función exponencial.

3) Si 0 < a < 1 y $P_0 < 0$, la función exponencial $f(x) = P_0\ a^x$ es decreciente.

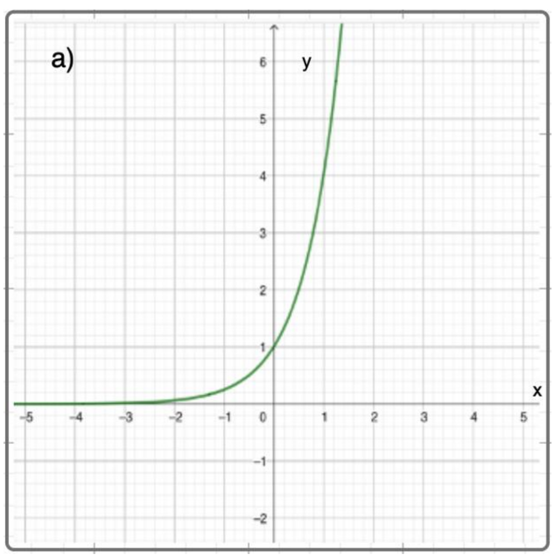
4) La función exponencial $f(x) = -21\ (5)^x$ corta al eje $\boldsymbol{y}$ en el punto (0, -21).

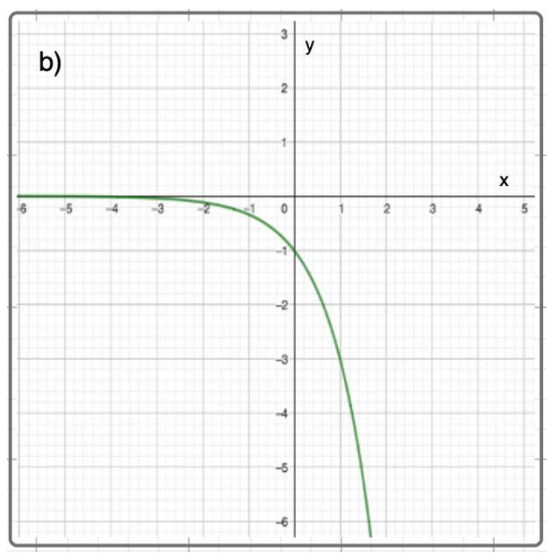
5) El dominio de una función exponencial siempre es $\mathbb{R}$.

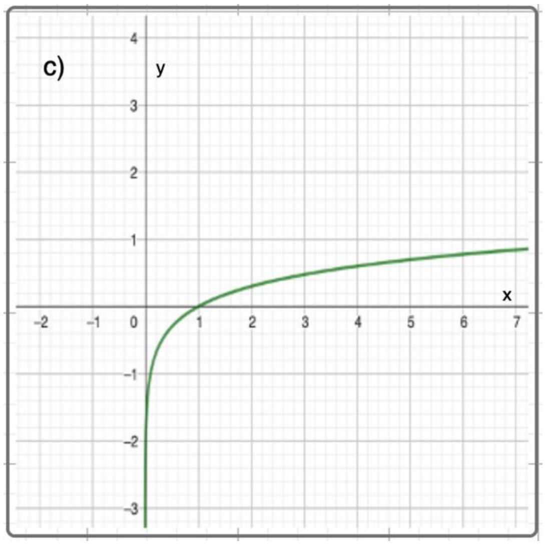
6) La función exponencial $f(x) = -7(0.3)^x$ es creciente.

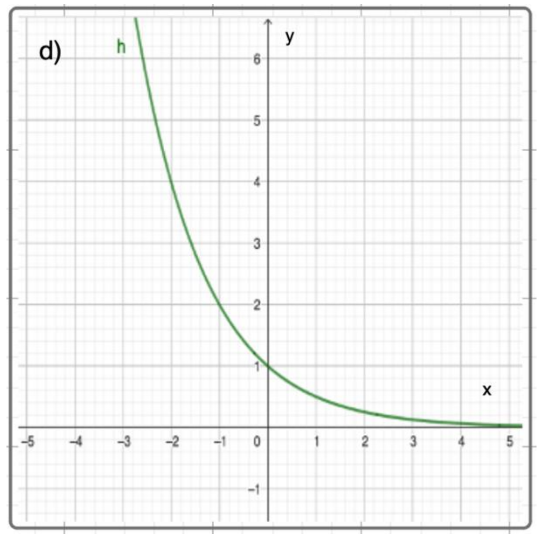
7) La expresión $f(x) = 2(-5)^x$ es una función exponencial creciente.

8) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $f(x) = \log x$?









9) Cambia la expresión $5^3 = 125$ a su forma logarítmica

10) Expresa el $log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$ en su forma exponencial

11) imagina que trabajas en un restaurante de comida rápida en el que los propietarios piensan que el café debe prepararse a 170°F. No obstante a esa temperatura el café está demasiado caliente y si un cliente por accidente lo llegará a derramar le provocaría quemaduras de tercer grado, de modo que se necesita un recipiente especial donde se calienta el agua a 170 °F pero enfríe con rapidez hasta una temperatura en la que se pueda beber como 140 °F, y mantenerlo así, o al menos sobre los 120 °F durante un periodo razonable . Así 3 compañías proponen recipientes con las siguientes especificaciones:

- CentiKeeper tiene un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 185 °F la 100 °F en 90 minutos, manteniendo una temperatura constante de 70 °F
- TempControl ofrece un recipiente que reduce a la temperatura de un líquido de 200 °F a 110 °F en 60 minutos, manteniendo una temperatura constante de 50 °F
- Hot`n`Cold Inc. Propone un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 210 °F a 90 °F en 30 minutos, manteniendo una temperatura constante de 50 °F

Si la ley del enfriamiento de Newton es:

$$u = T + (u_0 - T)e^{kt}, \ \ K < 0$$

Donde *T* representa la temperatura del ambiente, u_0 la temperatura inicial del objeto calentado, t el intervalo de tiempo en minutos, k una constante negativa y u la temperatura en el instante t.

a) Utiliza la ley de enfriamiento de Newton para determinar la constante k de la fórmula para cada recipiente.

b) ¿Cuánto tiempo tarda cada recipiente en reducir la temperatura del café de 170 °F a 140°F?

c) Con base en esta información ¿cuál compañía debe ganar el contrato? ¿cuáles son tus razones?

RÚBRICA

UNIDAD 4:	**Funciones exponenciales**			
OBJETIVO:	**Se busca evaluar los aprendizajes en el alumno acorde a la unidad.**			
PORCENTAJE:	**100%**			
Criterios	**Excelente 10 puntos.**	**Bueno 8 puntos.**	**Regular 5 puntos.**	**Total**
Funciones exponenciales				
Explorar situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.	Identifica correctamente cuando un fenómeno o situación corresponde a un crecimiento o decaimiento exponencial.	Identifica parcialmente cuando un fenómeno o situación corresponde a un crecimiento o decaimiento exponencial.	No reconoce cuando una situación se trata de crecimiento o decaimiento exponencial.	
Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decaimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica	Identifica el comportamiento de variaciones exponencial en fenomenos mediante tablas y realiza el bosquejo de la gráfica.	Distingue parcialmente los patrones de crecimiento o decaimiento en los problemas realizando el bosquejo gráfico de estos.	Presenta errores al distinguir el comportamiento de variación de las situaciones problemáticas y por tanto realiza con dificultad el bosquejo de la gráfica	
Identifica el dominio y rango de	Identifica los parámetros de una función exponencial y los	Distingue algunos de los parámetros y los	No reconoce los parámetros y los	

una función exponencial y traza su gráfica	asocia al comportamiento gráfico de esta estableciendo su dominio y rango.	asocia parcialmente a los cambios que sufren las gráficas correspondientes.	cambios asociados a estos en las gráficas respectivas.	
Analizan la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número e.	Entiende las variaciones que sufren las gráficas a partir del cambio del valor de la base y reconoce, y reconoce la importancia de la base *e* para el análisis de diferentes fenomenos.	Lograr relacionar en cierta medida la variación de las graficas con las diferentes bases	No comprende la relación que existe entre el valor de la base y la gráfica asociada	
Resuelve problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones exponenciales.	Formula y resuelve modelos de diferentes problemas de crecimiento y decaimiento exponencial aplicando diferentes enfoques.	Logra plantear el problema pero no consigue resolverlo.	Presenta varios errores al modelar las situacioes problemáticas.	
Funciones logarítmicas				
Comprende el concepto de logaritmo de un número base b y las relaciones b^y=x $\leftrightarrow$ y = log_b x	Reconoce que las funciones logarítmicas son un tipo de función exponencial y reconoce la relación entre ambas.	Comprende parciamente la relación que existe entre las funciones logarítmicas y exponenciales.	No comprende la relación que existe entre las funciones logarítmicas y exponenciales.	
Opera con logaritmos de distintas bases y	Realiza correctamente las operaciones con logaritmos	realiza operaciones con logaritmos con algo de dificultad	presenta muchas dificultades para realizar las	

aplica sus propiedades			operaciones con logaritmos.	
Gráfica funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango	Identifica los parámetros de una función logarítmica y los asocia al comportamiento gráfico de esta estableciendo su dominio y rango.	Distingue algunos de los parámetros y los asocia parcialmente a los cambios que sufren las gráficas correspondientes.	No reconoce los parámetros y los cambios asociados a estos en las gráficas respectivas.	
Verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial.	Explica e interpreta mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la inversa del exponencial	Logra explicar parcialmente por qué la función logarítmica es inversa de la exponencial	No comprende el carácter inverso de la función logarítmica.	
Resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o hipotéticos	Realiza el planteamiento del problema acorde a las condiciones, pero no logra resolverlo.	No resuelve los problemas planteados.	

BIBLIOGRAFÍA PARA LA UNIDAD

Para el alumno:

Basurto, E. & Castillo, G. (2012) Matemáticas IV.México: Pearson.

Gustafson, R. & Frisk, P. (2006). Álgebra intermedia. México: Thomson Learning.

Islas, A. (2012). Matemáticas IV. México: Pearson Edudacation.

Miller, C. Hornsby, J. & Heeren, V. (2010). Matemática: Razonamiento y aplicaciones. México: Pearson Addison- Wesley.

Prieto, C. (2015). Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas. La ciencia para todos. México: Fondo de cultura económica. 2006 pp. 94-104.

Ramírez, C., Morales, J., Gómez, G. & Molina A. (2010). Matemáticas IV Cuaderno de trabajo. México: Trillas.

Sullivan, M. (1997). Precálculo. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Tahan, M. (2019). El hombre que calculab. México: Limusa.

Para el profesor:

Calderón, C. & Manzur, N. (2015). Funciones exponenciales y logarítmicas. España: Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física.

Carpintero, C. & Jeanne, E. (2014). Matemática. La función exponencial, una secuencia posible. Argentina: E-Book

Hughes, D. & Gleason, A. (1995). Cálculo. México: Continental.

Leithold, L. (1999). Álgebra y Trigonometría con geometría analítica. México: Oxford University Press.

Polya, G. (1976). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Smith, S., Charles, R., Dossey, J., Keedy, M. & Bittinger, M. (1998). Algebra Trigonometría y Geometría Analítica. Mexico., Addison Wesley long Man.

Stewart, J. (2018). Cálculo de una variable. México: CENGAGE Learning.

Swokowski, E. & Cole, J. (2011). Álgebra y Trigonometría con geometría analítica. México: CENGAGE Learning.

REFERENCIAS [VIDEOS]

Curiosamente (2021). ¿qué es el número de euler? Y la ecuación más hermosa del mundo. [Video] https://www.youtube.com/watch?v=B0Rc7lL6QUg&t=1s

Derivando (2016). ¿sabes qué es el crecimiento exponencial? [Video] https://www.youtube.com/watch?v=s7FS9s8I8mw&t=6s

Derivando (2020). ¿Por qué Leonard Euler es mi matemático favorito? [Video] https://www.youtube.com/watch?v=nbumSy_KPz4

Derivando, (2022). ¿Para qué sirven los logaritmos? ¿Por qué nos los explican en la escuela? [Video] https://www.youtube.com/watch?v=W_BZb_va6jY&t=18s

Metamotiva (2018). ¿Qué son y para qué sirven los logaritmos? [Video] https://www.youtube.com/watch?v=2Ja9YFvpRZc&t=27s

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS IV

UNIDAD IV: Funciones trigonométricas

Elaborado por:

ISRAEL GÓMEZ FLORES

Revisado por:

MARIBEL SERRATO DUARTE

MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA

MÓNICA CITLALLI PEREYRA ZAMUDIO

2023- 2024

MATEMÁTICAS IV UNIDAD IV	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
Propósito: Al finalizar, el alumno: Comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas. Tiempo: 20 Horas Elaborado por: Israel Gómez Flores	**Aprendizajes** **Sección 1:** Explora situaciones o fenómenos de variación periódica. **Sección 2:** Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa. **Sección 3:** Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios. **Sección 4:** Extiende el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = sen\, x$, $f(x) = cos\, x$ **Sección 5:** Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones: $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$ $f(x) = D + Acos\,(Bx + C)$. D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia, y desfasamiento. **Sección 6:** Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica

Sección 1

Tema: Situaciones o fenómenos de variación periódica.

Aprendizaje: Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, con la finalidad de establecer un modelo matemático de un fenómeno periódico en el mundo real. Por tanto, las funciones trigonométricas se emplean para modelar fenómenos o situaciones con cantidades periódicas.

Revisa el siguiente video:

(Nerea, 2019)

Un fenómeno o situación periódica se refiere a un hecho, un evento que sucede cada determinado tiempo y se repite de igual manera en el mismo intervalo de tiempo. A este intervalo de tiempo se le llama periodo.

E 4.1 Piensa en un fenómeno o situación que se repite cada determinado tiempo. Explícalo brevemente e identifica el intervalo de tiempo en el cual se repite.

Fenómeno o situación:

Intervalo de tiempo:

E 4.2 Comparte con tus compañeros el fenómeno o situación que identificaste como un hecho periódico.

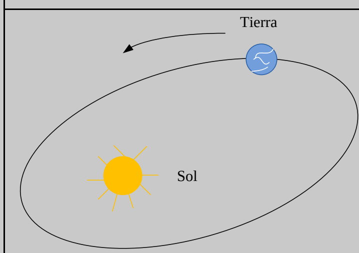
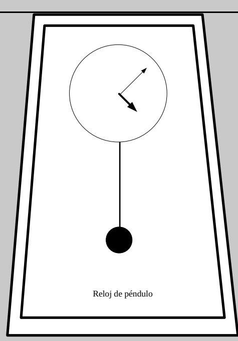
Analiza las respuestas de tus compañeros.

Fenómeno o situación:

Intervalo de tiempo:

E 4.3 Piensa en los siguientes fenómenos o situaciones e identifica si se trata o no de una situación periódica.

En caso de que, si lo sea, identifica cuál es su periodo.

Fenómeno o situación:	**Descripción**	**Periodo o intervalo de tiempo**
		
 Caminar		
		

E 4.4 Por equipos realiza lo siguiente: Identifica dos fenómenos o situaciones que sean periódicos que sucedan en tu cuerpo, dos fenómenos naturales, dos fenómenos físicos o mecánicos. Para cada uno de ellos describe el fenómeno e identifica el periodo.

Compara con otros equipos tus respuestas, comparte los fenómenos que son diferentes a los de tu equipo y anótalos en tu cuaderno.

E 4.5 Por equipos realiza lo siguiente: Si consideramos el movimiento que describe el péndulo de un reloj, y lo observamos durante un momento. Piensa y contesta las siguientes preguntas:

¿Cómo representarías el movimiento del péndulo en una gráfica?

¿Qué valores o variables intervienen o se relacionan en el movimiento de un péndulo?

EJERCICIOS

E 4.6 Para cada uno de los siguientes fenómenos o situaciones, descríbelo e identifica si se trata de un hecho periódico, en caso de que, si lo sea, identifica cual es su periodo.

a) Movimiento de un pistón de un motor
b) Giro de las aspas de un ventilador
c) Semáforo
d) Respiración

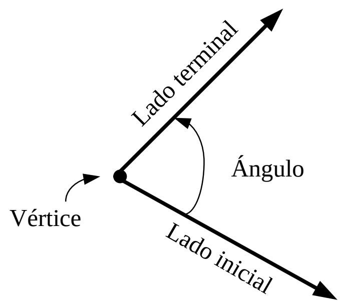
E 4.7 Elige uno de los fenómenos o situaciones anteriores que sea periódico, identifica que valores o variables se relacionan para describirlo y trata de realizar una gráfica que represente el fenómeno.

Sección 2

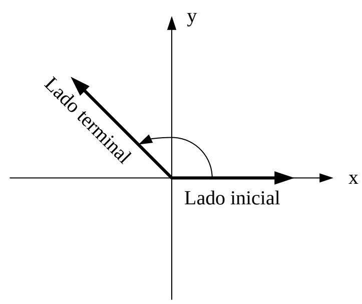
Tema: Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

Aprendizaje: Medidas angulares en grados y radianes. Conversiones.

Un ángulo está determinado por la rotación de un rayo o semirrecta, partiendo de una posición inicial (lado inicial) y finalizando en una posición final (lado terminal) como se muestra en la figura siguiente:



Podemos representar un ángulo en un sistema de coordenadas rectangulares, donde el vértice coincida con el origen $(0,0)$ y el lado inicial con el eje de las abscisas (eje x).

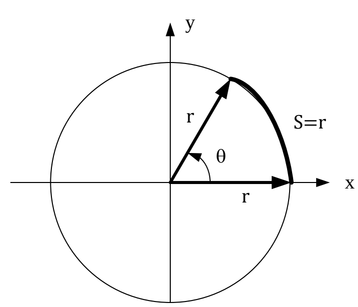


Ángulos positivos: son los que se generan por la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Ángulos negativos: se generan por la rotación en sentido de las manecillas del reloj.

Para medir un ángulo se emplean los ***radianes*** y ***grados***.

Medición en radianes. Un radian es la medida de un ángulo central θ, que intersecta o abarca con un arco S igual en longitud al radio r de la circunferencia.



$$\theta = \frac{S}{r}$$

Donde θ, se mide en radianes.

Una revolución alrededor de una circunferencia de radio r, genera o corresponde a un ángulo de 2π en radianes, por lo tanto:

$$\theta = \frac{S}{r} = 2\pi \, radianes$$

Partiendo de un ángulo central de una revolución completa (vuelta completa) corresponde a una longitud de arco de:

$S = r\theta$ Donde: $\theta = 2\pi$

Entonces: $S = 2\pi r$

La medición en radianes de un ángulo de una vuelta completa es de 2π, entonces si tenemos media revolución:

$\frac{1}{2} revolución$ sería: $\frac{2\pi}{2} = \pi \, radianes$

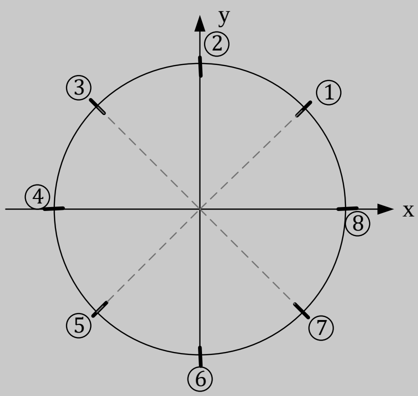
Para un cuarto de revolución:

$\frac{1}{4} revolución$ sería: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \, radianes$

Revisa el siguiente video:

(Gómez, 2018A)

E 4.8 Si queremos dividir una circunferencia en 8 partes iguales ¿Qué medida tendrían los ángulos en radianes que se generarían?



E 4.9 Para el ejercicio anterior, mide con tu transportador, la medida de cada ángulo en grados y completa la siguiente tabla.

Medida angular en radianes		Medida angular en grados
1	$\frac{\pi}{4}$	
2	$\frac{\pi}{2}$	
3	$\frac{3\pi}{4}$	
4		
5		
6		
7		
8		

Revisa el siguiente video:

(Gómez, 2018B)

Medición en grados. Otra unidad de medida para los ángulos son los grados, que se simboliza por °. Una medida de $1°$ equivale a una rotación de $1/360\ de\, una\, revolución$. Debido a que 2π equivale a una revolución completa, los grados y los radianes se relacionan de la siguiente manera:

$$360° = 2\pi \qquad \text{ó} \qquad 180° = \pi$$

Por lo tanto:

$$1° = \frac{\pi}{180°}\ rad \qquad \text{y} \qquad 1\ rad = \frac{180°}{\pi}$$

Conversión entre grados y radianes.

1.- Para convertir de grados a radianes se multiplican los grados por: $\frac{\pi}{180°}$

2.- Para convertir de radianes a grados se multiplican los radianes por: $\frac{180°}{\pi}$

Cuando no se especifica las unidades de medición del ángulo, implica que las unidades son ***radianes***.

Ejemplo: Para convertir $135°$ a radianes hacemos:

$$135°\left(\frac{\pi}{180°}\right)$$

Cancelando las unidades tenemos:

$$\frac{135\pi}{180}$$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

Entonces $135°$ equivale a $\frac{3\pi}{4}$ en radianes.

Ejemplo: Para convertir $\frac{3\pi}{4}$ a grados hacemos:

$$\frac{3\pi}{4}\left(\frac{180°}{\pi}\right)$$

Cancelamos π y multiplicamos:

$$\frac{540°}{4} = 135°$$

Entonces $\frac{3\pi}{4}$ equivale a $135°$ en grados.

Revisa el siguiente video:

(Gómez, 2018C)

E 4.10 Realiza las siguientes conversiones de grados a radianes.

Medida angular en grados		Medida angular en radianes
0	$0°$	
1	$30°$	
2	$60°$	
3	$90°$	
4	$120°$	
5	$150°$	
6	$180°$	
7	$210°$	
8	$240°$	
9	$270°$	
10	$300°$	
11	$330°$	
12	$360°$	

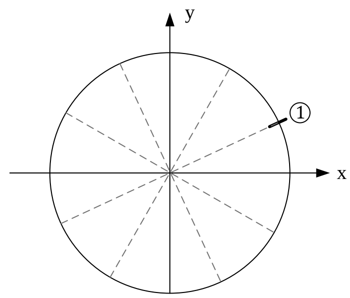
E 4.11 Realiza las siguientes conversiones de radianes a grados.

Medida angular en grados		Medida angular en radianes
1		$\frac{\pi}{6}$
2		$\frac{\pi}{3}$
3		$\frac{2\pi}{3}$
4		$\frac{5\pi}{6}$
5		$\frac{7\pi}{6}$
6		$\frac{4\pi}{3}$
7		$\frac{5\pi}{3}$
8		$\frac{11\pi}{6}$

E 4.12 Una circunferencia tiene un radio de 4 unidades. Calcula la longitud de arco cuando se genera un ángulo central de $240°$.

EJERCICIOS

E 4.13 Si queremos dividir una circunferencia en 12 partes iguales ¿Qué medida tendrían los ángulos en radianes que se generarían?



E 4.14 Para el ejercicio anterior, mide con tu transportador, la medida de cada ángulo en grados y completa la siguiente tabla.

Medida angular en radianes		Medida angular en grados
1	$\frac{\pi}{12}$	
2	$\frac{\pi}{6}$	
3	$\frac{\pi}{4}$	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

E 4.15 Realiza las siguientes conversiones de grados a radianes.

Medida angular en grados		Medida angular en radianes
1	$20°$	
2	$40°$	
3	$80°$	
4	$110°$	
5	$160°$	
6	$230°$	
7	$310°$	
8	$350°$	

E 4.16 Realiza las siguientes conversiones de radianes a grados.

Medida angular en grados		Medida angular en radianes
1		$\frac{3\pi}{4}$
2		$\frac{2\pi}{5}$
3		$\frac{7\pi}{3}$
4		$\frac{8\pi}{3}$
5		$\frac{2\pi}{7}$

E 4.17 Una circunferencia tiene un radio de 10 unidades. Calcula la longitud de arco cuando se intersecta con un ángulo de 300°.

E 4.18 Un aspersor rocía agua sobre un campo a una distancia de 20m, y rota a lo largo de $120°$. Determina el área que puede rociar el aspersor.

Nota: El área de un sector circular es:

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ Donde θ se mide en radianes

Sección 3

Tema: Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

Aprendizaje: Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cualquier ángulo.

Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, empleadas en un triángulo rectángulo, se pueden utilizar para cualquier ángulo θ arbitrario. Estas razones están definidas como:

$$Sen\theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{CO}{H}$$

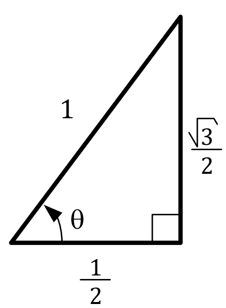
$$Cos\theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \frac{CA}{H}$$

$$Sen\theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{CO}{CA}$$

Revisa el siguiente video:

(Gómez,2018D)

Por ejemplo, si partimos de un triángulo equilátero de lado 1, y lo partimos a la mitad, nos queda el siguiente triángulo:



El valor de las razones trigonométricas es:

$$Sen\theta = \frac{CO}{H} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

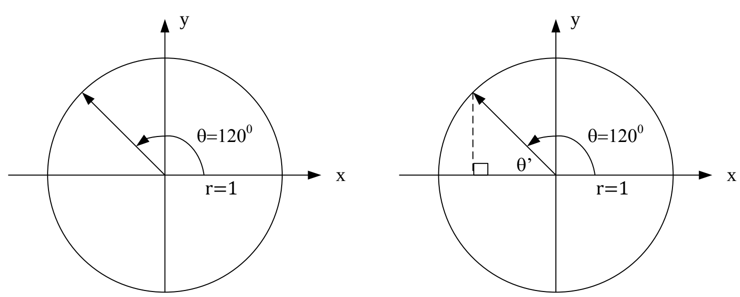
$$Cos\theta = \frac{CA}{H} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$Tan\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Como el triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero, el ángulo θ, tiene un valor de 60°. Utiliza tu calculadora científica para calcular el valor de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para un ángulo de 60°, anota tus resultados en la siguiente tabla.

$Sen\ 60° =$
$Cos\ 60° =$
$Tan\ 60° =$

Para determinar el valor de las razones trigonométricas para cualquier ángulo arbitrario (mayor a 90°) nos auxiliamos del círculo unitario.



Revisa el siguiente video:

(Susi, 2022)

Por ejemplo, si queremos determinar el valor de las razones trigonométricas para un ángulo de $120°$, como el que se muestra en la figura tenemos dos opciones. Si trazamos una línea vertical auxiliar que valla del final del radio donde se generan los $120°$ hasta que toque el eje horizontal, observamos que se genera un triángulo rectángulo cuyo valor del ángulo $\theta' = 60°$, cuyos valores son los mismos del triángulo anterior, sólo que por estar ubicado en un plano rectangular en el segundo cuadrante el valor de su base toma un valor negativo, por lo tanto, el valor de las razones trigonométricas para dicho ángulo son:

$$Sen\theta' = \frac{CO}{H} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cos\theta' = \frac{CA}{H} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$Tan\theta' = \frac{CO}{CA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

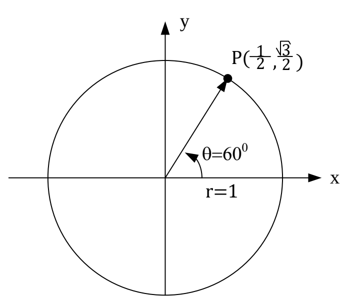
Pero como la posición del radio para un ángulo de $120°$ es equivalente a tener el ángulo θ', entonces el valor de las razones trigonométricas para un ángulo de $120°$ son:

$Sen120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Cos120° = -\frac{1}{2}$ y $Tan120° = -\sqrt{3}$

Utiliza tu calculadora científica para calcular el valor de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para un ángulo de $120°$, anota tus resultados en la siguiente tabla.

$Sen\ 120° =$
$Cos\ 120° =$
$Tan\ 120° =$

Por otro lado, si ubicamos en el circulo unitario el ángulo de $60°$, el punto $P(x, y)$ que se genera en la intersección del radio con la circunferencia tiene coordenadas $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, como se muestra en la figura.



En general para un ángulo θ, con una posición $P(x,y)$ en el lado terminal del ángulo y con radio $r = \sqrt{x^2+y^2}$, con $r \neq 0$, el valor de las razones trigonométricas se determinan como:

$$Sen\theta = \frac{y}{r}$$

$$Cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$Tan\theta = \frac{y}{x}, con\, x \neq 0$$

Como r debe ser diferente de cero, las funciones seno y coseno están definidas para cualquier valor real de θ.

Para el ángulo de 60°, el punto $P(x,y)$ tiene coordenadas $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y el valor del radio es $r = 1$, entonces el valor de las razones trigonométricas son:

$$Sen60° = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cos60° = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$Tan60° = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

E 4.19 Dadas las coordenadas $P(x,y)$ del punto terminal del lado terminal del ángulo θ y con radio $r = 1$, ubica en una circunferencia la posición del ángulo θ y determina el valor de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Calcula el valor del ángulo θ.

	$P(x,y)$
1	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2	$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3	$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4	$\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$

E 4.20 Determina el valor de las razones trigonométricas (utilizando radianes) y completa la siguiente tabla. Anota los cálculos realizados.

θ *en grados*	$0°$	$15°$		$45°$	$60°$	$75°$	
θ *en radianes*	0		$\frac{\pi}{6}$				$\frac{\pi}{2}$
$Sen\theta$							
$Cos\theta$							
$Tan\theta$							

EJERCICIOS

E 4.21 Calcula el valor de las razones trigonométricas para los siguientes ángulos:

θ	$Sen\theta$	$Cos\theta$	$Tan\theta$
$\frac{2\pi}{3}$			
$270°$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$150°$			

E 4.22 Calcula el valor de las razones trigonométricas dado el valor del punto $P(x, y)$ del lado terminal del ángulo θ y con radio $r = 2$, ubica en una circunferencia la posición del ángulo θ.

θ	$Sen\theta$	$Cos\theta$	$Tan\theta$
$(-\sqrt{3}, 1)$			
$(1, \sqrt{3})$			
$(\sqrt{3}, 1)$			
$(-1, \sqrt{3})$			

Sección 4

Tema: Funciones trigonométricas: $f(x) = sen\ x$, $f(x) = cos\ x$ Grafica, dominio, rango, ceros amplitud, periodo.

Aprendizaje: Extiende el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = sen\ x, f(x) = cos\ x.$

Si consideramos a x como una variable que representa un ángulo en radianes, al evaluar la función seno o coseno en ese número, se obtendrá un número real. Estos pueden ser representados en un plano cartesiano donde el eje de las abscisas (eje x) representará el valor de cualquier ángulo x en radianes, y el eje de las ordenadas (eje y) representará el valor que toma la función seno o coseno para cualquier ángulo x.

Revisa el siguiente video:

(Andalón, 2018)

E 4.23 Utiliza tu calculadora para evaluar las funciones seno y coseno y completa la siguiente tabla.

x $ángulo\ en\ radianes$	$f(x) = Sen(x)$	$f(x) = Cos(x)$
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{3}$		
$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{2\pi}{3}$		
$\frac{5\pi}{6}$		
π		
$\frac{7\pi}{6}$		
$\frac{4\pi}{3}$		
$\frac{3\pi}{2}$		

$\frac{5\pi}{3}$		
$\frac{11\pi}{6}$		
2π		

E 4.24 Traza los ejes cartesianos y ubica los puntos obtenidos, tanto para la función seno como la función coseno.

La función seno y coseno, están definidas en todos los números reales. Por lo tanto, su dominio son todos los números reales. Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$Dominio = \mathbb{R}$$

En la gráfica de las funciones trigonométricas, en particular para seno y coseno, se puede identificar algunas características de esta curva como amplitud, periodo.

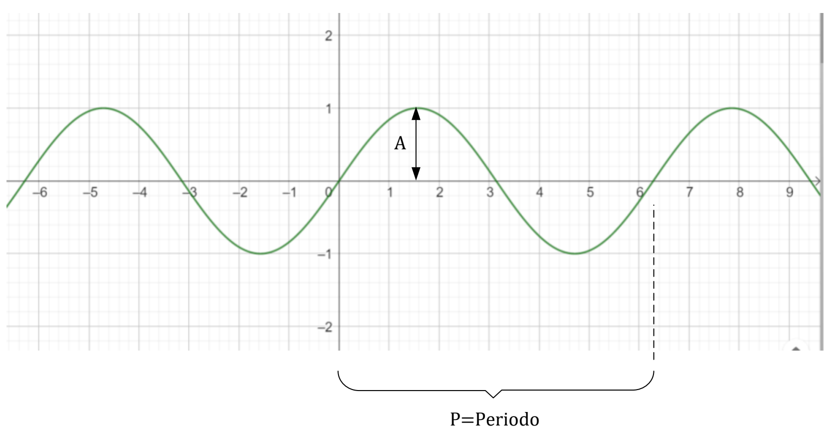
La amplitud de estas funciones representa la mitad de la distancia entre los valores máximos y mínimos de la función, y se representa como:

$$Amplitud = |A|$$

Si representamos de manera general a las funciones seno y coseno como:

$$f(x) = Asen(x) \text{ y } f(x) = ACos(x)$$

Su amplitud queda representada por el valor absoluto de A. El periodo de seno y coseno esta dado por: $P = 2\pi$. La siguiente figura muestra estas dos características de las funciones seno y coseno.



Revisa el siguiente video:

(Andalón, 2020)

E 4.25 Utiliza tu calculadora para evaluar las funciones seno y coseno, completa la siguiente tabla y traza en un mismo plano las funciones. Identifica sus características amplitud y periodo y compáralas.

x $\acute{a}ngulo\ en\ radianes$	$f(x) = 2Sen(x)$	$f(x) = 4Sen(x)$	$f(x) = -2Sen(x)$
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

EJERCICIOS

E 4.26 Utiliza tu calculadora para evaluar las funciones seno y coseno, completa la siguiente tabla y traza en un mismo plano las funciones. Identifica sus características amplitud y periodo y compáralas.

x $\acute{a}ngulo\ en\ radianes$	$f(x) = 3Cos(x)$	$f(x) = 3Sen(x)$	$f(x) = -5Cos(x)$
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

E 4.27 Utiliza GeoGebra para graficar las siguientes funciones:

1	$f(x) = 2Sen(x)$	GeoGebra
2	$f(x) = -2Sen(x)$	
3	$f(x) = 5Sen(x)$	
4	$f(x) = -5Cos(x)$	
5	$f(x) = 3Cos(x)$	
6	$f(x) = -3Cos(x)$	

Sección 5

Tema: Gráfica de las funciones: $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$, $f(x) = D + Acos(Bx + C)$. Análisis del comportamiento de la gráfica respecto de los parámetros: A, B, C y D.

Aprendizaje: Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones: $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$, $f(x) = D + Acos(Bx + C)$. D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia, y desfasamiento.

De manera general podemos representar a las funciones seno y coseno como:

$f(x) = Asen\,(Bx + C) + D$ y $f(x) = Acos(Bx + C) + D$

Donde A, B, C y D, representan los parámetros de la función, con A, B, C y $D \in \mathbb{R}$, con $B \neq 0$.

La amplitud está dada por el valor absoluto de A, En general el periodo está dado por $P = \frac{2\pi}{B}$

Funciones de la forma: $f(x) = ASen(x) + D$ o $f(x) = ACos(x) + D$

E 4.28 Utiliza tu calculadora para evaluar las funciones seno y coseno, completa la siguiente tabla y traza en un mismo plano las funciones. Identifica sus características Amplitud y periodo y compáralas.

x *ángulo en radianes*	$f(x) = 3Sen(x)$	$f(x) = 3Sen(x) + 2$	$f(x) = 3Sen(x) - 4$
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

E 4.29 Utiliza GeoGebra para graficar funciones de la forma $f(x) = ASen(x) + D$, $f(x) = ACos(x) + D$.

Con base en lo observado contesta las siguientes preguntas:

Al variar el valor de A, ¿Qué cambios se observan en la gráfica obtenida?

¿Qué pasa con la gráfica si el valor de A es negativo?

Si el valor de A es negativo ¿Cómo es el valor de la amplitud?

Al variar el valor de D, ¿Qué cambios se observan en la gráfica obtenida?

¿Qué diferencia hay en la gráfica cuando el valor de D es positivo o negativo?

¿Si el valor de D varía, el valor de la amplitud cambia?

EJERCICIOS

E 4.30 Elabora una tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su gráfica. Identifica su amplitud y periodo.

1	$f(x) = -2Sen(x) + 3$
2	$f(x) = 3Sen(x) - 4$
3	$f(x) = 5Sen(x) + 1$
4	$f(x) = -Cos(x) + 2$
5	$f(x) = 3Cos(x) - 1$
6	$f(x) = 2Cos(x) + 2$

E 4.31 Utiliza GeoGebra para graficar funciones de la forma $f(x) = ASen(x) + D$, $f(x) = ACos(x) + D$. Del inciso anterior y compara tus resultados.

GeoGebra

Continuación Sección 5

Funciones de la forma: $f(x) = ASen(Bx) + D$ o $f(x) = ACos(Bx) + D$

En las funciones donde el parámetro $B \neq 1$ y $B > 0$ el periodo de las funciones se modifica ya que el periodo está determinado por:

$$P = \frac{2\pi}{B}$$

Si el valor de B es igual a 0, el periodo de la función es siempre 2π.

Si el valor de B es mayor a 1, en periodo de la función disminuye.

SI el valor de B está entre 0 y 1, en periodo de la función aumenta.

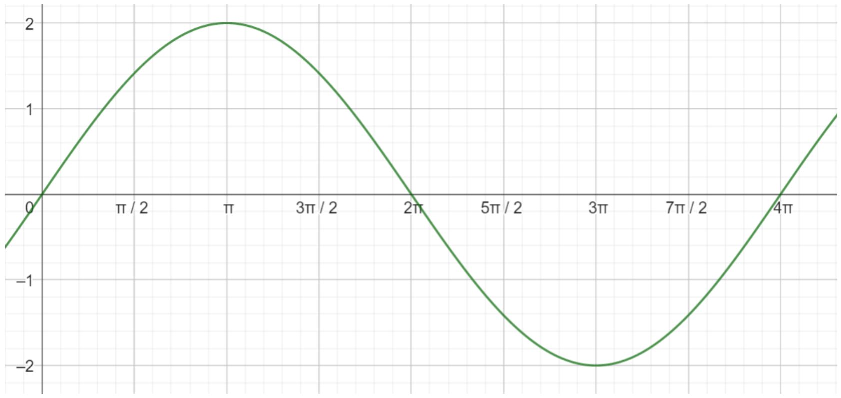
Por ejemplo, para la función $f(x) = 2Sen(0.5x)$, la amplitud es 2 y el periodo es:

$$P = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$$

Es decir, para graficar un periodo de la función, necesitaríamos graficar de 0 a 4π. Para elaborar una tabla en este intervalo, se puede adoptar ***dividir el periodo entre 12*** (un número conveniente de pasos) para poder realizar la gráfica. Así el intervalo de cada paso será $\frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$. Completa la siguiente tabla y realiza la gráfica.

	x $ángulo\ en\ radianes$	$f(x) = 2Sen(0.5x)$
1	$\frac{\pi}{3}$	
2	$\frac{2\pi}{3}$	
3	π	
4	$\frac{4\pi}{3}$	
5	$\frac{5\pi}{3}$	
6	2π	
7	$\frac{7\pi}{3}$	
8	$\frac{8\pi}{3}$	
9	3π	
10	$\frac{10\pi}{3}$	
11	$\frac{11\pi}{3}$	
12	4π	

Donde la gráfica queda de la siguiente manera:



Por tanto, para la función: $f(x) = 2Sen(0.5x)$, su amplitud, periodo, dominio y rango son:

$$|A| = 2, \qquad P = \frac{2\pi}{B} = 4\pi, \qquad Dominio = \mathbb{R},$$

El rango de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente, en este caso la función $f(x)$, esto se puede representar como sigue:

$$Rango = \{y|y \in (-2{,}2)\}$$

E 4.32 Utiliza tu calculadora para evaluar las funciones seno y coseno, completa la siguiente tabla y traza en un mismo plano las funciones. Identifica sus características Amplitud y periodo, dominio, rango y compáralas.

x $\text{ángulo en radianes}$	$f(x) = 4Sen(2x)$	$f(x) = 4Sen(2x) + 3$	$f(x) = 4Sen(2x) - 3$
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			

$\frac{5\pi}{6}$			
π			
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

E 4.33 Utiliza GeoGebra para graficar funciones de la forma $f(x) = ASen(Bx) + D$, $f(x) = ACos(Bx) + D$. Con base en lo observado contesta las siguientes preguntas:

GeoGebra

Al variar el valor de B, ¿Qué cambios se observan en la gráfica obtenida?

¿Qué pasa con la gráfica si el valor de B es mayor a 1?

¿Qué pasa con la gráfica si el valor de B está entre 0 y 1?

Si el valor de B varía, ¿el valor de la amplitud cambia?

E 4.34 Utiliza tu calculadora para evaluar las funciones seno y coseno, completa la siguiente tabla y traza en un mismo plano las funciones. Identifica sus características Amplitud y periodo, dominio, rango y compáralas.

x $\acute{a}ngulo\ en\ radianes$	$f(x) = 2Cos(0.25x)$	$f(x) = 2Cos(0.25x) - 3$	$f(x) = 2Cos(0.25x)$+3
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

Realiza la gráfica

EJERCICIOS

E 4.35 Elabora una tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su gráfica. Identifica su amplitud, periodo, dominio, rango y compáralas.

1	$f(x) = -2Sen(0.5x) - 2$
2	$f(x) = 3Sen(4x) + 1$
3	$f(x) = 5Sen(x) - 2$
4	$f(x) = -Cos(0.25x) + 2$
5	$f(x) = 3Cos(2x) - 2$
6	$f(x) = 2Cos(x) + 3$

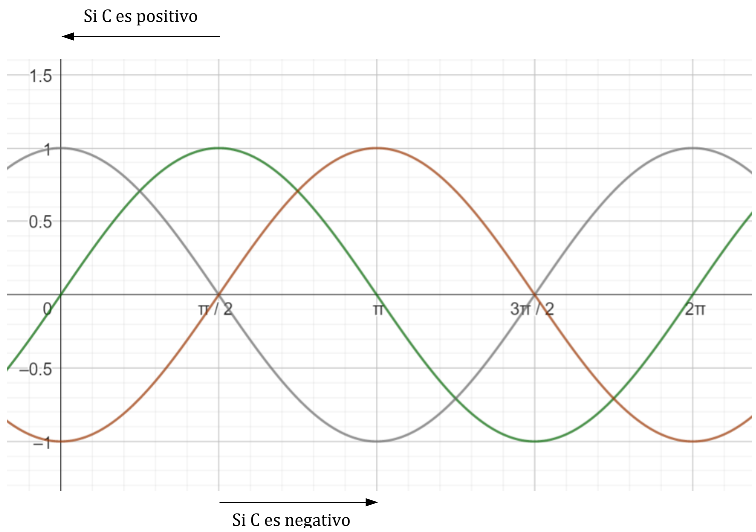
E 4.36 Utiliza GeoGebra para graficar funciones de la forma $f(x) = ASen(Bx) + D$, $f(x) = ACos(Bx) + D$. Del inciso anterior y compara tus resultados.

GeoGebra

Continuación Sección 5

Funciones de la forma: $f(x) = ASen(Bx + C) + D$ o $f(x) = ACos(Bx + C) + D$

En las funciones donde el parámetro $C \neq 0$, la gráfica sufre un desplazamiento horizontal (a la derecha o a la izquierda) dependiendo si el valor de C es positivo o negativo, como se muestra en la figura:



Para identificar en que valor de x inicia un ciclo de la función podemos hacer lo siguiente:

$$Bx + C = 0$$

$$Bx = -C$$

$$x_i = \frac{-C}{B}$$

Llamaremos x_i al valor de la variable donde inicia un ciclo de la función.

Para saber donde termina dicho ciclo, sumamos el valor del periodo P, al valor de x_i, entonces si llamamos x_f al valor de la variable donde finaliza un ciclo tenemos:

$$x_f = x_i + P$$

Así para la función $f(x) = 2Sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ tenemos que la amplitud es $|A| = 2$, el periodo es $P = 2\pi$. Ahora determinamos el valor de x donde inicia un ciclo de la función:

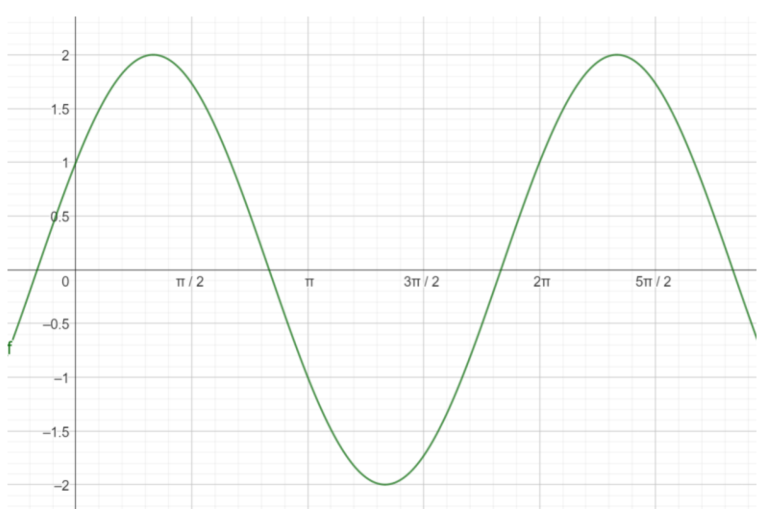
$$x_i = \frac{-C}{B} = \frac{-\frac{\pi}{6}}{1} = -\frac{\pi}{6}$$

Y el valor donde finaliza un ciclo es: $x_f = x_i + P = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$.

Para elaborar la tabla de valores se puede tomar de referencia el valor de x_i y de x_f. También para determinar los pasos de la tabla ***dividimos el periodo entre 12*** (un número conveniente de pasos) así el intervalo de cada paso será $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Así la tabla quedaría:

	x $\text{ángulo en radianes}$	$f(x) = 2Sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
1	$-\frac{\pi}{6}$	0
2	$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0$	1
3	$0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$	1.732
4	$\frac{\pi}{3}$	
5	$\frac{\pi}{2}$	
6	$\frac{2\pi}{3}$	
7	$\frac{5\pi}{6}$	
8	π	
9	$\frac{7\pi}{6}$	
10	$\frac{4\pi}{3}$	
11	$\frac{5\pi}{3}$	
12	$\frac{11\pi}{6}$	

Por lo tanto, la gráfica quedaría:



E 4.37 Utiliza tu calculadora para evaluar la siguiente función, elabora una tabla de valores e identifica sus características Amplitud y periodo, dominio, rango y grafícala.

	x $\acute{a}ngulo\ en\ radianes$	$f(x) = 3Cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Realiza la gráfica

E 4.38 Utiliza tu calculadora para evaluar la siguiente función, elabora una tabla de valores e identifica sus características Amplitud y periodo, dominio, rango y grafícala.

	x $\acute{a}ngulo\ en\ radianes$	$f(x) = -2Sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Realiza la gráfica

EJERCICIOS

E 4.39 Elabora una tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su gráfica. Identifica su Amplitud, periodo, dominio, rango.

1	$f(x) = -2Sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
2	$f(x) = -2Sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$
3	$f(x) = 3Sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
4	$f(x) = 4Cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
5	$f(x) = 4Cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$
6	$f(x) = 3Cos\left(0.5x + \frac{\pi}{3}\right)$

E 4.40 Utiliza GeoGebra para graficar funciones de la forma $f(x) = ASen(Bx + C) + D$, $f(x) = ACos(Bx + C) + D$. Del inciso anterior y compara tus resultados.

GeoGebra

Sección 6

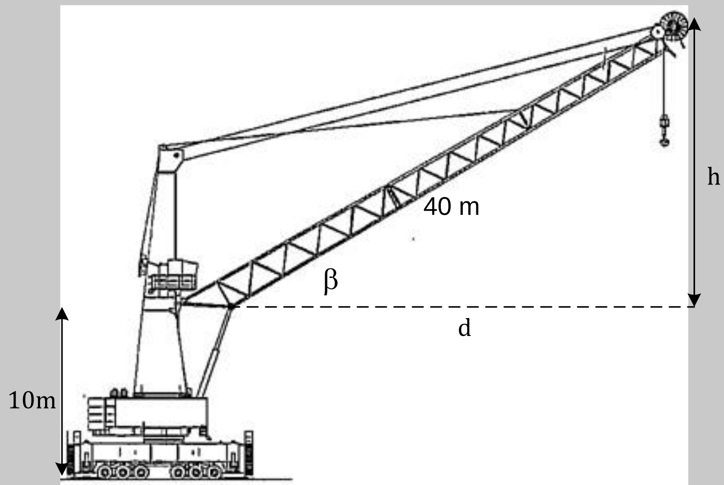
Tema: Problemas de aplicación

Aprendizaje: Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica

E 4.41 La corriente alterna $\boldsymbol{I}$, en Amperes, que fluye por un circuito de corriente alterna en un tiempo t en segundos es $I(t) = 220sen(60\pi t)$. Determina el periodo y amplitud de la función. Traza la gráfica de dos periodos.

E 4.42 El volteje en Volts producido por un generador de corriente alterna en el tiempo t en segundos es $V(t) = 220sen(120\pi t)$. ¿Cuál es la amplitud y el periodo de la función? Traza la gráfica de dos periodos.

E 4.43 Una Grúa que se emplea para construcción de edificios tiene un brazo de palanca de 40m, si el ángulo β puede variar de $0°$ a $85°$, elabora una tabla que represente la altura que puede alcanzar la grúa. Realiza su gráfica.

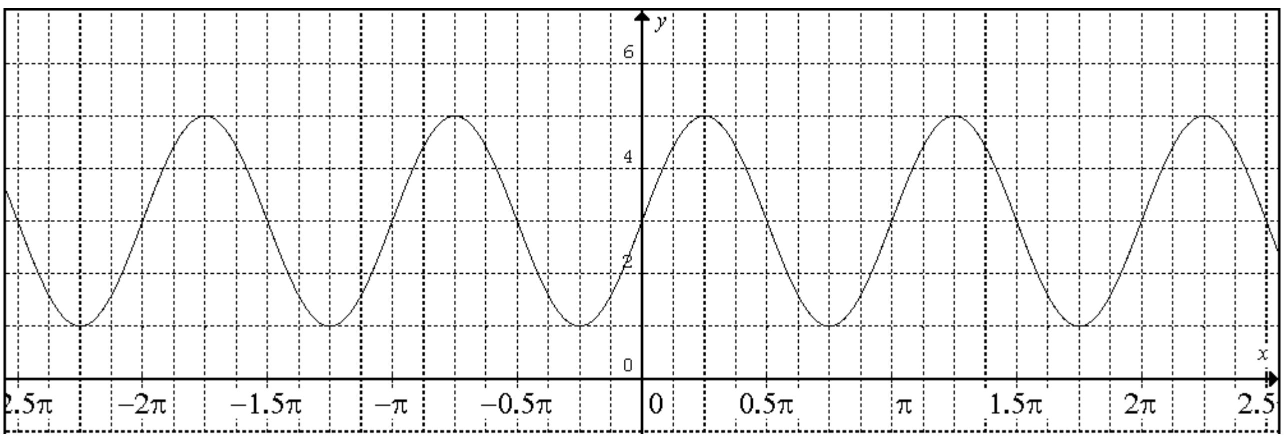


EJERCICIOS

E 4.44 La corriente alterna I, en Amperes, que fluye por un circuito de corriente alterna en un tiempo t en segundos es $\mathrm{I(t)} = 120\mathrm{sen}(60\pi\mathrm{t})$. Determina el periodo y amplitud de la función. Traza la gráfica de dos periodos.

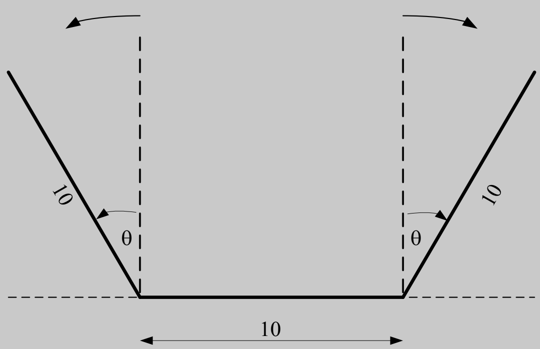
E 4.45 El volteje en Volts producido por un generador de corriente alterna en el tiempo t en segundos es $\mathrm{V(t)} = 400\mathrm{sen}(120\pi\mathrm{t})$. ¿Cuál es la amplitud y el periodo de la función? Traza la gráfica de dos periodos.

E 4.46 Para a siguiente gráfica determina la amplitud, el periodo y escribe la función que la representa:

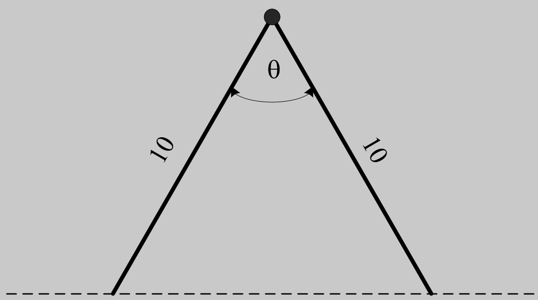


Continuación sección 6

E 4.47 Se desea hacer un canal con una sección transversal de un trapezoide isósceles como se muestra en la figura. Determina la expresión para calcular el área en función del ángulo θ. Realiza la gráfica de la función. Determina el valor de θ para el cual se tiene un área máxima.

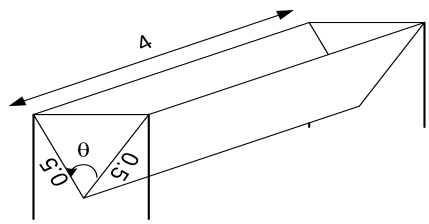


E 4.48 Se tiene dos palitos de 10 cm sujetos de un perno móvil, de tal forma que se desea construir un triángulo isósceles como se muestra en la figura. Determina la expresión para calcular el área en función del ángulo θ. Realiza la gráfica de la función. Determina el valor de θ para el cual se tiene un área máxima.

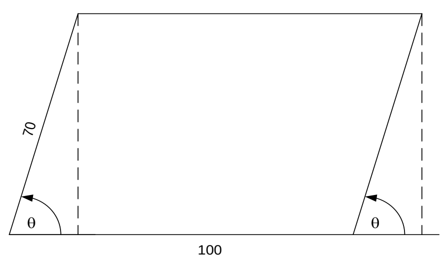


EJERCICIOS

E 4.49 Un recipiente para alimentar ganado tiene 4 metros de largo con una sección transversal en forma de triángulo isósceles como se muestra en la figura. Escribe la expresión que representa el volumen en función del ángulo. Realiza la gráfica y determina para que ángulo se tendrá el volumen máximo.



E 4.50 Se desea diseñar un estacionamiento en forma de trapecio donde uno de sus lados mide 100 m y el otro 70 m como se muestra en la figura. Escribe la expresión que representa el área del terreno en función del ángulo. Realiza la gráfica y determina para qué valor del ángulo se tiene el área máxima del terreno.



Continuación sección 6

E 4.51 Si la siguiente función h=50+50sen(8πt) representa la altura que tiene de una canasta en la rueda de la fortuna, con t en minutos. Realiza la gráfica de la función y determina ¿cuál es la altura máxima y mínima que puede alcanzar una canasta? ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta la canasta? Si una canasta inicia desde la posición más baja ¿qué altura alcanza después de 30 segundos?

E 4.52 Para una persona en reposo la velocidad v (en litros por segundo) de flujo del aire durante un ciclo respiratorio esta dado por $v = 0.85sen\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, donde t es el tiempo en segundos. Determina el tiempo para un ciclo respiratorio. Encuentra el número de ciclos por minuto y realiza la gráfica de la velocidad.

E 4.53 EL consumo de combustible C Diesel en una granja esta dado por la función:

$C = 30.3 + 21.6sen\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$ donde C se mide en galones y t es el tiempo en días. Si consideramos que $t = 1$ representa el primero de enero, determina el periodo de la función. ¿Cuál es el consumo de combustible diario? Realiza la gráfica de C.

EJERCICIOS

E 4.54 Se construye una rueda de la fortuna de tal manera que la altura h sobre el suelo de una canasta en un tiempo determinado t esta dado por el modelo: $h = 50 + 50sen\left(\frac{\pi t}{10} - \frac{\pi}{2}\right)$. Determina la amplitud y periodo. Realiza la gráfica que represente el jiro de una vuelta completa de la rueda de la fortuna.

E 4.55 La distancia horizontal recorrida por un proyectil esta dado por $d = \frac{v^2}{9.81} sen(2\emptyset)$, donde d es la distancia horizontal recorrida por el proyectil, v es la velocidad inicial en metros por segundo y Ø es el ángulo con el que se lanza el proyectil. Si una pelota de golf es golpeada y sale a una velocidad inicial de 120 m/s, determina la distancia horizontal que recorre si la pelota es golpeada con un ángulo de salida de $\emptyset = 30°$, $\emptyset = 45°$ y $\emptyset = 60°$. Para que valor de Ø se alcanza la distancia máxima. Revisa el siguiente video:

(Paredes, 2021)

E 4.56 La tabla siguiente muestra la temperatura registrada en un año en una cierta ciudad. (0 – representa enero). Obtén un modelo que represente los datos. Utiliza el modelo para responder lo siguiente: ¿Que temperatura habrá en el mes de mayo del siguiente año? ¿En qué tiempo alcanza una temperatura de $85°$? ¿Cuándo de obtiene la temperatura máxima y mínima? Grafica tu modelo.

T (meses)	$Temperatura\ en\ °$
0	78.1
1	87.8
2	98.9
3	104.1
4	101.8
5	93.8
6	80.8
7	66.0
8	57.3
9	57.1
10	63.0
11	69.5

E 4.57 La altura de una hélice de un generador eólico, se describe de acuerdo con la función: $h(t) = 100 + 20sen(\pi t - \pi/2)$, donde h es la altura de la punta de una de las hélices en metros y t es el tiempo en segundos. A)¿Cuánto tiempo tarda una hélice en dar una vuelta completa? ¿Qué altura tiene la hélice en su punto más bajo con respecto al suelo? ¿Qué altura tiene la hélice en su punto más alto con respecto al suelo? ¿Qué representa la amplitud con relación generador? Elabora la gráfica de 3 ciclos de la función.

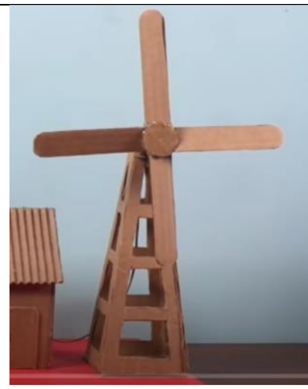
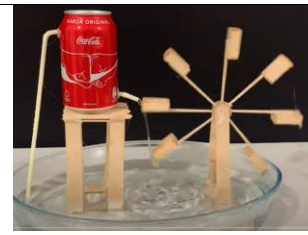
EJERCICIOS

E 4.58 La tabla siguiente muestra la temperatura registrada en un año en una cierta ciudad. (0 – representa enero). Obtén un modelo que represente los datos. Utiliza el modelo para responder lo siguiente: ¿Que temperatura habrá en el mes de mayo del siguiente año? ¿En qué tiempo alcanza una temperatura de $85°$? ¿Cuándo de obtiene la temperatura máxima y mínima? Grafica tu modelo.

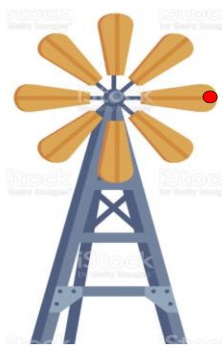
T (meses)	$Temperatura\ °$
0	13.8
1	22.4
2	34.9
3	51.5
4	66.6
5	74.2
6	78.6
7	76.3
8	64.7
9	51.7
10	32.5
11	18.1

E 4.59 La variación de temperatura en grados centígrados en una cierta ciudad de Canadá, esta dada por la función $T = 16sen\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + 5$, donde t representa el tiempo en meses. Si t=1 representa el primero de enero, realiza la gráfica que represente un año de la variación de la temperatura. ¿Cuál es la temperatura máxima y mínima y en qué mes se obtiene?

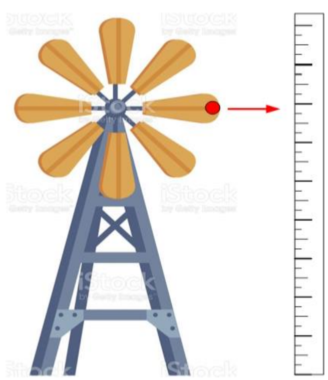
E 4.60 Construye un molino de viento de cartón, de preferencia que la altura sea mayor a 30 cm. O un molino de agua de cartón a plástico, de unos 30 cm de alto. Para cualquiera de las dos opciones, busca videos que te den ideas para la construcción del molino.

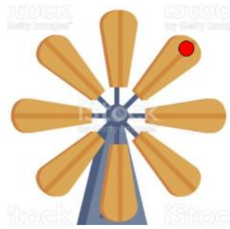
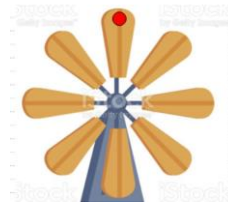
1.- Selecciona una de las hélices del molino (Cualquiera) y coloca una marca en el centro:



2.- Con ayuda de una regla mide la altura del punto, con relación al suelo.



4. Realiza la medición de la altura para diferentes posiciones del punto (gira la hélice del molino) hasta completar una vuelta de la rueda (al menos 12 posiciones). Registra tus mediciones en una tabla.

4.- Piensa en lo siguiente. Si se desea realizar una gráfica que represente la altura h, del punto marcado en el molino **¿Cuál sería la otra variable involucrada? Y ¿cómo la obtendrías?**

¿?	Altura h

5.- Realiza la gráfica de tus datos, en una hoja milimétrica

6.- Obtén el modelo matemático que representa la altura de una de las aspas del molino

7.- Realiza la gráfica y compárala con los datos obtenidos

8.- Con ayuda del software obtén un modelo que represente los datos obtenidos y compáralos

EJERCICIOS

E 4.61 El cambio de luces de un semáforo, ¿es un fenómeno periódico? Describe dicho hecho e identifica si se trata o no de una situación periódica, en caso de que silo sea, identifica su periodo.

E 4.62 La respiración del ser humano. ¿Es un fenómeno periódico? Describe dicho hecho e identifica si se trata o no de una situación periódica, en caso de que silo sea, identifica su periodo.

E 4.63 Convierte las siguientes medidas angulares en grados o radianes según corresponda.

Medida angular en radianes		Medida angular en grados
1	$\frac{13\pi}{6}$	
2	$\frac{10\pi}{3}$	
3	$\frac{7\pi}{2}$	
4		$330°$
5		$420°$
6		$75°$

E 4.64 Determina el valor de las razones trigonométricas (utilizando radianes) y completa la siguiente tabla. Anota los cálculos realizados.

θ *en grados*	$0°$	$30°$		$90°$	$120°$	$150°$	
θ *en radianes*	0		$\frac{\pi}{3}$				2π
$Sen\theta$							
$Cos\theta$							
$Tan\theta$							

E 4.65 Elabora una tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su gráfica. Identifica su Amplitud, periodo, dominio, rango.

1	$f(x) = 5Sen(x) - 2$
2	$f(x) = 3Cos(2x)$
3	$f(x) = 4Sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
4	$f(x) = -2Cos(0.25x) + 4$
5	$f(x) = 6Sen\left(0.5x + \frac{\pi}{2}\right) - 3$

E 4.66 La corriente alterna $\boldsymbol{I}$, en Amperes, que fluye por un circuito de corriente alterna en un tiempo t en segundos es $I(t) = 120sen(60\pi t)$. Determina el periodo y amplitud de la función. Traza la gráfica de dos periodos.

E 4.67 La función $h = 40 + 30sen(2t)$ representa la altura que tiene de una canasta en la rueda de la fortuna, con t en segundos. Realiza la gráfica de la función y determina ¿cuál es la altura máxima y mínima que puede alcanzar una canasta? ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta la canasta?

E 4.68 La tabla siguiente muestra la temperatura registrada en un año en una cierta ciudad. (0 – representa enero). Obtén un modelo que represente los datos. Utiliza el modelo para responder lo siguiente: ¿Que temperatura habrá en el mes de mayo del siguiente año? ¿En qué tiempo alcanza una temperatura de $85°$? ¿Cuándo de obtiene la temperatura máxima y mínima? Grafica tu modelo.

T (meses)	$Temperatura\ °$
0	-0.49
1	1.75
2	6.29
3	7.1
4	4
5	-2.05
6	-9
7	-14.7
8	-17.29
9	-15.7
10	-10.7
11	-3.8
12	2.7

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

NOTA: Resuelve los siguientes problemas indicando todas las operaciones necesarias.

E 4.69 Un aspersor colocado en el Estadio Azteca, rocía agua a una distancia de 30m, y rota a lo largo de $150°$. Determina el área que puede rociar el aspersor.

E 4.70 Determina el valor de las razones trigonométricas (utilizando radianes) y completa la siguiente tabla. Anota los cálculos realizados.

θ *en grados*	$45°$	$120°$	
θ *en radianes*			$\frac{11\pi}{3}$
$Sen\theta$			
$Cos\theta$			
$Tan\theta$			

E 4.71 Elabora una tabla de valores para las siguientes funciones y realiza su gráfica. Identifica su Amplitud, periodo, dominio, rango.

1	$f(x) = -4Cos(x) + 2$
2	$f(x) = Sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

E 4.72 La función $h = 50 + 35sen(4t)$ representa la altura que tiene de una canasta en la rueda de la fortuna, con t en minutos. Realiza la gráfica de la función y determina ¿cuál es la altura máxima y mínima que puede alcanzar una canasta? ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta la canasta?

RÚBRICA

CURSO:	MATEMÁTICAS IV			
UNIDAD 4:	**Funciones trigonométricas**			
OBJETIVO:	Evaluar los aprendizajes correspondientes al tema de funciones trigonométricas			
Porcentaje:	100			
Criterios	**Excelente**	**Bueno**	**Regular**	**Total**
Circunferencia				
Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.	Identifica correctamente cuando un fenómeno o situación corresponde a una variación periódica. **Puntos: 10**	Identifica parcialmente cuando un fenómeno o situación corresponde a una variación periódica. **Puntos: 8**	No identifica en su totalidad cuando un fenómeno corresponde a una variación periódica. **Puntos: 5**	
Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.	Realiza correctamente la conversión de medidas angulares de grados a radianes y viceversa. **Puntos: 10**	Realiza parcialmente la conversión de medidas angulares de grados a radianes y viceversa. **Puntos: 8**	Realiza la conversión de medidas angulares de grados a radianes y viceversa, presentando errores. **Puntos: 5**	
Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.	Entiende de manera correcta que las razones trigonométricas se emplean para ángulos arbitrarios. **Puntos: 10**	Entiende parcialmente que las razones trigonométricas se emplean para ángulos arbitrarios. **Puntos: 8**	No entiende en su totalidad que las razones trigonométricas se emplean para ángulos arbitrarios. **Puntos: 5**	
Extiende el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = sen\, x,\ f(x) = cos\, x$	Comprende el concepto de función trigonométrica y grafica correctamente las funciones $f(x) = sen\, x, f(x) = cos\, x$ **Puntos: 10**	Comprende el concepto de función trigonométrica, presenta algunos errores para grafica las funciones $f(x) = sen\, x, f(x) = cos\, x$ **Puntos: 8**	No comprende el concepto de función trigonométrica, presenta errores para grafica las funciones $f(x) = sen\, x, f(x) = cos\, x$ **Puntos: 5**	
Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones: $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$ $f(x) = D + Acos\,(Bx + C)$. D desplazamiento vertical, A amplitud, B	Grafica correctamente funciones de la forma $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$ $f(x) = D + Acos\,(Bx + C)$. **Puntos: 10** Analiza e identifica correctamente los parámetros que aparecen en las funciones trigonométricas. **Puntos: 10** Identifica el desplazamiento vertical, la amplitud, la frecuencia y el	Grafica parcialmente las funciones de la forma $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$ $f(x) = D + Acos\,(Bx + C)$. **Puntos:8** Analiza e identifica parcialmente los parámetros que aparecen en las funciones trigonométricas. **Puntos: 8**	Presenta errores al graficar las funciones de la forma $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$ $f(x) = D + Acos\,(Bx + C)$. **Puntos:5** Presenta errores al identifica los parámetros que aparecen en las funciones trigonométricas.	

frecuencia, y desfasamiento.	desfasamiento de acuerdo con los parámetros de la función. **Puntos: 10**	Identifica parcialmente el desplazamiento vertical, la amplitud, la frecuencia y el desfasamiento de acuerdo con los parámetros de la función. **Puntos: 8**	**Puntos: 5** Presenta errores al identifica el desplazamiento vertical, la amplitud, la frecuencia y el desfasamiento de acuerdo con los parámetros de la función. **Puntos: 5**	
Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica	Emplea correctamente las funciones trigonométricas para entender y resolver un problema. **Puntos: 10** Modela correctamente una situación o fenómeno de variación periódica empleando las funciones trigonométricas. **Puntos: 20**	Emplea correctamente las funciones trigonométricas para entender y resolver un problema. **Puntos: 8** Modela correctamente una situación o fenómeno de variación periódica empleando las funciones trigonométricas. **Puntos: 15**	Presenta errores al utilizar las funciones trigonométricas para entender y resolver un problema. **Puntos: 5** Presenta errores al modela correctamente una situación o fenómeno de variación periódica empleando las funciones trigonométricas. **Puntos: 10**	
			Total:	

BIBLIOGRAFÍA PARA LA UNIDAD

Para el alumno:

Ayres, F. (1970). *Trigonometría Plana y Esférica*. Mc Graw–Hill/ Interamericana de México.

Larson, R. (2012) *Trigonometría*. Cengage Learning.

Leithold, L. (1999). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Oxfod University Press. Niles, N. (s.f). *Trigonometría plana*. Limusa Noriega.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Cengage Learning.

Para el profesor:

De Oteysa, E. (2007). Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica. Pearson educación.

Larson, R. (2012). Precálculo. Cengage, Learning.

Swokowski, E., Cole, J. (2013). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage Learning.

Steward, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). Precálculo, Matemáticas para el cálculo. Cengage, Learning.

Sullivan, M. (2006). Álgebra y trigonometría. Pearson educación.

Referencias

Andalón, J. (2018). Grafica de la función seno [video]. https://www.youtube.com/watch?v=ATcTctC1Ei4

Andalón, J. (2020). Gráfica, amplitud, periodo y más de la función seno, coseno, tangente [video]. https://www.youtube.com/watch?v=VFSP4iNroQA

Gómez, A. (2018A). Que es un Radián [video]. https://www.youtube.com/watch?v=L5GNg9a_gSc

Gómez, A. (2018B). Convertir Radianes a Grados [video]. https://www.youtube.com/watch?v=nKSylFrOzRw&list=PLeySRPnY35dF1AI1j1G-0U8P-xvmTUn1V&index=3

Gómez, A. (2018C). Convertir grados a radianes Ejemplo 1 [video]. https://www.youtube.com/watch?v=seR9VVW4DaI&list=PLeySRPnY35dF1AI1j1G-0U8P-xvmTUn1V&index=2

Gómez, A. (2018D). Cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa. Ubicar correctamente [video]. https://www.youtube.com/watch?v=FUMlQtJfrHo&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=1

Paredes, P. (2021). Modelización fenómenos periódicos – ejemplo [video]. https://www.youtube.com/watch?v=wbXfI7SSKX8

Nerea, J. (2019). Historia de la trigonometría y sus aplicaciones [video]. https://www.youtube.com/watch?v=X8y2EoY9Tiw

Susi, P. (2022). Razones TRIGONOMÉTRICAS de Cualquier Ángulo, con Circunferencia GONIOMÉTRICA [video]. https://www.youtube.com/watch?v=bTCc8fQl-s0&list=PLiWRH3aE37VLRV7FAP2A0l8ZdLMoD-Ood&index=10&t=699s