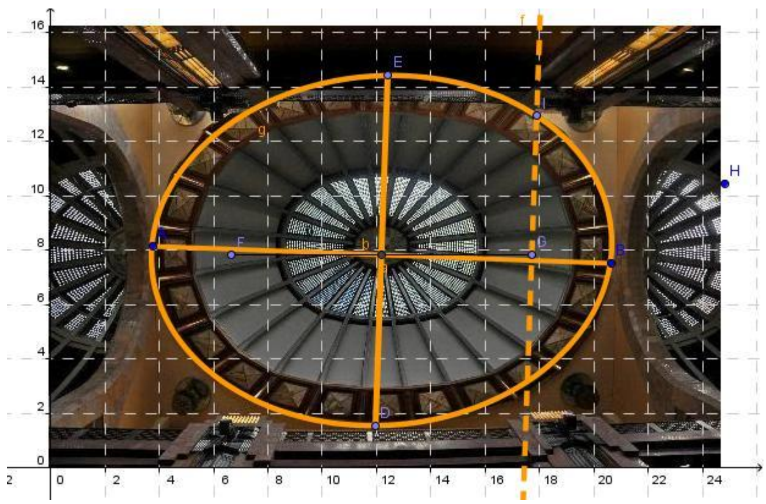
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
Plantel Sur

M A T E M Á T I C A S - III

Programa de Estudios Actualizado

Cuaderno de Trabajo



Profesora: NORA JUDITH RODRÍGUEZ MARTÍNEZ

Nombre del alumno:

Grupo:

Agosto 2017

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL SUR

TEMARIO

Unidad 1. Elementos de trigonometría.

Unidad 2. Elementos Básicos de Geometría Analítica.

Unidad 3. La Recta y su Ecuación Cartesiana.

Unidad 4. La Parábola y su Ecuación Cartesiana.

Unidad 5. La Circunferencia, la Elipse y sus Ecuaciones Cartesianas.

Fechas de Exámenes

Unidad 1-

Unidad 2-

Unidad 3-

Unidad 4-

Unidad 5-

Este texto fue elaborado, tomando como base los textos publicados por el Colegio de Ciencias y Humanidades y de otras instituciones, con el fin de apoyar a los alumnos del curso de Matemáticas III, dicho material esta sujeto a las observaciones y correcciones de especialistas en el área.

Índice general

Capítulo 1

Repaso

1.1. Ecuaciones de primer grado

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} 5x-2 &= 8 \\ 5x &= 8+2 \\ 5x &= 10 \\ x &= \tfrac{10}{5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$4x + 10 = 1 - 2x$

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{4}{3}x &= 3 \\ (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{4}{3}x &= 3)6 \\ 3x + 8x &= 18 \\ 11x &= 18 \\ x &= \tfrac{18}{11} \end{aligned}$$

Ejemplo 4:

$\frac{x-4}{8} - \frac{5-2x}{3} = 1$

Ejemplo 5: $\frac{2}{7}(2x+1) - \frac{3}{5}(x-2) = 1$

Ejercicio 1.1:

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado.

a) $\frac{x+2}{9} - \frac{x-8}{3} = 3$

1.2. Ecuaciones de segundo grado

1.2.1. Solución por Fórmula General

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Discriminante

$b^2 - 4ac > 0$ Dos soluciones reales diferentes

$b^2 - 4ac = 0$ Tiene dos soluciones reales iguales

$b^2 - 4ac < 0$ Las soluciones son complejas, no reales

Ejemplo 1: Resolver por fórmula general.

$x^2 - 9x - 112 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

a=1 b=-9 c=-112

$$\begin{aligned} \text{Discriminante } b^2 - 4ac &= (-9)^2 - 4(1)(-112) \\ &= 81 - 4(-112) \\ &= 81+448 \\ &529 > 0 \text{ Tiene 2 soluciones reales} \end{aligned}$$

$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2-4(1)(-112)}}{2(1)}$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-4(-112)}}{2}$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{81+448}}{2}$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{529}}{2}$

$$x_1 = \frac{9 \pm 23}{2} \nearrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{9+23}{2} \\ x &= \frac{32}{2} \\ x_1 &= 16 \end{aligned}$$

$$\searrow \quad \begin{aligned} x_2 &= \frac{9-23}{2} \\ x_2 &= \frac{-14}{2} \\ x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Ejercicios 1.2 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $x^2 + 9x - 112 = 0$

b) $x^2 - 18x + 81 = 0$

c) $x^2 - 3x - 10 = 0$

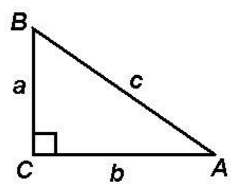
Capítulo 2

Unidad 1 - Elementos de Trigonometría

2.1. Razones Trigonométricas Directas y Recíprocas referidas a un ángulo agudo.

Un **triángulo rectángulo**, es aquel que tiene un ángulo interior recto; el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** del triángulo. Los dos ángulos restantes son ángulos agudos complementarios, y a los lados opuestos a estos ángulos se les llaman catetos del triángulo.

Comúnmente se distinguen los ángulos del triángulo con letras mayúsculas. Los lados del triángulo se distinguen con letras minúsculas correspondientes a la letra del ángulo opuesto al lado.

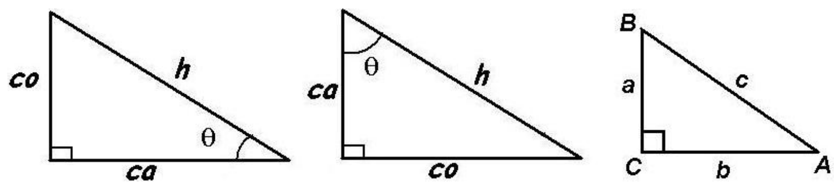


Razón: La razón de un número p con otro número q distinto de cero, es la relación que existe entre estos dos números.

Razones Trigonométricas: Son las razones que existen entre las longitudes de dos de los lados de un triángulo rectángulo y cambian al variar el ángulo de que se trate, es decir las razones dependen del ángulo agudo correpondiente.

Las seis razones trigonométricas posibles que se pueden determinar para cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, son: **seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante** y se expresan en forma abreviada como: **sen, cos, tan, cot sec y csc** respectivamente.

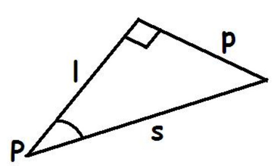
El seno,coseno y tangente se conocen como **razones trigonométricas directas** mientras que la cosecante, secante y cotangente, se conocen como **razones trigonométricas recíprocas.**



seno θ=	seno A=	seno B=
coseno θ=	coseno A=	coseno B=
tangente θ=	tangente A=	tangente B=
cotangente θ=	cotangente A=	cotangente B=
secante θ=	secante A=	secante B=
cosecante θ=	cosecante A=	cosecante B=

Ejercicio 2.1:

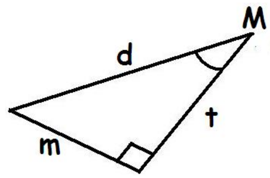
1. Indica en los siguientes triángulos rectángulos la hipotenusa (h), el cateto opuesto (co) y el cateto adyacente (ca), respecto al ángulo agudo indicado y las identidades trigonométricas correspondientes.



a) co= ca= h=

Sen P= Cos P= Tan P=

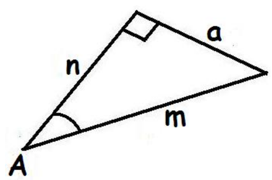
Csc P= Sec P= Cot P=



b) co= ca= h=

Sen M= Cos M= Tan M=

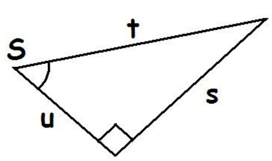
Csc M= Sec M= Cot M=



c) co= ca= h=

Sen A= Cos A= Tan A=

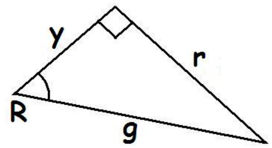
Csc A= Sec A= Cot A=



d) co= ca= h=

Sen S= Cos S= Tan S=

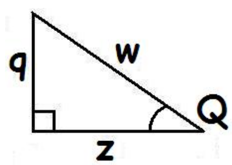
Csc S= Sec S= Cot S=



e) co= ca= h=

Sen R= Cos R= Tan R=

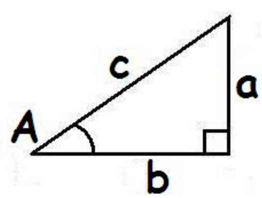
Csc R= Sec R= Cot R=



f) co= ca= h=

Sen Q= Cos Q= Tan Q=

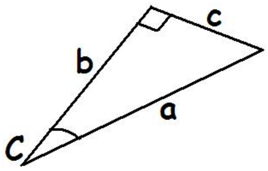
Cos Q= Sec Q= Cot Q=



g) co= ca= h=

Sen A= Cos A= Tan A=

Csc A= Sec A= Cot A=

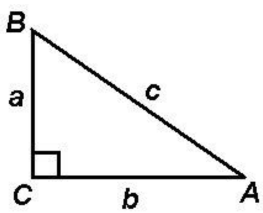


h) co= ca= h=

Sen C= Cos C= Tan C=

Csc C= Sec C= Cot C=

2. Considerando la figura y la información que se te proporciona, determina las razones trigonométricas de los ángulos A y B si los lados del triángulo son:



a=6m b=8m c=10m

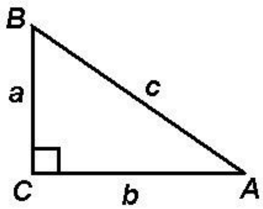
Sen A= Cos A= Tan A=

a)

Csc A= Sec A= Cot A=

Sen B= Cos B= Tan B=

Csc B= Sec B= Cot B=



a=3cm b=4cm c=5cm

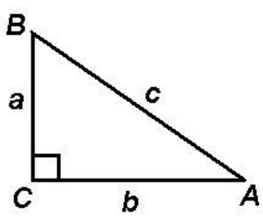
Sen A= Cos A= Tan A=

b)

Csc A= Sec A= Cot A=

Sen B= Cos B= Tan B=

Csc B= Sec B= Cot B=



a=9cm b=12cm c=15cm

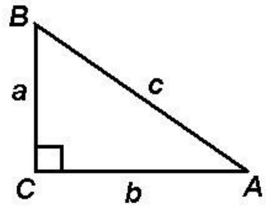
Sen A= Cos A= Tan A=

c)

Csc A= Sec A= Cot A=

Sen B= Cos B= Tan B=

Csc B= Sec B= Cot B=



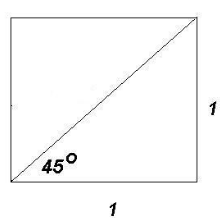
a=5cm	b=7cm	c=$\sqrt{74}cm$
Sen A=	Cos A=	Tan A=

d)

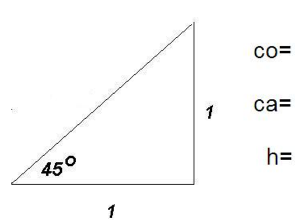
Csc A=	Sec A=	Cot A=
Sen B=	Cos B=	Tan B=
Csc B=	Sec B=	Cot B=

2.2. Razones trigonométricas de los ángulos de 45^o, 30^o y 60^o.

Para determinar las medidas de las seis razones trigonométricas para un ángulo de 45^o, si trazamos el dibujo de un cuadrado de lado 1, y trazamos su diagonal obtenemos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 45^o. Como el otro ángulo agudo es complementario a 45^o, lo que hace de este triángulo un triángulo isósceles (que tiene dos lados iguales), por lo tanto los dos catetos del triángulo miden 1 unidad de longitud.

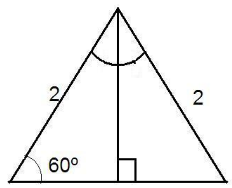


Para determinar la medida de la hipotenusa utilizamos el teorema de pitágoras.

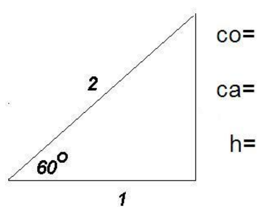


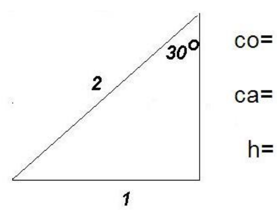
Para determinar las medidas de las seis razones trigonométricas para los ángulos de 30^o y de 60^o.

Para tener un triángulo con ángulos de 30^o y 60^o, se necesita empezar con un triángulo equilátero (que tiene todos los lados iguales) en donde cada lado mide 2 unidades de longitud.



Las medianas de uno de los vértices a el lado opuesto separa el triángulo en dos triángulos rectángulos con los ángulos agudos que se desean tener. La longitud de la altura del triángulo se puede determinar con el teorema de pitágoras.



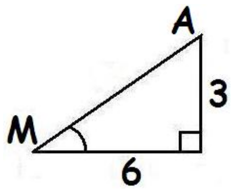


Los valores de las razones trigonométricas en los ángulos de 45^o, 30^o y 60^o son:

Razón	30^o	45^o	60^o
seno θ=			
coseno θ=			
tangente θ=			
cotangente θ=			
secante θ=			
cosecante θ=			

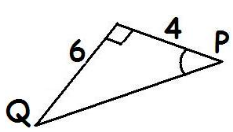
Ejercicio 2.2:

1. Determina las seis razones trigonométricas correspondientes a los ángulos agudos señalados, y las medidas de los ángulos del triángulo.

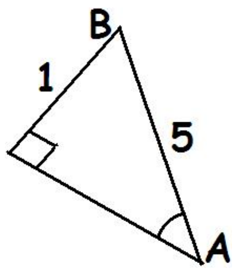
   a)

co=	ca=	h=	
Sen M=	Cos M=	Tan M=	$\angle A =$
Csc M=	Sec M=	Cot M=	$\angle M =$

   b)

co=	ca=	h=	
Sen P=	Cos P=	Tan P=	$\angle P =$
Csc P=	Sec P=	Cot P=	$\angle Q =$

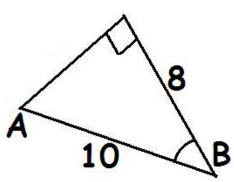


$c)$

co= ca= h=

Sen A= Cos A= Tan A= $\angle A =$

Csc A= Sec A= Cot A= $\angle B =$

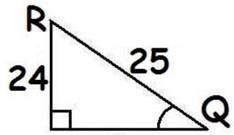


$d)$

co= ca= h=

Sen B= Cos B= Tan B= $\angle A =$

Csc B= Sec B= Cot B= $\angle B =$

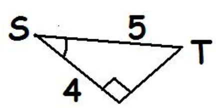


e)

co= ca= h=

Sen Q= Cos Q= Tan Q= $\angle Q =$

Csc Q= Sec Q= Cot Q= $\angle R =$

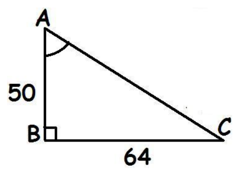


f)

co= ca= h=

Sen S= Cos S= Tan S= $\angle S =$

Csc S= Sec S= Cot S= $\angle T =$

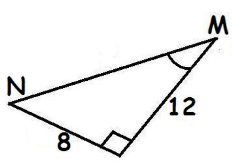


g)

co= ca= h=

Sen A= Cos A= Tan A= $\angle A =$

Csc A= Sec A= Cot A= $\angle C =$



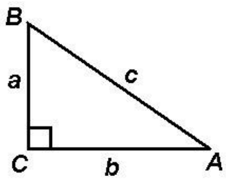
h)

co= ca= h=

Sen M= Cos M= Tan M= $\angle M =$

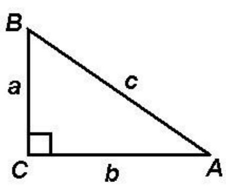
Csc M= Sec M= Cot M= $\angle N =$

2. Determina la longitud del lado faltante y las seis razones trigonométricas de los ángulos A y B.



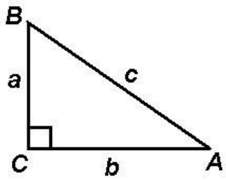
a) Sen A=$\frac{4}{5}$

Sen A=	Cos A=	Tan A=
Csc A=	Sec A=	Cot A=
Sen B=	Cos B=	Tan B=
Csc B=	Sec B=	Cot B=



b) Cot A=$\frac{5}{8}$

Sen A=	Cos A=	Tan A=
Csc A=	Sec A=	Cot A=
Sen B=	Cos B=	Tan B=
Csc B=	Sec B=	Cot B=



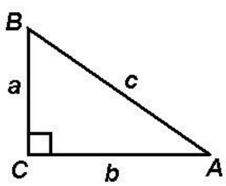
c) Cos B=$\frac{1}{3}$

Sen A= Cos A= Tan A=

Csc A= Sec A= Cot A=

Sen B= Cos B= Tan B=

Csc B= Sec B= Cot B=



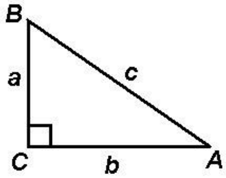
d) Csc B=$\frac{6}{4}$

Sen A= Cos A= Tan A=

Csc A= Sec A= Cot A=

Sen B= Cos B= Tan B=

Csc B= Sec B= Cot B=



e) Tan A=$\frac{3}{7}$

Sen A= Cos A= Tan A=

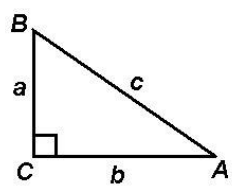
Csc A= Sec A= Cot A=

Sen B= Cos B= Tan B=

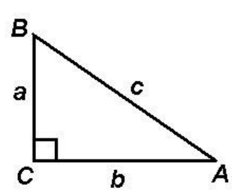
Csc B= Sec B= Cot B=

3. Considerando la figura:

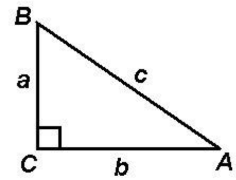
a) a= 12cm y b= 8cm, Determina las medidas de c, A y B.



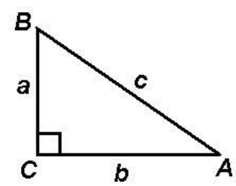
b) a= 25m y b= 10m, Determina las medidas de c, A y B.



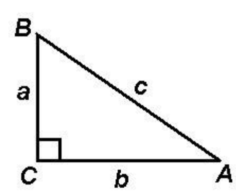
c) b= 15cm y c= 20cm, Determina las medidas de a, A y B.



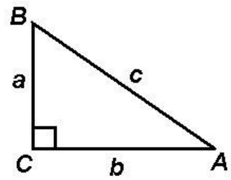
d) a= 34.16m y b= 47.39m, Determina las medidas de c, A y B.



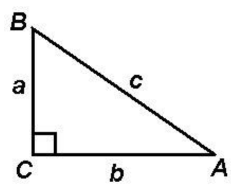
e) a= 24.5cm y b= 34.8cm, Determina las medidas de c, A y B.



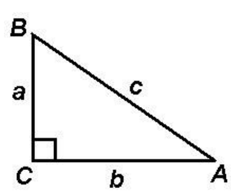
f) a= 48u y c= 54u, Determina las medidas de b, A y B.



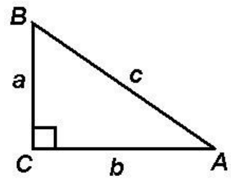
g) a= 33u y c= 40u, Determina las medidas de b, A y B.



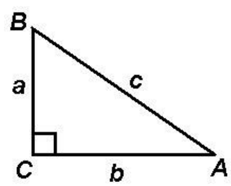
h) b= 224cm y c=325cm, Determina las medidas de a, A y B.



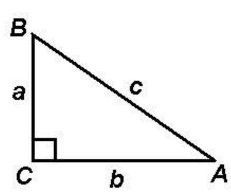
$i)$ a= 12cm, $B = 42^o$, Determina las medidas de b, c y A.



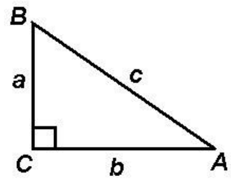
$j)$ c= 45cm y $A = 35^o$, Determina las medidas de a, b, y B.



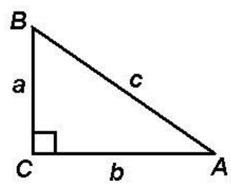
$k)$ c= 74.5cm y $A = 35^o$, Determina las medidas de a, b, y B.



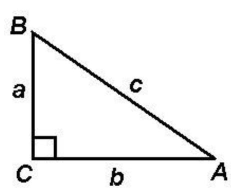
l) a= 12m, $B = 42^o$, Determina las medidas de b, c y A.



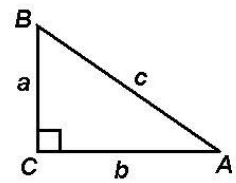
m) a= 1.4m, $B = 37^o$, Determina las medidas de b, c y A.



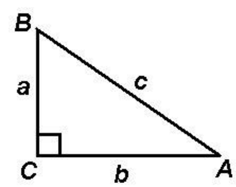
n) a= 22cm, $B = 22^o$, Determina las medidas de b, c y A.



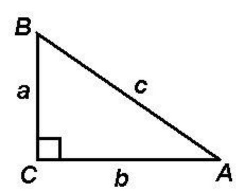
$\tilde{n})$ b= 20cm, $A = 32.25^o$, Determina las medidas de a, c y B.



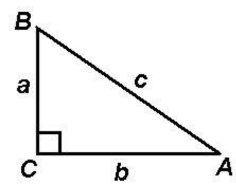
$o)$ c= 12m, $B = 40^o$, Determina las medidas de a, b y A.



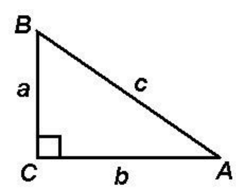
$p)$ c= 45m, $A = 35^o$, Determina las medidas de a, b y B.



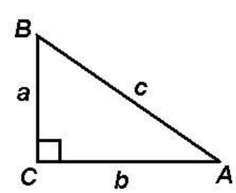
$q)$ c= 30.95cm, $B = 40.05^o$, Determina las medidas de a, b y A.



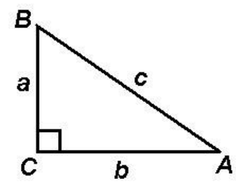
$r)$ a= 17cm, $A = 39.43^o$, Determina las medidas de b, c y B.



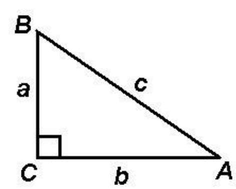
$s)$ b= 47m, $B = 54.05^o$, Determina las medidas de a, c y A.



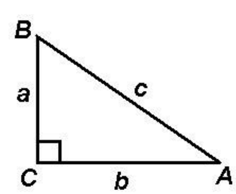
$t)$ a= 37.16m, $B = 29.23^o$, Determina las medidas de b, c y A.



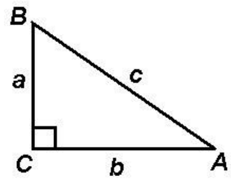
$u)$ b= 34.17cm, $A = 31.35^o$, Determina las medidas de a, c y B.



$v)$ c= 37.14m, $A = 13.2^o$, Determina las medidas de a, b y B.



w) c= 10.34m, $B = 14.5^o$, Determina las medidas de a, b y A.



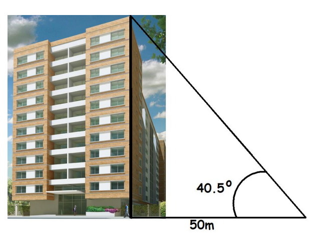
2.3. Ángulo de elevación y ángulo de depresión.

El ángulo formado por la horizontal y el objeto que se sitúa por arriba de la horizontal, se llama ángulo de elevación.

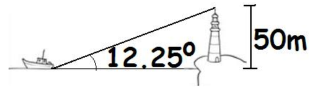
El ángulo formado por la horizontal y el objeto que se sitúa por debajo de la horizontal se llama ángulo de depresión.

Ejercicio 2.3:

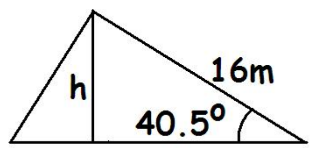
1. Determina la altura de un edificio si a 50m de su base se coloca una persona que observa su punto más alto con un ángulo de elevación de 40.5^o.



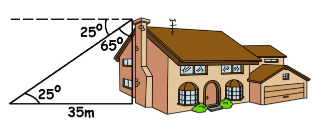
2. Desde un barco se ve un faro con un ángulo de elevación de 12.25^o. Se sabe que el faro tiene 50 metros de altura sobre el nivel del mar. Determina la distancia del barco al faro.



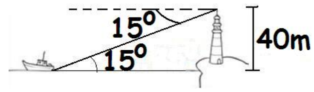
3. Determina la altura (h) del triángulo representado en la figura.



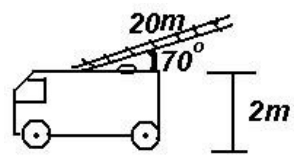
4. Desde la parte superior de una casa el ángulo de depresión de cierto punto en el suelo es de 25^o el punto está a 35 metros de base. ¿Qué tan alta es la casa?



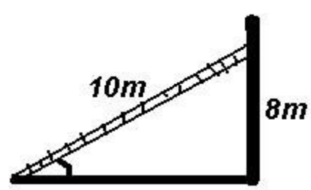
5. Desde lo alto de un faro cuya altura sobre el nivel del mar es de 40 metros, se observa un barco con un ángulo de depresión de 15^o. ¿A qué distancia del faro esta la embarcación?



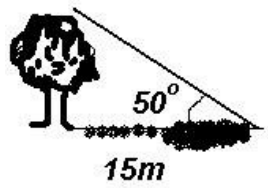
6. La escalera de un carro de bomberos tiene una longitud máxima de 20m y su ángulo de elevación es de 70^o, si la parte inferior de dicha escalera esta sobre el carro a una altura de 2m. ¿Cuál será la altura máxima que alcanza la escalera desde el suelo?.



7. Una escalera de 10m de longitud esta recargada sobre un edificio y alcanza una altura de 8m, determina la medida del ángulo que se forma entre la escalera y el piso.



8. Un árbol proyecta una sombra a cierta hora del día de 15m formando un ángulo de 50^o. ¿Cuál es la altura del árbol?



2.4. Identidades Trigonométricas Fundamentales

Las identidades trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo son:

Sen $\theta = \frac{co}{h}$ Cos $\theta = \frac{ca}{h}$ Tan $\theta = \frac{co}{ca}$

Csc $\theta = \frac{h}{co}$ Sec $\theta = \frac{h}{ca}$ Cot $\theta = \frac{ca}{co}$

Como las longitudes de los lados de un triángulo son números reales positivos, las medidas de las seis identidades trigonométricas son positivos para todo ángulo agudo θ. Además, la hipotenusa es siempre mayor que el cateto adyacente o el opuesto y por tanto $sen\ \theta 1$, $cos\ \theta 1$, $csc\ \theta 1$ y $sec\ \theta 1$ para todo ángulo agudo θ.

Observa que:

$sen\ \theta = \frac{co}{h}$ y $csc\ \theta = \frac{h}{co}$

$sen\ \theta$ y $csc\ \theta$ son recíprocas entre si, del mismo modo $cos\ \theta$ y $sec\ \theta$ son recíprocas entre si, como lo son $tan\ \theta$ y $cot\ \theta$.

Sen $\theta = \frac{1}{csc\ \theta}$ Cos $\theta = \frac{1}{sec\ \theta}$ Tan $\theta = \frac{1}{cot\ \theta}$

Identidades recíprocas fundamentales:

Csc $\theta = \frac{1}{sen\ \theta}$ Sec $\theta = \frac{1}{cos\ \theta}$ Cot $\theta = \frac{1}{tan\ \theta}$

Identidades Tangente y Cotangente:

$Tan\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta}$ $Cot\ \theta = \frac{cos\ \theta}{sen\ \theta}$

Identidades Pitagóricas:

$sen^2\ \theta + cos^2\ \theta = 1$ $1 + tan^2\ \theta = sec^2\ \theta$ $1 + cot^2\ \theta = csc^2\ \theta$

Ejercicio 2.4: Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

1. $\frac{cos\ \ \theta}{tan\ \ \theta} = sen\ \ \theta$

2. $\frac{tan\ \ \theta}{sen\ \ \theta} = sec\ \ \theta$

3. $\frac{sen\ \ \theta}{csc\ \ \theta} + \frac{cos\ \ \theta}{sec\ \ \theta} = 1$

4. $\frac{sec\ \ \theta}{tan\ \ \theta + cot\ \ \theta} = sen\ \ \theta$

5. $tan\ \ \theta \cdot cos\ \ \theta \cdot csc\ \ \theta = 1$

6. $\frac{1 - sen\ \ \theta}{cos\ \ \theta} = \frac{cos\ \ \theta}{1 + sen\ \ \theta}$

7. $\frac{tan\ \ \theta - sen\ \ \theta}{sen^3\ \ \theta} = \frac{sec\ \ \theta}{1 + cos\ \ \theta}$

8. $\frac{tan^2\ \ \theta + 1}{tan\ \ \theta \cdot csc^2\ \ \theta} = tan\ \ \theta$

9. $\frac{sen\ \ \theta}{1 + cos\ \ \theta} = \frac{1 - cos\ \ \theta}{sen\ \ \theta}$

10. $(sec\ \theta + tan\ \theta)(1 - sen\ \theta) = cos\ \theta$

11. $\frac{tan\ \theta + cos\ \theta}{sen\ \theta} = sec\ \theta + cot\ \theta$

2.5. Resolución de Triángulos Oblicuángulo

En el caso de los triángulos oblicuángulos se pueden resolver cuando se conocen 3 de sus elementos. Existen los siguientes casos de resolución de triángulos oblicuángulos.

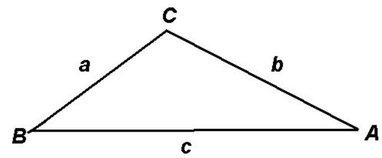
a) Cuando se conocen la longitud de un lado y las medidas de 2 ángulos.

b) Cuando se conocen la longitud de dos lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.

c) Cuando se conocen las longitudes de sus tres lados.

2.5.1. Ley de Senos

$\frac{a}{Seno \quad A} = \frac{b}{seno \quad B} = \frac{c}{SenoC}$



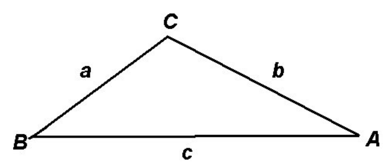
Se utiliza en el caso:

a) Cuando se conoce la longitud de un lado y las medidas de 2 ángulos.

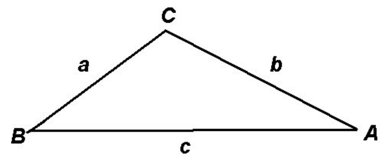
Ejercicio 2.5:

1. Considerando la figura, determina las medidas que se te piden, utilizando para ello la ley de senos cuando se conocen la longitud de un lado y las medidas de 2 de sus ángulos.

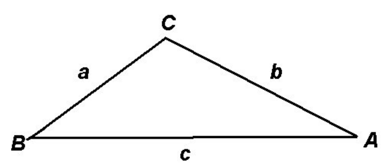
   a) a=14m, A= 20^o y B= 35^o, Determina las medidas de a, c y C.



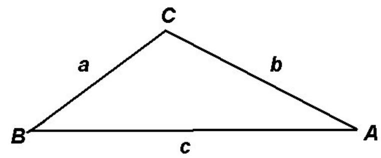
b) a=45cm, A= 66^o y C= 75^o, Determina las medidas de b, c y B.



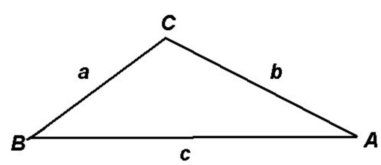
c) a=5cm, B= 75^o y C= 41^o, Determina las medidas de b, c y A.



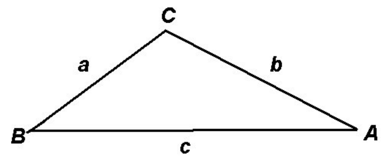
d) b=50cm, A= 45^o y B= 65^o, Determina las medidas de a, c y C.



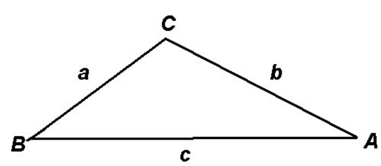
e) b=61cm, A= 29^o y B= 45^o, Determina las medidas de a, c y C.



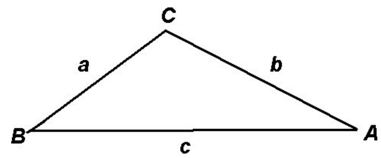
f) c= 12cm, A= 60^o y $B = 70^o$, Determina las medidas de a, b y C.



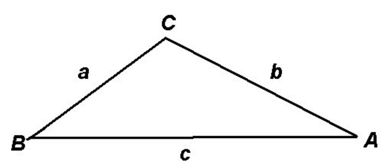
g) c= 60cm, A= $80^o25^,$ y $B = 35^o43^,$, Determina las medidas de a, b y C.



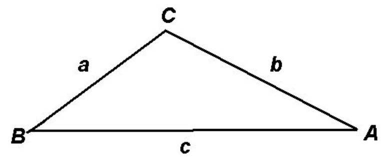
h) c= 20m, A= 55^o y $B = 65^o$, Determina las medidas de a, b y C.



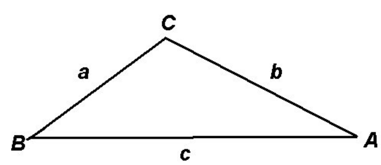
i) b=5m, A= 41^o y C= 75^o, Determina las medidas de a, c y B.



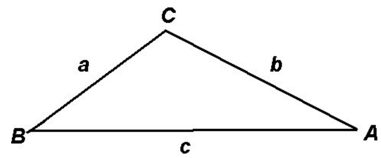
j) b=50cm, A= 57^o y C= 78^o, Determina las medidas de a, c y B.



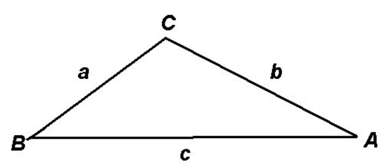
k) a=18cm, A= $38^o20'$ y B= $75^o13'$, Determina las medidas de b, c y C.



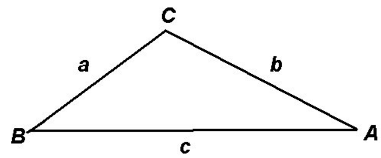
l) b=82cm, B= 51^o42' y C= 109^o17', Determina las medidas de a, c y A.



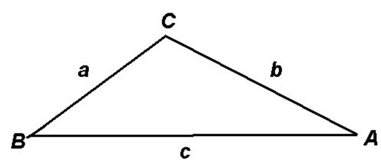
m) c=24m, A= 83^o39' y B= 38^o56', Determina las medidas de a, c y C.



n) b=67cm, A= 26^o10' y C= 44^o35', Determina las medidas de a, c y B.

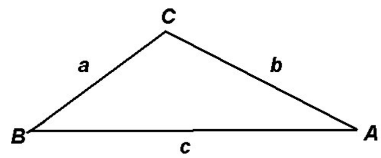


ñ) c=5m, B= 98^o81' y C= 21^o51', Determina las medidas de a, b y A.

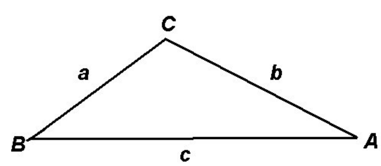


2. Considerando la figura, determina las medidas que se te piden, utilizando para ello la ley de senos cuando se conocen la longitud de dos de sus lados y las medida de el ángulo correspondiente a uno de los lados conocidos.

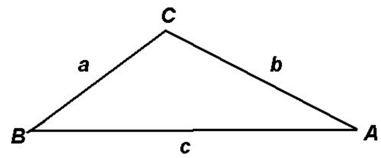
   a) a= 8cm, b= 12cm y $B = 65^o$, Determina las medidas de c, A y C.



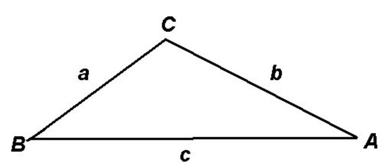
   b) a= 6cm, b= 4cm y $A = 63^o50'$, Determina las medidas de c, B y C.



c) b= 74m, c= 64m y $C = 27^o18'$, Determina las medidas de a, A y B.



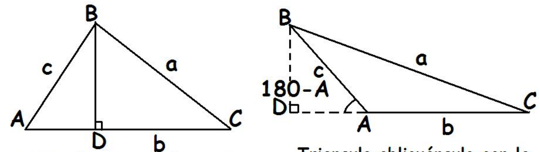
d) a= 4.25m, c= 4.53m y $C = 37.9^o$, Determina las medidas de b, A y C.



2.5.2. Ley de los Cosenos

La ley de los cosenos señala que "el cuadrado de la longitud de uno de los lados de un triángulo, es igual a la suma de las longitudes de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de dichos lados, por el coseno del ángulo que queda comprendido entre ellos".

Si se toma como referencia la figura siguiente la expresión matemática de la ley de los cosenos es:



Triángulo acutangulo con la altura correspondiente al lado b.

Triangulo oblicuángulo con la altura correspondiente al lado b.

Coseno A=$\dfrac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}$ Coseno B=$\dfrac{b^2-a^2-c^2}{-2ac}$ Coseno C=$\dfrac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}$

a=$\sqrt{b^2+c^2-2bc.(cosenoA)}$ b=$\sqrt{a^2+c^2-2ac.(cosenoB)}$ c=$\sqrt{a^2+b^2-2ab.(cosenoC)}$

Se utiliza en el caso:

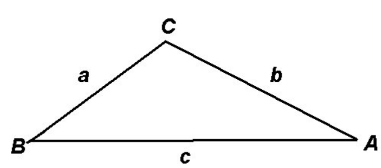
b) Cuando se conocen la longitud de dos lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.

c) Cuando se conocen las longitudes de sus tres lados.

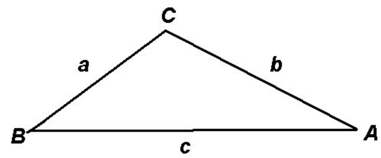
Ejercicio 2.6:

1. Considerando la figura, determina las medidas que se te piden, utilizando para ello la ley de los cosenos cuando se conocen la longitud de dos de sus lados y las medida del ángulo comprendido.

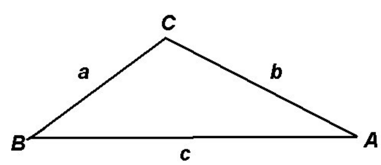
   a) a= 15m, c= 12m y $B = 110^o$, Determina las medidas de b, A y C.



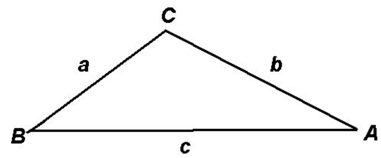
b) a= 15m, c= 20m y $B = 58^o$, Determina las medidas de b, A y C.



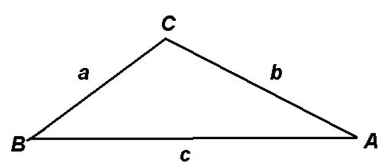
c) a= 14cm, c= 18cm y $B = 41^o$, Determina las medidas de b, A y C.



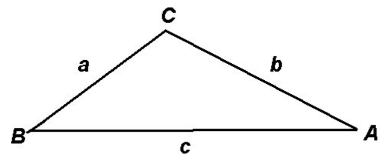
d) a= 35cm, c= 50cm y $B = 78^o$, Determina las medidas de b, A y C.



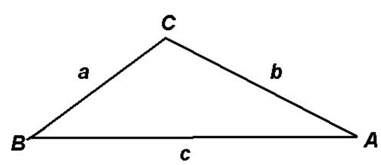
e) b= 6m, c= 10m y $A = 68^o 18'$, Determina las medidas de a, B y C.



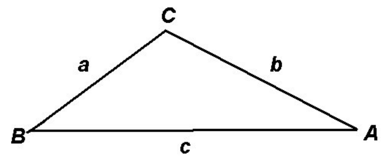
f) b= 15cm, c= 10cm y $A = 120^o$, Determina las medidas de a, B y C.



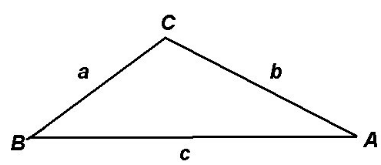
g) b= 40cm, c= 24.8cm y $A = 98^o$, Determina las medidas de a, B y C.



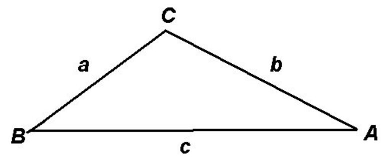
h) a= 60m, b= 50m y $C = 78^o28'$, Determina las medidas de c, A y B.



i) a= 4cm, b= 7cm y $C = 130^o$, Determina las medidas de c, A y B.

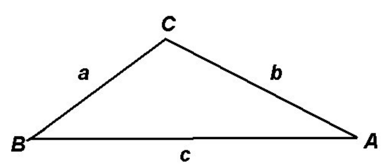


j) a= 11cm, b= 21cm y $C = 97^o50'$, Determina las medidas de c, A y B.

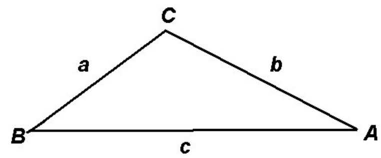


2. Considerando la figura, determina las medidas que se te piden, utilizando para ello la ley de los cosenos cuando se conocen la longitud de sus lados.

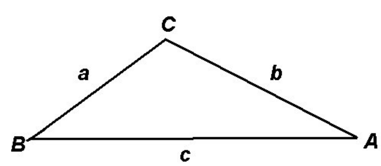
   a) a= 34cm, b= 40cm y c= 28cm. Determina los ángulos A, B y C.



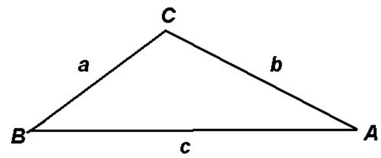
b) a= 12m, b= 25m y c= 20m. Determina los ángulos A, B y C.



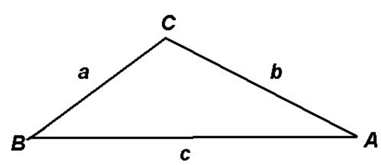
c) a= 10cm, b= 14cm y c= 16cm, Determina los ángulos A, B y C.



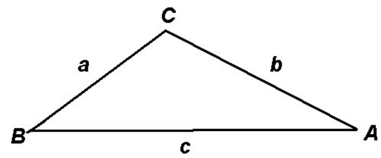
d) a= 12m, b= 16m y c= 10m, Determina los ángulos A, B y C.



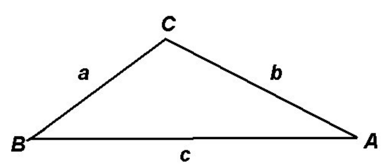
e) a= 40m, b= 19m y c= 23m, Determina los ángulos A, B y C.



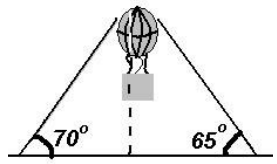
f) a= 33cm, b= 46.25cm y c= 51.47cm, Determina los ángulos A, B y C.



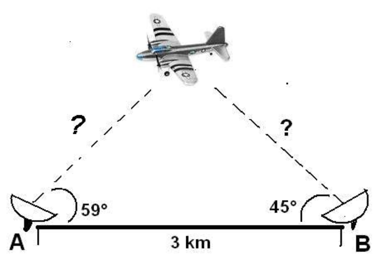
g) a= 13cm, b= 4cm y c= 15cm, Determina los ángulos A, B y C.



3. Dos cables sujetan un globo, el cual alcanza una altura de 75m, si uno de los cables forma un ángulo de 70^o y el otro cable forma un ángulo de 65^o con respecto al suelo.¿Cuánto mide cada cable?



4. En un espectáculo aéreo 2 reflectores (A y B) separados entre si por una distancia de 3km iluminan a un avión. Los ángulos que forman los reflectores con el piso son como se muestra en la ilustración. ¿A que distancia esta el avión de cada reflector?



5. Un faro mar adentro esta a 2 kilómetros de la estación de la guardia costera C a 2.5 kilómetros de un hospital H cercano a la costa. Si el ángulo formado por el haz de luz emitido desde el faro hacia C y H mide 143^o. ¿Cuál es la distancia CH, en la línea recta entre la estación de la guardia costera y el hospital? Construye la figura.

Capítulo 3

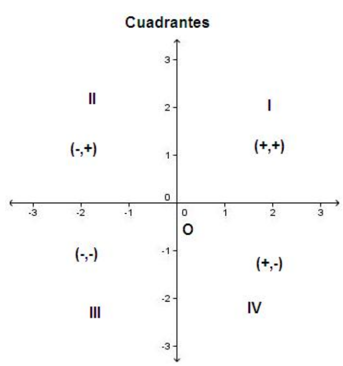
UNIDAD 2 - Elementos básicos de Geometría Analítica

3.1. El punto en el plano cartesiano

3.1.1. Representación de puntos en el plano de coordenadas rectangulares.

Definición: El sistema de ejes cartesianos o rectangulares está formado por dos ejes reales perpendiculares entre si, llamados ejes de coordenadas, uno es horizontal llamado eje de las abscisas y el otro es vertical denominado eje de las ordenadas, que se cortan en un punto llamado origen (O).

En el sistema de coordenadas rectangulares a un punto P en el plano se le asocian dos valores denominados coordenadas del punto (x, y). El primer valor x llamado abscisa siempre se localiza en el eje horizontal y el segundo valor y llamado ordenada en el eje vertical.

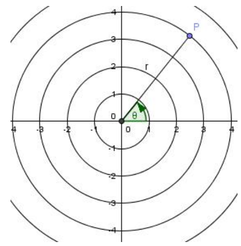


3.1.2. Sistemas de Coordenadas Polares

Definición: Existe un sistema de referencia denominado Plano Polar, el cual consiste en una semi-recta denominada Eje Polar que inicia en un punto llamado Origen o Polo (O).

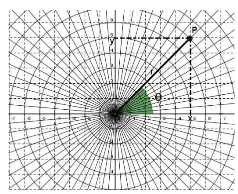
Para ubicar un punto P en el plano polar se considera la distancia del punto P al polo (O) y el ángulo que forma el eje polar con el segmento o radio $\overline{OP}$.

Por lo que las coordenadas del punto se definen con los valores del radio y el ángulo que se forma: P(r, θ)



3.2. Relación entre Coordenadas Rectangulares y Coordenadas Polares

Si al sobreponer los ejes del plano cartesiano con los ejes del plano polar, haciendo coincidir sus orígenes.



Se observa que:

1. P tiene coordenadas rectangulares tanto en las abscisa como en las ordenadas, en (x, y) y también le corresponde un radio y un ángulo es decir en (r, θ)

2. El radio r coincide con la hipotenusa del triángulo formado por los puntos (x, y), $(x, 0)$ y $(0, 0)$

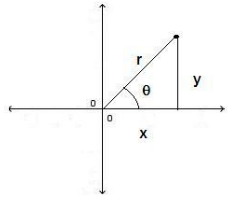
3. Los lados del triángulo miden r, x y y respectivamente

4. La tangente Tan$\theta = \frac{co}{ca}$ corresponde a Tan$\theta = \frac{y}{x}$

5. Al aplicar el teorema de Pitágoras se obtiene el radio

$x^2 + y^2 = r^2$

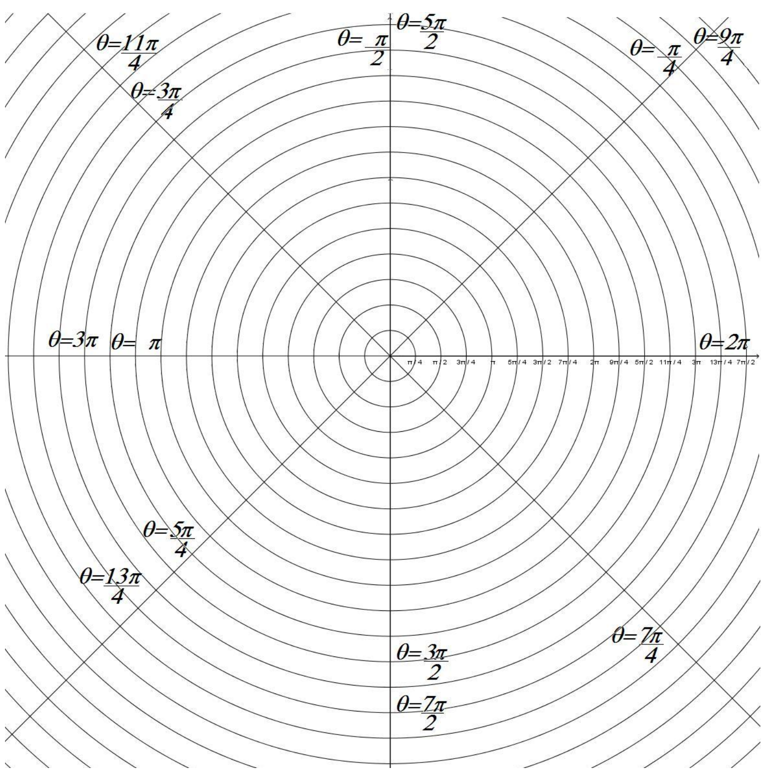
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$



Ejemplo 1: En una película de acción, el héroe al pilotear un avión, visualiza en el radar la ubicación de misiles que están por destruirlo, ésta es la representación de un punto en el plano polar,a partir de radios y un ángulo donde se encuentre. ¿Que misil está más cerca de impactar al héroe, si sus coordenadas polares, en el radar son $(5, 140^o)$, $(4, 160^o)$, $(3, 180^o)$?

Ejemplo 2: Espiral de Arquímedes, traza la gráfica de la ecuación polar $r = \theta$ para $\theta \geq 0$.

Al localizar en el mismo plano polar los puntos de la forma (r, θ) donde r es el radio y θ el ángulo en radianes. Cuando θ aumenta, r aumenta con la misma rapidez, la gráfica contiene los puntos: $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, (π, π), $(\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$, $(2\pi, 2\pi)$, $(\frac{9\pi}{4}, \frac{9\pi}{4})$, $(\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$, $(\frac{11\pi}{4}, \frac{11\pi}{4})$, $(3\pi, 3\pi)$, $(\frac{13\pi}{4}, \frac{13\pi}{4})$,$(\frac{7\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$, al unir los puntos obtendrás el bosquejo de la espiral de Arquímedes.



La espiral se enrolla alrededor del origen hacia afuera del polo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, cruzando el eje polar en 0, 2π, 4π, etc.

A Arquímedes (287 - 212 a. de J.C.) se le considera como el más grande de los matemáticos de la antigüedad y como uno de los tres o cuatro más grandes de todos los tiempos. Fue el primero en determinar el volumen de una region esférica. Hizo un calculo muy aproximado de π. Los métodos que desarrollo para resolver problemas referentes a áreas y volúmenes lo colocaron muchos siglos por delante de su tiempo. Podia calcular el área de regiones limitadas por curvas muy complicadas.

A diferencia de la mayoría de los matemáticos griegos, Arquímedes se intereso en las aplicaciones de la matemática. Dice una leyenda que cuando los romanos atacaban su ciudad natal en Siracusa, en Sicilia, el jugo un papel importante en la defensa de la ciudad, aterrorizando a los invasores con armas que el mismo inventaba. Se dice que bombardeo los barcos romanos con grandes piedras, lanzadas con las catapultas más grandes que jamas se habían visto. También se dice que incendio la flota romana, utilizando espejos para concentrar los rayos del sol sobre los barcos. Al convertirse el ataque en sitio, Arquímedes no pudo servir más de ayuda y volvió a su estudio y a sus trabajos de matemáticas.

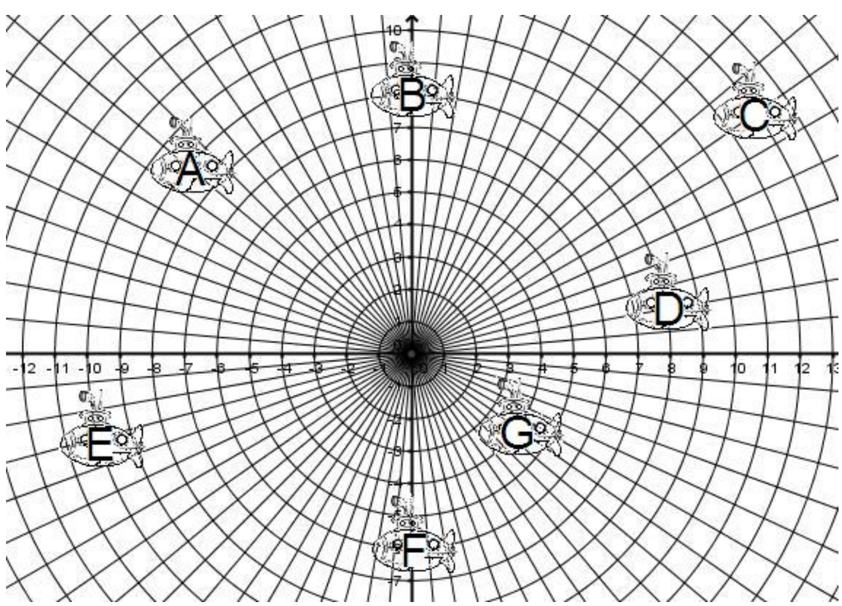
Murió en su trabajo. Cuando los romanos finalmente capturaron a Siracusa, un soldado lo encontró en su casa dibujando figuras geométricas en la arena del piso. “No estropee mis círculos”, dijo Arquímedes. Estas resultaron ser sus últimas palabras. El general romano había dado ordenes de que no debía hacerse daño a Arquímedes, pero nadie sabe si el soldado conocía o sabia quien era su víctima.

Ejercicio 3.1:

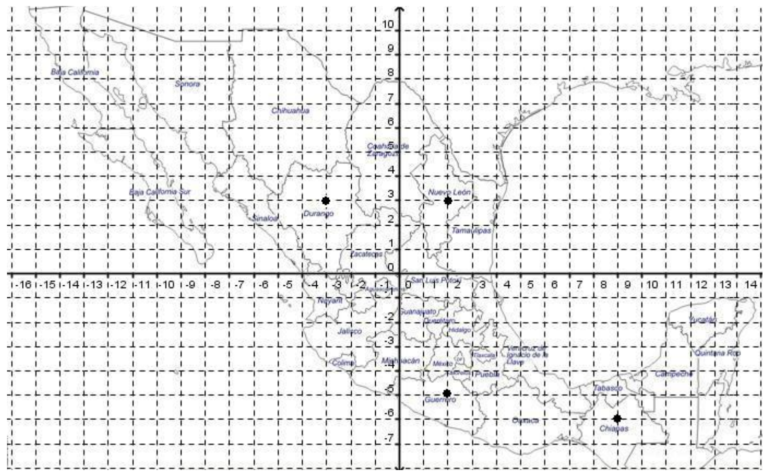
1. Submarino. En el siguiente radar se encuentran submarinos que hay hundir. ¿Que coordenadas polares tiene cada uno de ellos?. Marca con color la circunferencia que pase por el centro del submarino y marca con color la línea del ángulo que pasa por el centro de cada uno e indica sus coordenadas.

   $A(\quad , \quad)$ $B(\quad , \quad)$ $C(\quad , \quad)$ $D(\quad , \quad)$

   $E(\quad , \quad)$ $F(\quad , \quad)$ $G(\quad , \quad)$



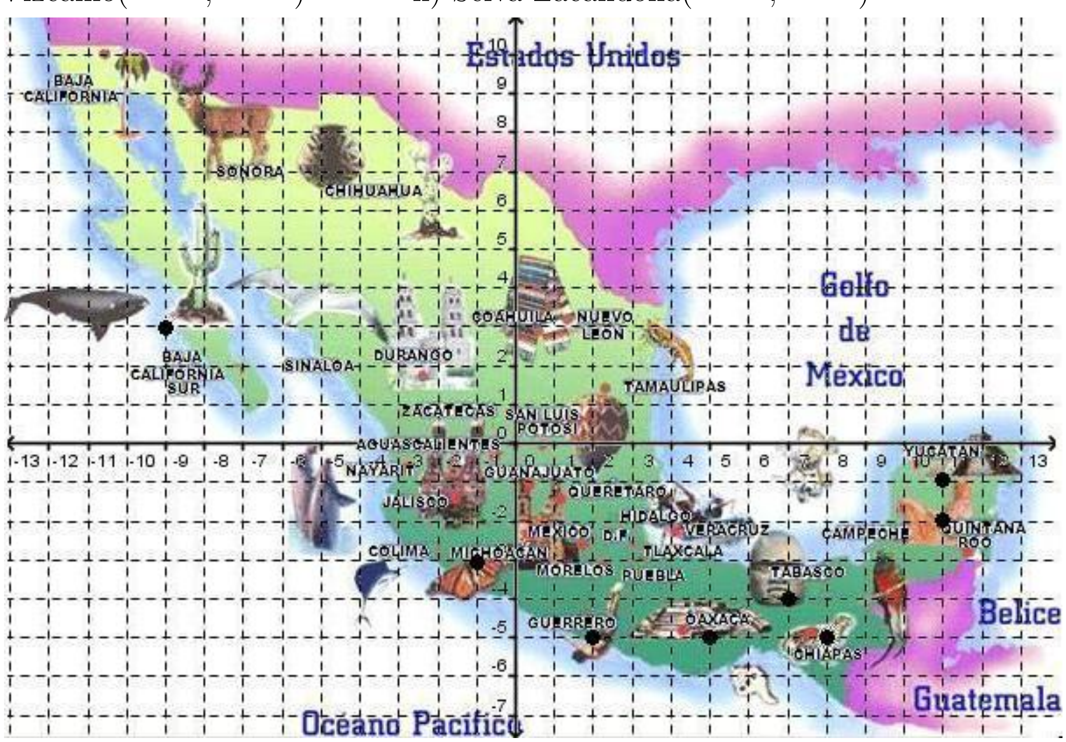
Ejemplo 1 En el siguiente mapa lo puntos están indicados en coordenadas rectangulares o cartesianas, tomando como base las abscisas y las ordenadas, el punto $(-3,3)$ representa a Durango, Nuevo Leon $(2,3)$, Guerrero $(2,-5)$, Chiapas $(9,-6)$ lo que facilita su ubicación.



Ejercicio 3.2: Puntos en el mapa. Los siguientes puntos estan indicados en coordenadas rectangulares o cartesianas, responde lo que se te solicita

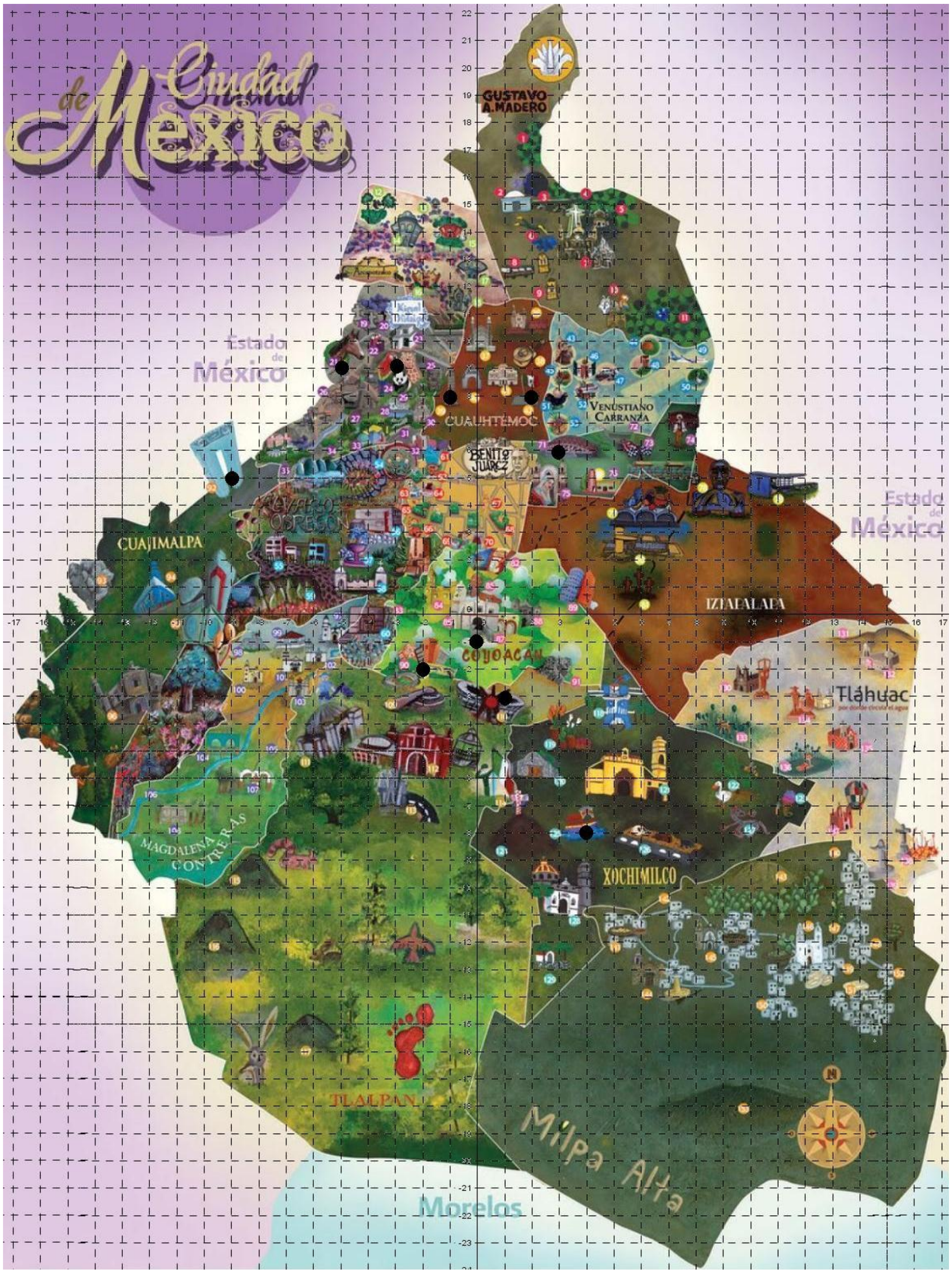
1. Señala las coordenadas cartesianas o rectangulares que les corresponden en el mapa, de los lugares que se te solicitan

a) Monte Alban (,)	b) La Venta(,)
c) La Quebrada (,)	d) Chichen Itza(,)
e) Uxmal(,)	f) Santuario de la Mariposa Monarca(,)
g)El Vizcaino(,)	h) Selva Lacandona(,)



2. Señala las coordenadas cartesianas o rectangulares que les corresponden en el mapa, de los lugares que se te solicitan

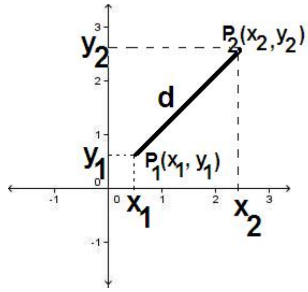
a) Xochimilco(,   )
b) Coyoacan(,   )
c) Ciudad Universitaria(,   )
d) Estadio Azteca(,   )
e) Torre Latinomericana(,   )
f) Zocalo(,   )
g) Zoologico de Chapultepec(,   )
h) El pantalon(,   )
i) Palacio de los Deportes(,   )
j) Hipódromo de las Americas(,   )



3.3. Obtención analítica de los elementos asociados a un segmento en el plano cartesiano

3.3.1. Longitud de un segmento

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



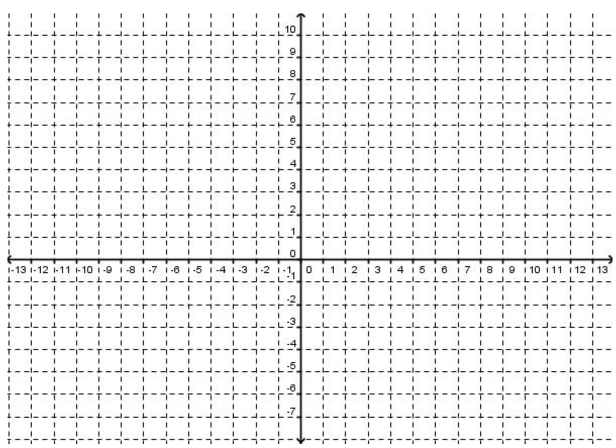
Utilizando el teorema de pitágoras tenemos que:
$cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2$

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ejemplo 1: Determina la distancia entre los puntos $A(-2, -3)$ y $B(1, 0)$
Se trazan los puntos en el plano y se indica cada coordenada con x y y según corresponda:

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & y_1 & & x_2 \quad y_2 \\ A(& -2, & -3) & \text{y} & B(1, \quad 0) \end{array}$$



Sustituimos los valores en la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y tenemos:

$d = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (0 - (-3))^2}$

$d = \sqrt{(1 + 2)^2 + (0 + 3)^2}$

$d = \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$

$d = \sqrt{9+9}$

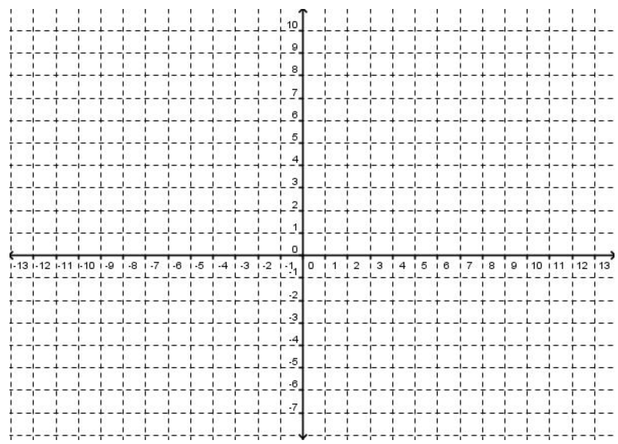
$d = \sqrt{18}$

$d = 4.24$

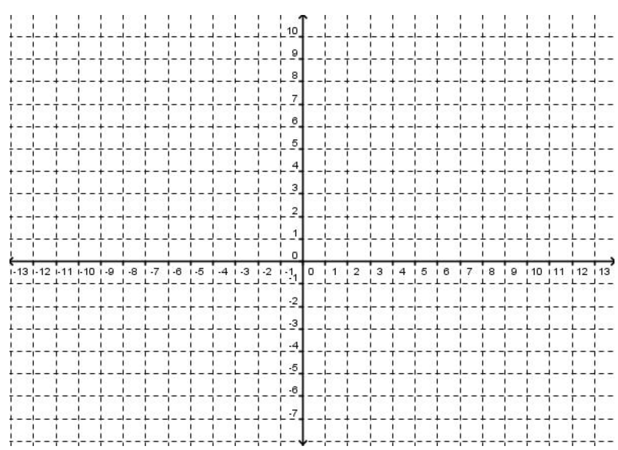
La distancia entre los puntos es 4.24

Ejercicio 3.3: Determinar la distancia entre los puntos:

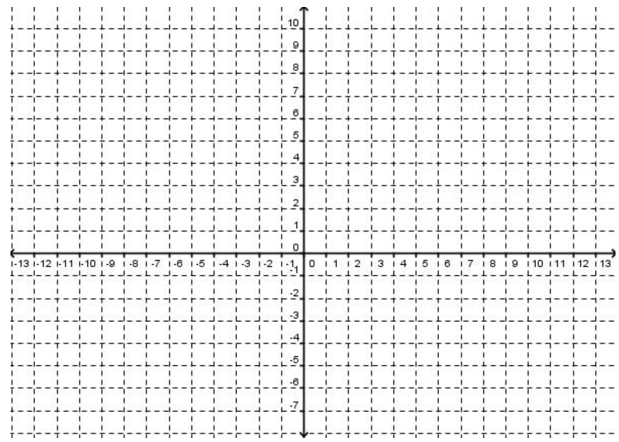
a) $(1,3)$, $(4,7)$



b) $(-3,4)$, $(2,-8)$

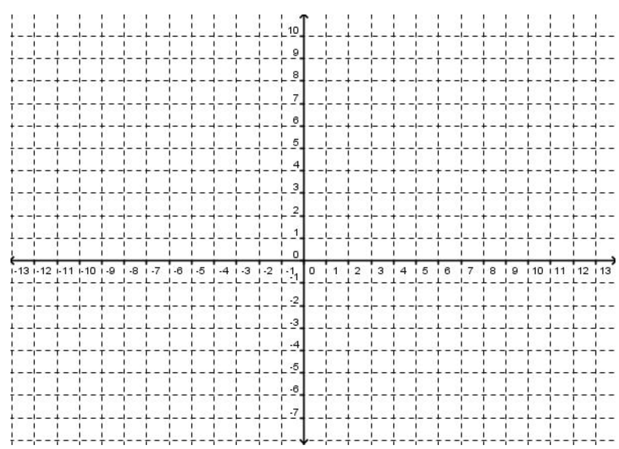


c) $(5, -12)$, $(0, 0)$



Ejemplo 1: En el triángulo formado por los puntos $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$ y $C(-1, -1)$ calcula el perímetro.

Graficamos los puntos y por parejas calculamos la distancia de cada lado del triángulo.



Segmento AB

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & y_1 & & x_2 \quad y_2 \\ A(2, & -1) & \text{y} & B(-1, & 3) \end{array}$$

Sustituimos los valores en la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y tenemos:

$d_{AB} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - (-1))^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (3 + 1)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{9+16}$

$d_{AB} = \sqrt{25}$

$d_{AB} = 5$

Segmento BC

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & y_1 & & x_2 & y_2 \\ B(&-1, & 3) & \text{y} & C(-1, & -1) \end{array}$$

Sustituimos los valores en la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y tenemos:

$d_{BC} = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (-1-3)^2}$

$d_{BC} = \sqrt{(-1+1)^2 + (-4)^2}$

$d_{BC} = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2}$

$d_{BC} = \sqrt{0+16}$

$d_{BC} = \sqrt{16}$

$d_{BC} = 4$

Segmento AC

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & y_1 & & x_2 & y_2 \\ A(&2, & -1) & \text{y} & C(-1, & -1) \end{array}$$

Sustituimos los valores en la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y tenemos:

$d_{AC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-(-1))^2}$

$d_{AC} = \sqrt{(-3)^2 + (-1+1)^2}$

$d_{AC} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2}$

$d_{AC} = \sqrt{9+0}$

$d_{AC} = \sqrt{9}$

$d_{AC} = 3$

Para calcular el perímetro tenemos que es la suma de las medidas de cada uno de los lados del triángulo, es decir:

$P = d_{AB} + d_{BC} + d_{AC}$

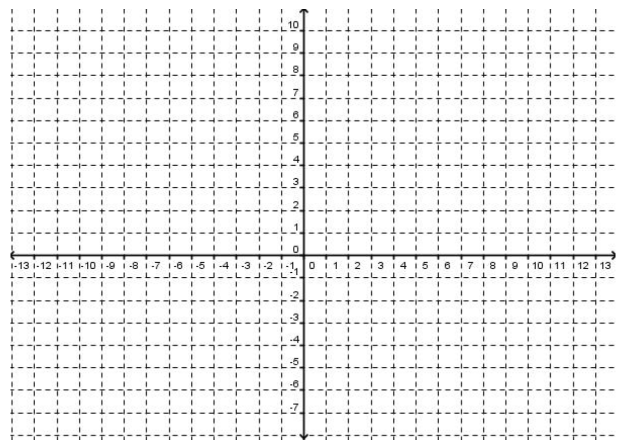
$P = 5 + 4 + 3$

$P = 12u$

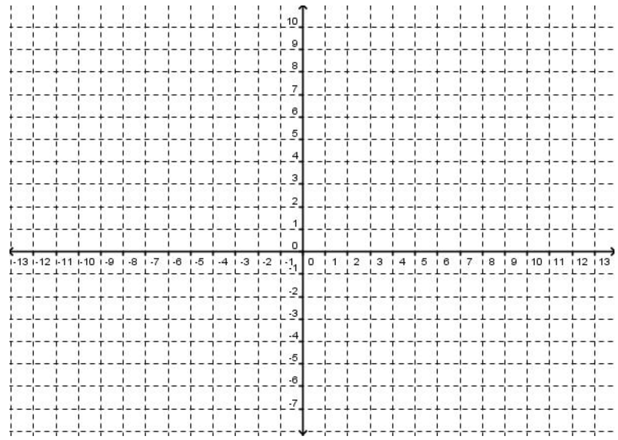
El perímetro del triángulo es 12 unidades.

Ejercicios 3.4:

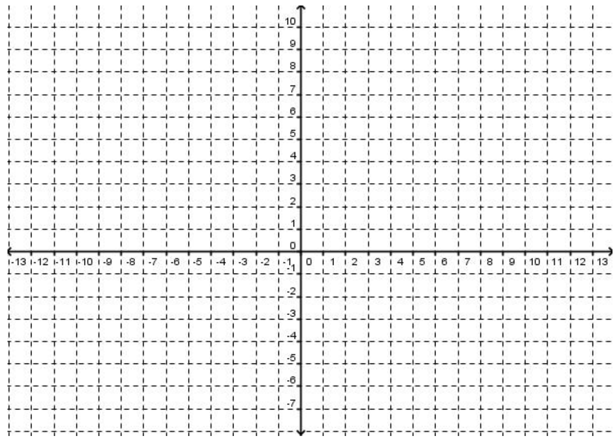
a) En el triángulo formado por los puntos $A(2,2)$, $B(7,1)$ y $C(4,4)$ calcula el perímetro.



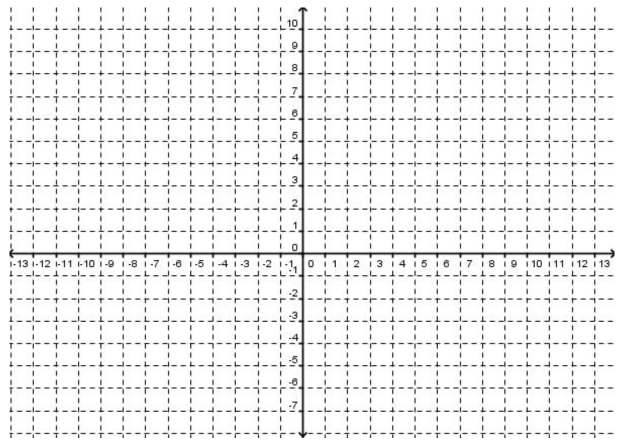
b) El perímetro del triángulo $A(-1,1)$, $B(5,-7)$, $C(5,1)$ es:



c) Demuestra que los puntos $A(-3,-2)$, $B(3,-2)$, y $C(0,5)$ son los vértices de un triángulo isósceles y calcula su perímetro.



d) Demuestra que los puntos $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, y $C(1, 2\sqrt{3})$ son los vértices de un triángulo equilátero y calcula su perímetro.



3.3.2. Ángulo de inclinación

Definición: El ángulo de inclinación es el ángulo positivo, que la recta o el segmento de recta forma con el eje de las abscisas, este ángulo normalmente se simboliza por la letra θ.

El ángulo es positivo si se mide en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj o es un ángulo negativo si abre en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

Para obtener la medida del ángulo de inclinación se obtiene la pendiente del segmento de recta y posteriormente se obtiene el arco tangente de la pendiente obtenida.

3.3.3. Pendiente

Definición: La pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo de inclinación. Una recta que se inclina a la derecha tiene una pendiente positiva, ya que la inclinación es un ángulo agudo.

Las pendientes de las rectas que se inclinan hacia la izquierda son negativas. La pendiente de una recta horizontal es cero. Sin embargo, las rectas verticales no tienen pendiente definida.

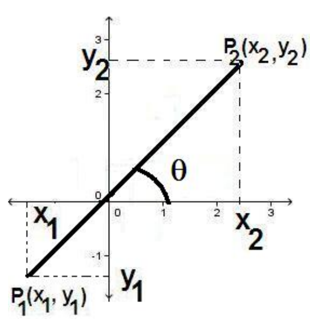
La pendiente m de una recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_{1)})$ y $P_2(x_2, y_2)$ es igual a la diferencia de las ordenadas dividida entre la diferencia de las abscisas tomadas en el mismo orden; es decir,

Pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

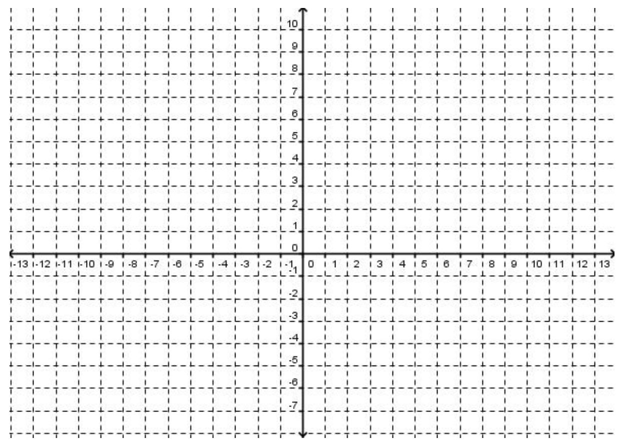
$m = tan\theta$

$\theta = tan^{-1}m$

$\theta = Tan^{-1}(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})$

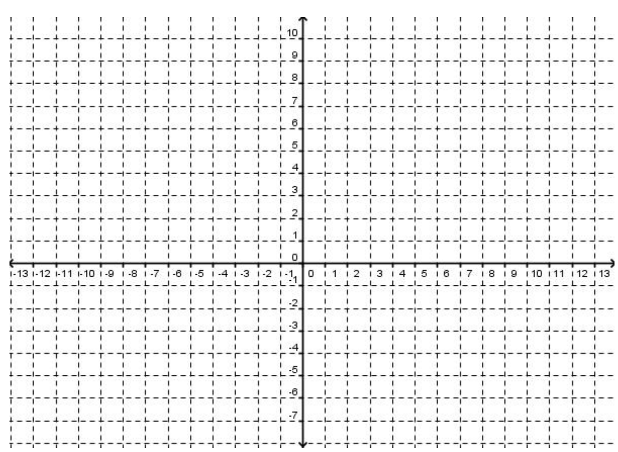


Ejemplo 1: Determina la pendiente y la medida del ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $A(-4,4)$ y $B(7,-2)$

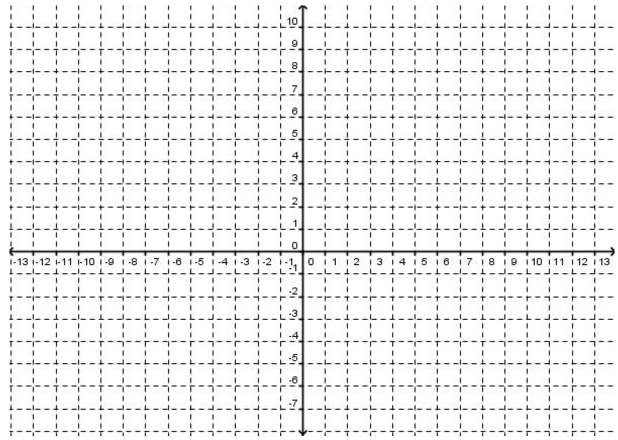


Ejercicio 3.5: Encontrar la pendiente y la medida del ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos:

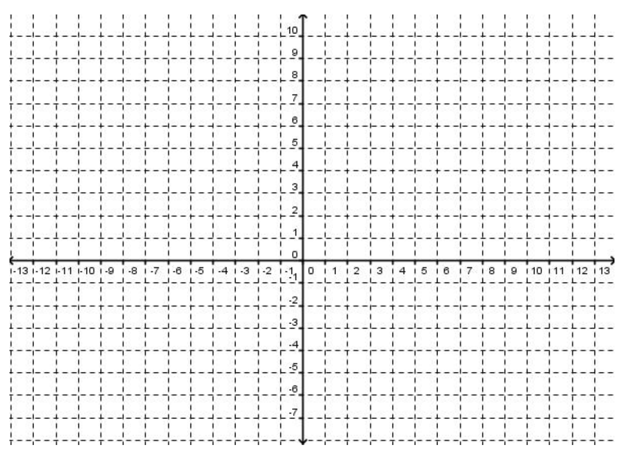
a) $A(-5,4)$, $B(7,-6)$



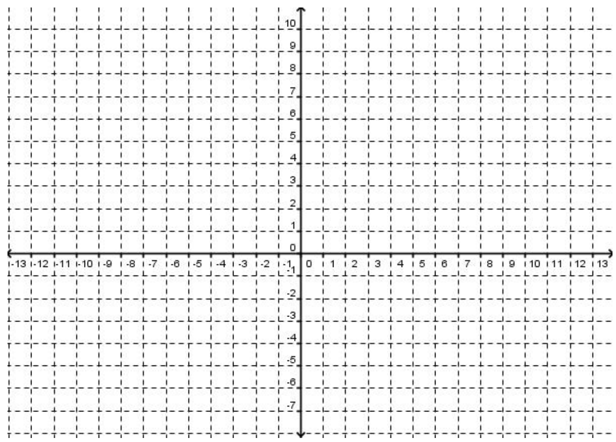
b) $A(3,5)$, $B(6,9)$



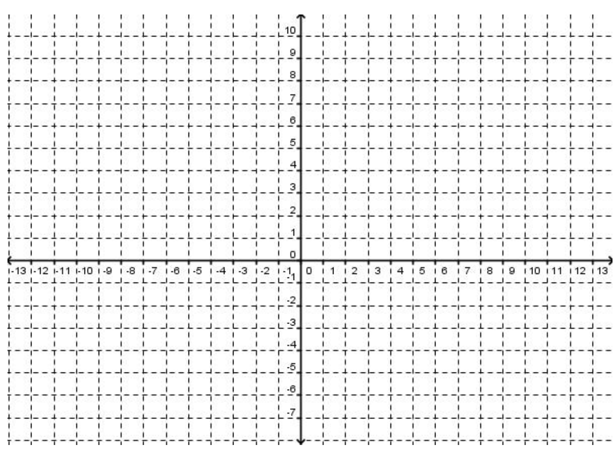
c) $A(4,5)$, $B(6,7)$



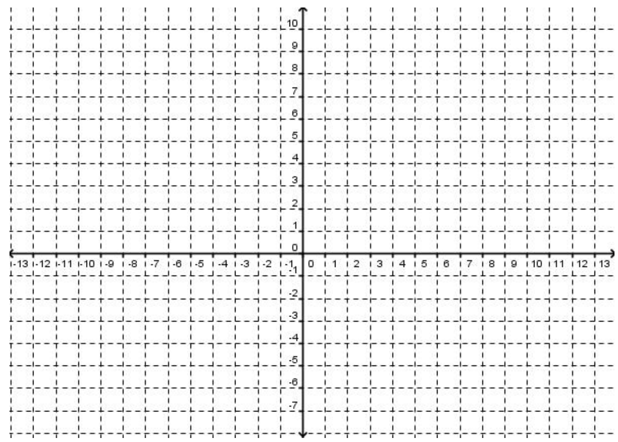
d) $A(-4,-5)$, $B(-16,7)$



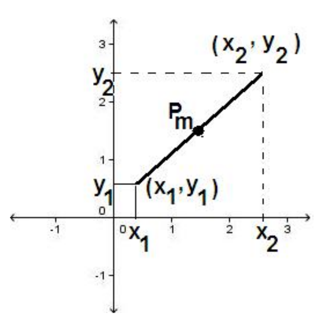
e) Determina la pendiente y la medida del ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(6,7)$



f) Determina las pendientes de los lados del triángulo cuyos vértices son: $A(3,-4)$, $B(-1,7)$, $C(-5,1)$

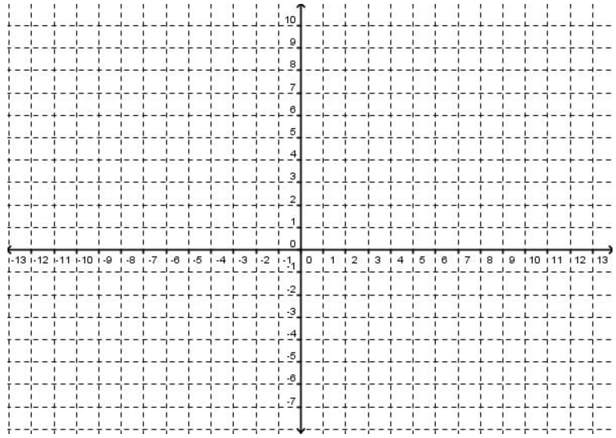


3.4. Punto medio de un segmento dado por dos puntos en el plano



$P_m(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

Ejemplo 1: Determina el punto medio de la recta formada por los puntos $A(7,-2)$ y $B(-3,10)$.
Se trazan los puntos en el plano cartesiano y se denominan a las coordenadas para sustituir los puntos en la fórmula de punto medio



$$\begin{array}{llll} & x_1 & y_1 & & & x_2 & y_2 \\ A(7, & & -2) & \text{y} & B(-3, & & 10) \end{array}$$

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

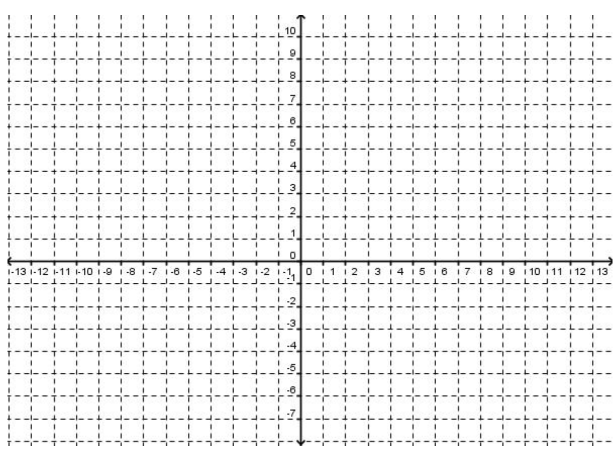
$$P_m\left(\frac{7+(-3)}{2}, \frac{-2+10}{2}\right)$$

$$P_m\left(\frac{7-3}{2}, \frac{-2+10}{2}\right)$$

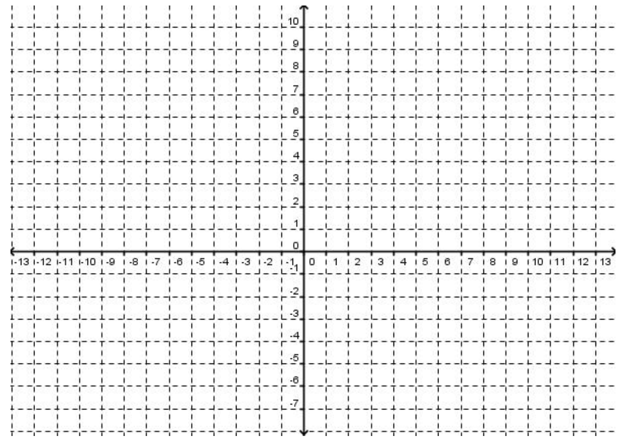
$$P_m\left(\frac{4}{2}, \frac{8}{2}\right)$$

$P_m(2,4)$

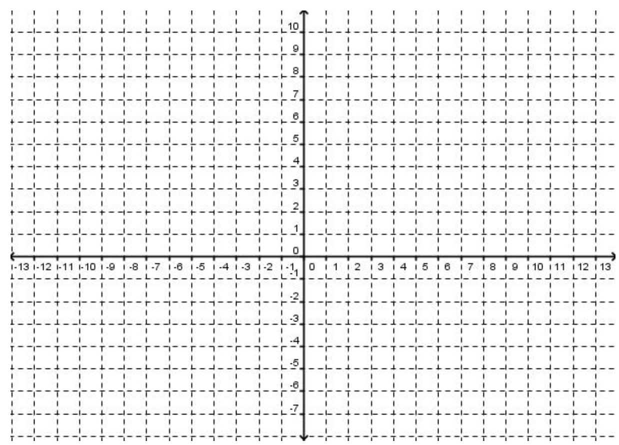
Ejercicio 3.6: Determina el punto medio de los siguientes segmentos a) $(-2,6)$, $(-4,-6)$



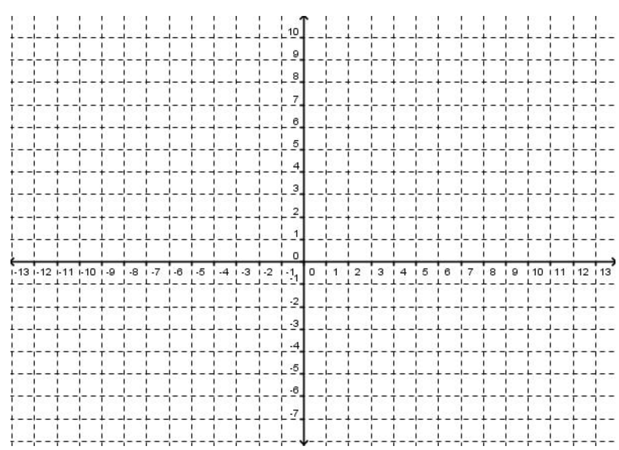
b) $(-6, 12)$, $(12, 0)$



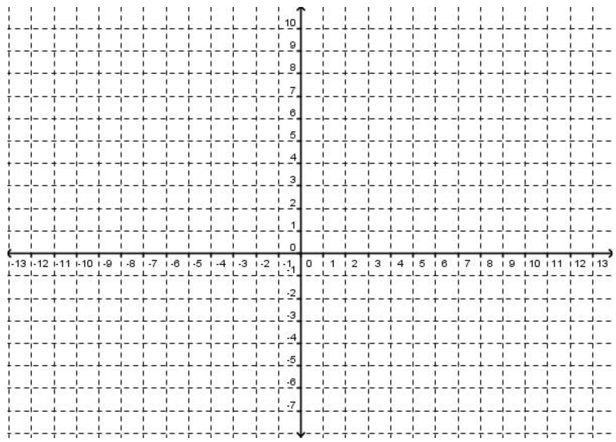
c) $(0, -7)$, $(3, 10)$



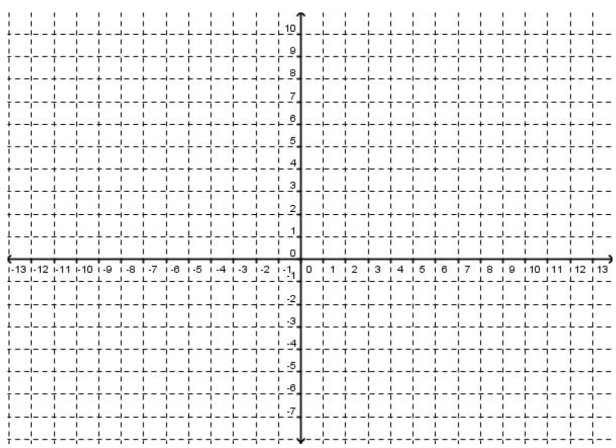
d) $(-4, -1)$, $(2, 7)$



e) $(6, 5)$, $(8, -5)$

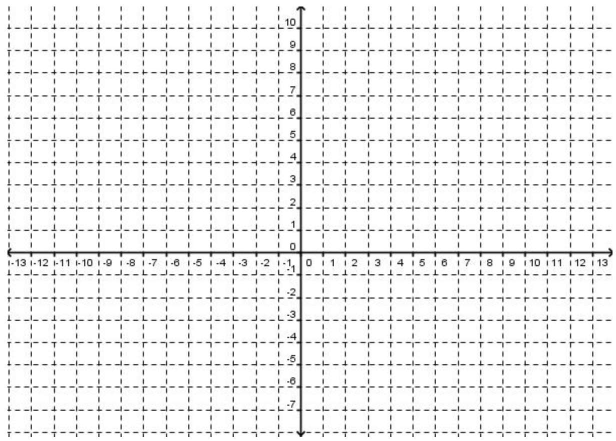


f) Determina el punto medio de la recta formada por los puntos $A(-2, 6)$ y $B(4, -6)$.



Ejemplo 1: El punto medio de un segmento es $P_m(1, 5)$ si un extremo es el punto $A(-5, 3)$. Determina las coordenadas del otro extremo B del segmento.

Se localizan los puntos en el plano cartesiano y se denomina a las coordenadas del punto A



$$\begin{array}{cc} \quad x_1 & y_1 \\ A(-5, & 3) \end{array}$$

El extremo B tiene coordenadas $B(x_2, y_2)$

Las coordenadas del punto medio corresponden a x y y en este caso $x = 1$, $y = 5$

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$P_m\left(\frac{-5+x_2}{2}, \frac{3+y_2}{2}\right)$$

$P_m(1, 5)$

Al comparar cada coordenada tenemos que:

$\frac{-5+x_2}{2} = 1$

$\frac{3+y_2}{2} = 5$

Lo que necesitamos ahora es despejar a x_2 de $\frac{-5+x_2}{2} = 1$ para tener la coordenada de x del extremo faltante

$\frac{-5+x_2}{2} = 1$

$-5 + x_2 = 1(2)$

$-5 + x_2 = 2$

$x_2 = 2 + 5$

$x_2 = 7$

Despejamos de la misma manera para y_2 de $\frac{3+y_2}{2} = 5$

$\frac{3+y_2}{2} = 5$

$3 + y_2 = 5(2)$

$3 + y_2 = 10$

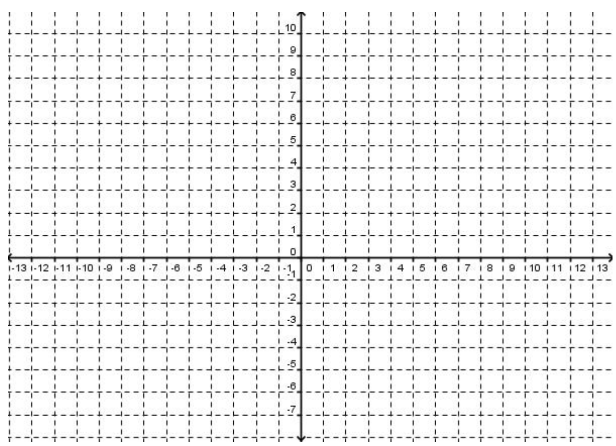
$y_2 = 10 - 3$

$y_2 = 7$

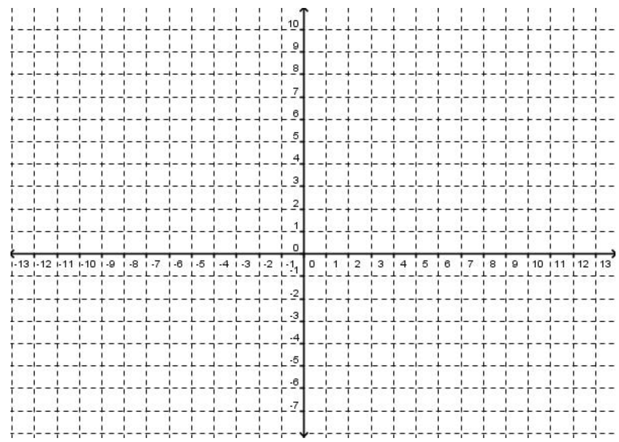
El extremo faltante tiene coordenadas $x_2 = 7$ y $y_2 = 7$, es decir el punto es $B(7, 7)$

Ejercicio 3.7:

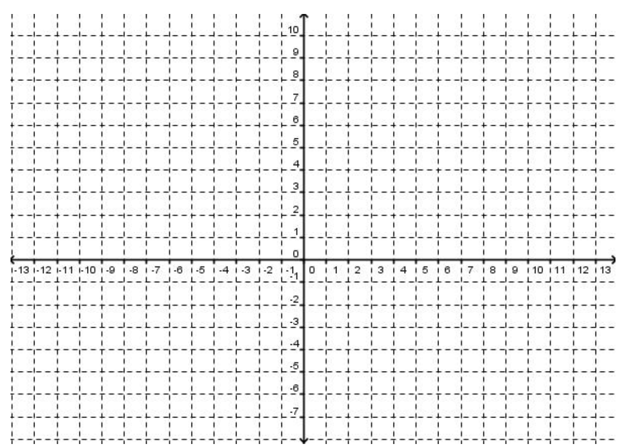
1. Uno de los extremos de un segmento de recta es $A(-3, 2)$ y su punto medio es $(3, -1)$, las coordenadas del otro extremo son:



2. Si uno de los extremos de un segmento es $A(-2,5)$ y el punto medio es $(2,4)$ encuentra las coordenadas del punto B que es el otro extremo del segmento.

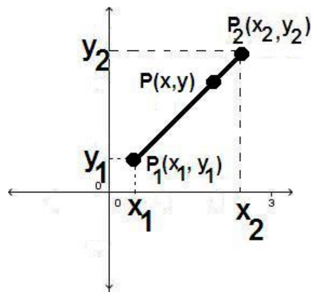


3. Si uno de los extremos de un segmento es $A(-1,2)$ y el punto medio es $(5,6)$ encuentra las coordenadas del punto B que es el otro extremo del segmento.



3.5. División de un segmento a una razón dada

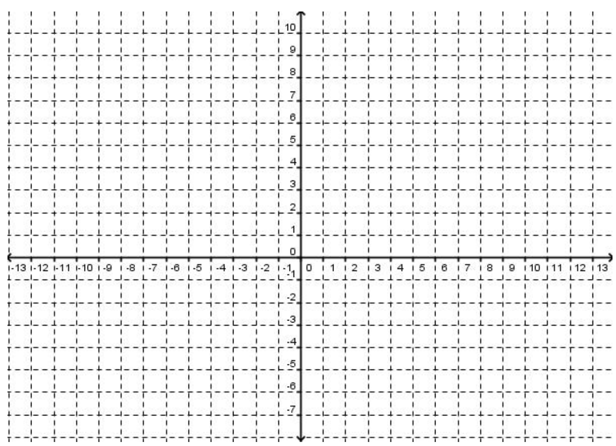
Si P está entre P_1 y P_2, el segmento P_1P y el P_1P_2 y el valor de su razón r es positiva y menor que 1. Sin embargo, si P es un punto sobre el segmento P_1P_2 prolongado hacia P_2, entonces el segmento P_1P es mayor que P_1P_2, y $r > 1$.



$x = x_1 + r(x_2 - x_1)$

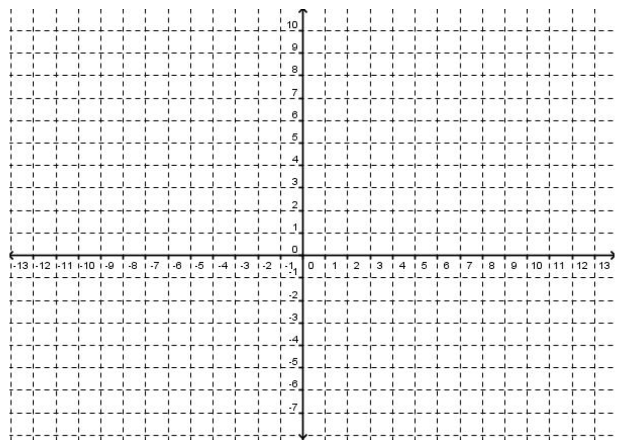
$y = y_1 + r(y_2 - y_1)$

Ejemplo 1: Determina las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $A(-3,-1)$ y $B(1,5)$

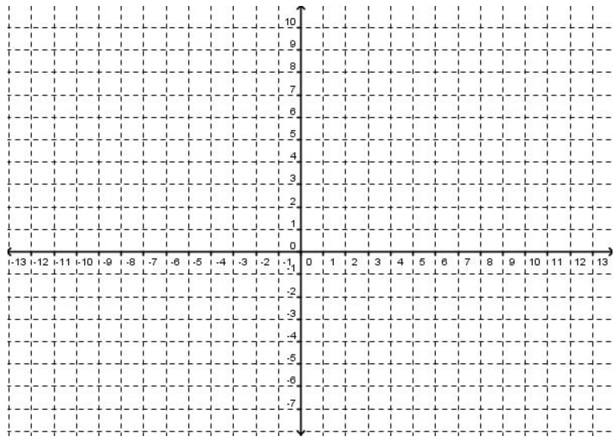


Ejercicio 3.8:

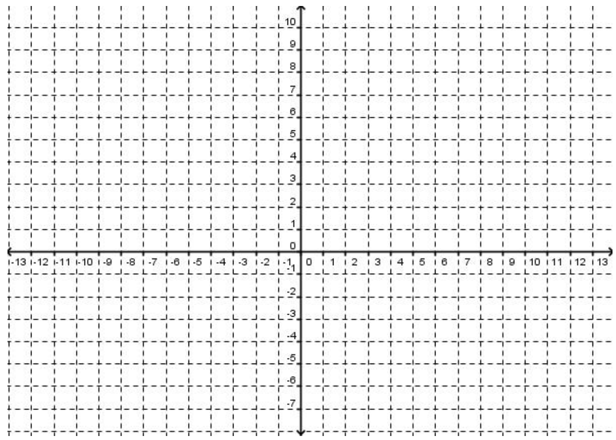
1. Determina las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $A(-6,-9)$ y $B(6,9)$



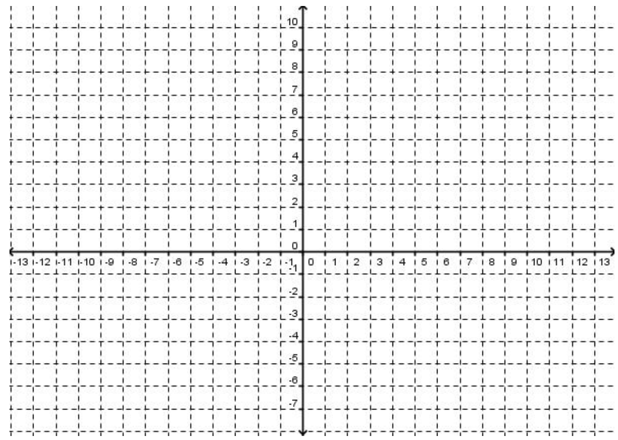
2. Determina las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $A(3,-4)$ y $B(-3,8)$



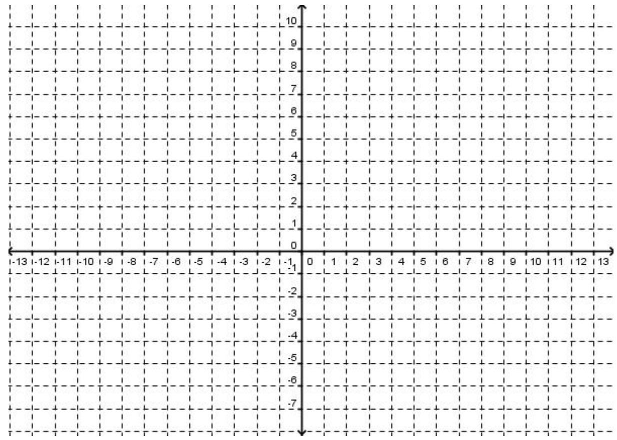
3. Determina las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $A(6, -5)$ y $B(0, 7)$



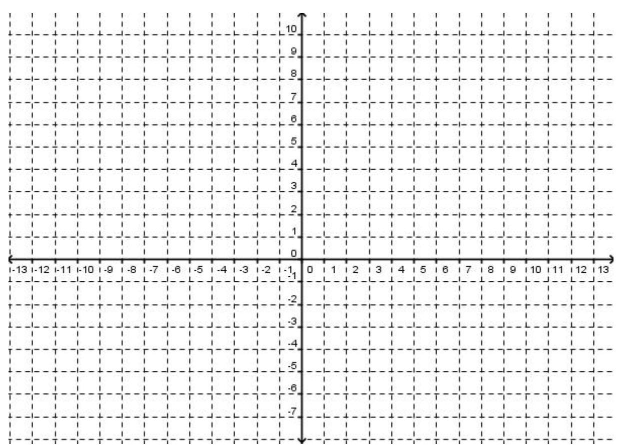
4. Determina las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $A(0,-1)$ y $B(6,4)$



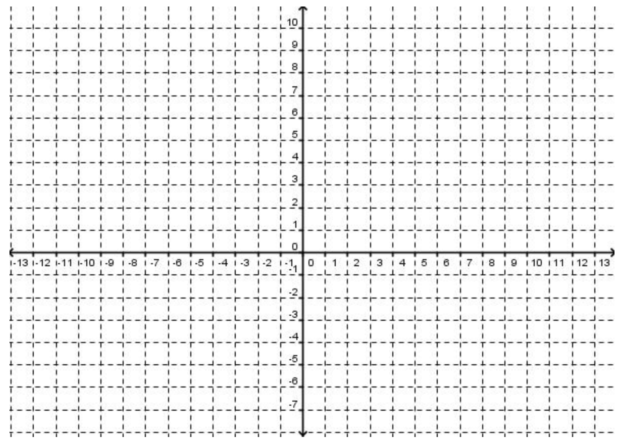
5. Las coordenadas del punto P que divide al segmento $Q(-5,-3)$, $R(7,6)$ en la razón $r = \frac{QP}{PR} = 2$son:



6. Determina las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que divide al segmento determinado por $A(1,7)$ y $B(6,-3)$ en la razón $r = \frac{2}{3}$



7. Determina las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divide al segmento determinado por $A(-3, -2)$ y $B(6, 7)$ en la razón $r = \frac{1}{4}$



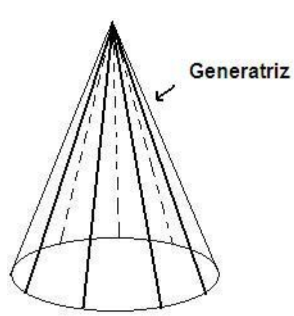
3.6. Lugares Geométricos en el Plano Cartesiano

3.6.1. Secciones Cónicas

Definición: Las cónicas son las curvas que se generan al intersectar de cierta manera un cono circular recto con un plano recto, siendo estas curvas: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Cada una de ellas es la gráfica de una ecuación cuadrática en x y/o y, que se pueden representar como un caso de la ecuación general.

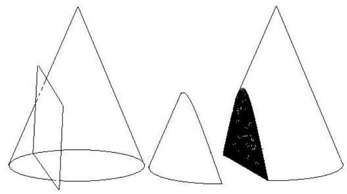
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

donde A, B y C no son todos cero.



Ecuación de una Recta en su Fórmula General es Ax+By+C=0

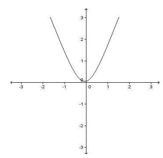
La Parábola es la curva que resulta de intersectar un cono recto circular y un plano paralelo a la generatriz del cono.

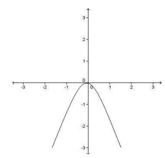


Ecuación de la Parábola Vertical
Fórmula General

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $A \neq 0$ y $E \neq 0$

Forma Ordinaria
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$



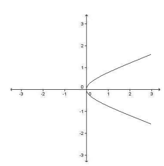


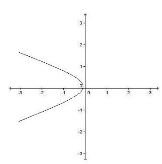
Ecuación de la Parábola Horizontal

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $C \neq 0$ y $D \neq 0$

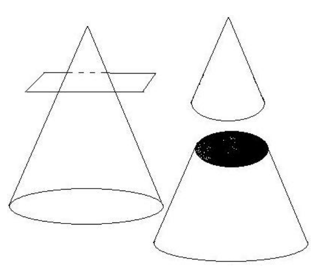
Forma Ordinaria

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$





La Circunferencia es la curva que resulta de la intersección de un cono recto circular con un plano paralelo a la base del cono.



Ecuación de la Circunferencia en su Fórmula General

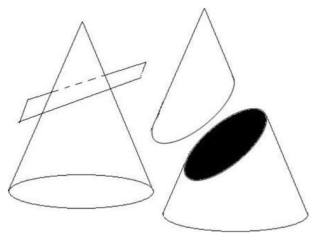
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Con $A = C$

Ecuación de la Circunferencia en su forma ordinaria

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Una elipse es la curva que resulta de la intersección de un cono circular recto y un plano inclinado que no es paralelo a una de las generatrices.



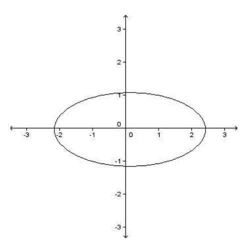
Ecuación de la Elipse en su Fórmula General

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

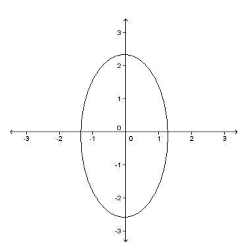
Con $A \neq C$ con mismo signo

Ecuación de la Elipse Horizontal

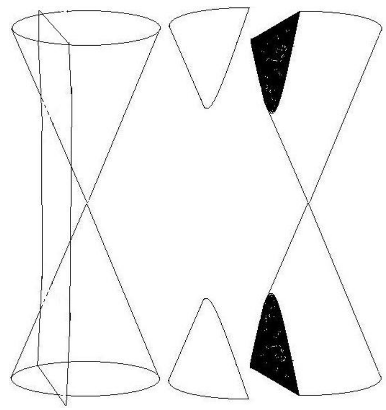
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



Ecuación de la Elipse Vertical
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$



Una Hipérbola es la curva que se obtiene intersecando un cono y un plano, si el plano está inclinado y corta ambas secciones del cono y no pasa por el vértice del mismo.



$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Con A y C de signos diferentes

Ejercicio 3.9: Indica en cada una de las ecuaciones la curva a la que corresponde:
R - Recta
P - Parabola
C - Circunferencia
E - Elipse
H - Hiperbola

( ) $5x^2 + 6y - 4 = 0$

( ) $3x - 6y + 1 = 0$

( ) $4x^2 + 5y^2 - 6x + 2 = 0$

( ) $7x^2 + 7y^2 - 8x + 9y = 0$

( ) $3x^2 - 5y^2 - 4x + y + 4 = 0$

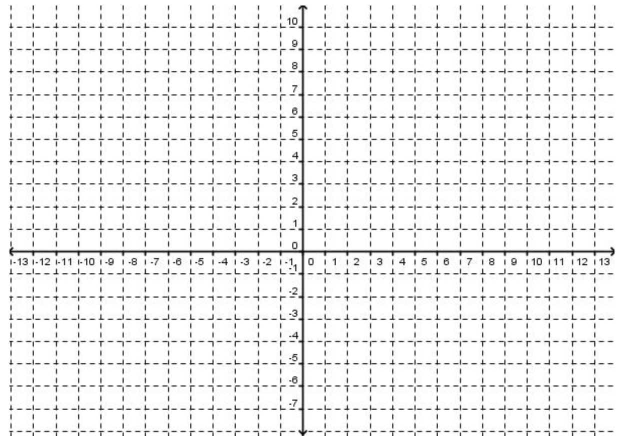
( ) $y^2 + 3x - 6y + 2 = 0$

( ) $5x^2 - 5y^2 + 3x + 2y = 0$

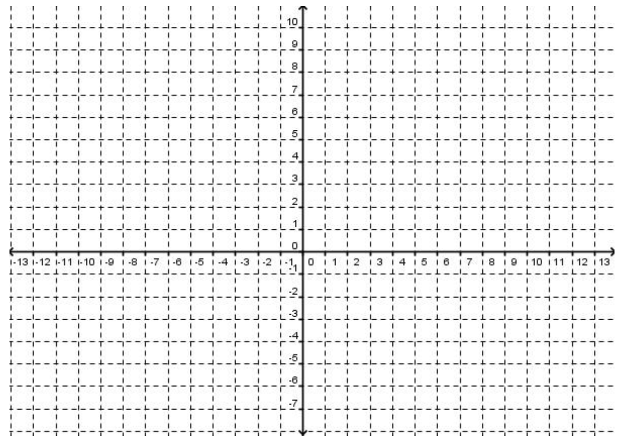
( ) $6x^2 + 2y^2 + 3x + 2y = 0$

Definición: Se denomina Lugar Geométrico al conjunto de puntos en el plano que satisfacen una condición geométrica.

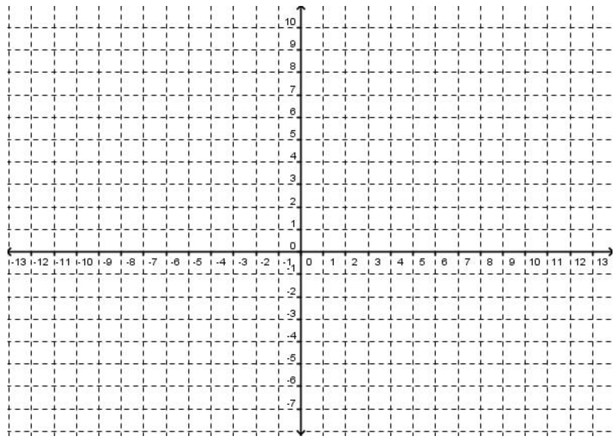
Ejemplo 1: Un punto se mueve de tal manera que su distancia desde el eje y es siempre igual a su distancia desde el punto $P(4,0)$. Determinar la ecuación del lugar geométrico.



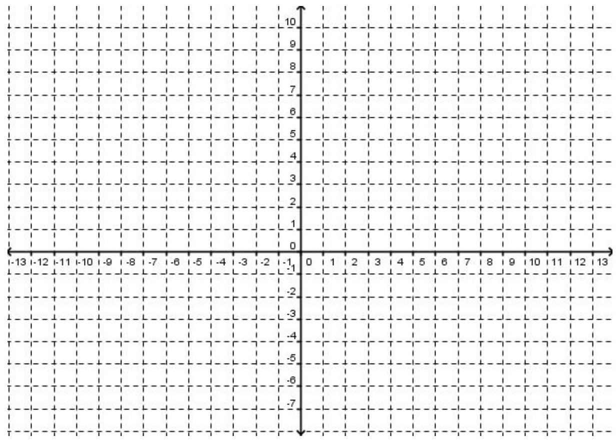
Ejemplo 2: El punto $P(x,4)$ es equidistante de los puntos $A(5,-2)$, $B(3,4)$ Determina el valor de x



Ejemplo 3: Un punto se mueve de tal manera que sus distancias a los puntos $A(5, -4)$ y $B(-3, 2)$ es siempre constante. Determina la ecuación del lugar geométrico.

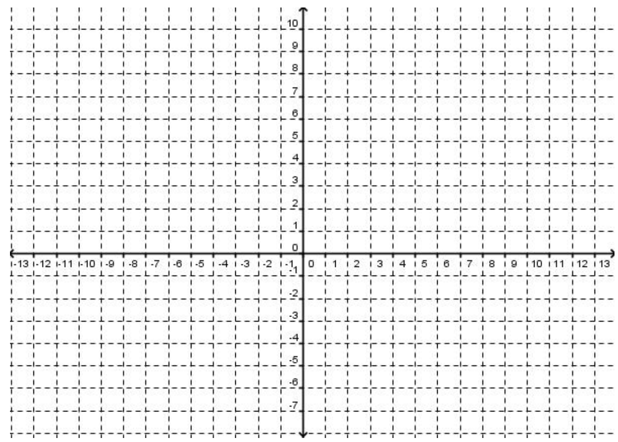


Ejemplo 4: Determinar la ecuación del lugar geométrico de P(x,y) donde la trayectoria de P está a 3 unidades de A(2,3).

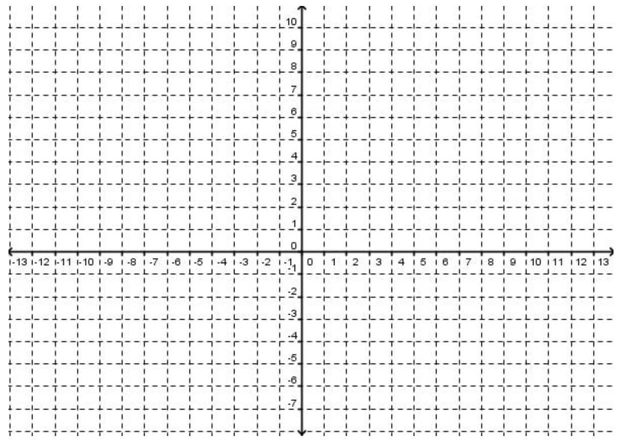


Ejercicio 3.10:

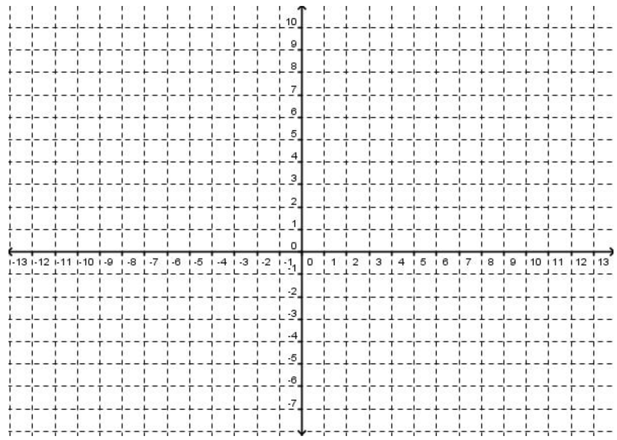
1. Un punto se mueve de tal manera que sus distancias a los puntos $A(-2,3)$ y $B(3,-1)$ es siempre constante. Determina la ecuación del lugar geométrico de dicho punto.



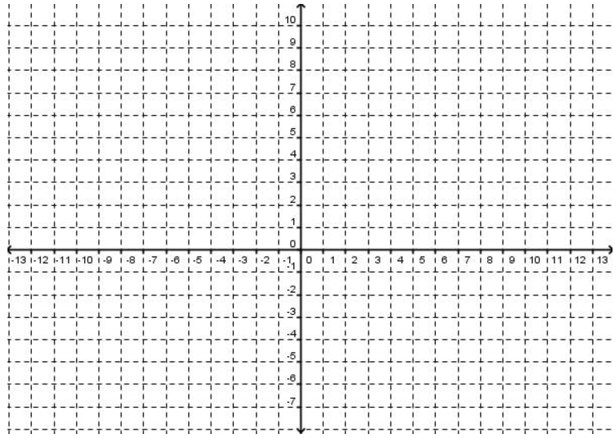
2. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que está dos veces más alejado de A(4,4) que de B(1,1).



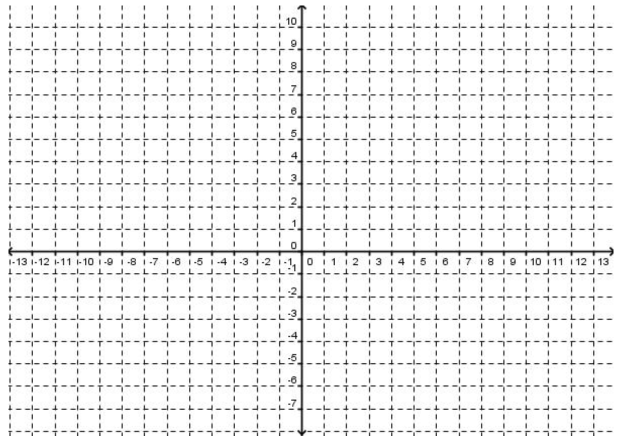
3. Determina la ecuación del lugar geométrico de P(x,y) donde la trayectoria de P está a 5 unidades del origen.



4. La distancia de el punto P(x,y) desde el punto A(4,0) es igual a la distancia desde la recta x=-4.



5. Determina el punto con coordenadas con la forma P(2a,a) que este a 5 unidades del punto R(1,3) y pertenezca al tercer cuadrante.



Capítulo 4

UNIDAD 3 - La Recta y su Ecuación Cartesiana

Definición: Se llama línea recta al lugar geométrico de los puntos de tal forma que tomados dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, el valor de la pendiente m siempre es la misma.

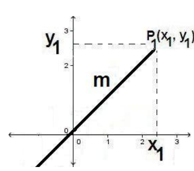
4.1. Pendiente de una recta conocidos dos puntos

Si se conocen los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, pertenecientes a la recta l, la pendiente se determina mediante la fórmula:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

4.2. Ecuaciones de la recta - Conocidos su pendiente y uno de sus puntos (x, y)

La recta l pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m.



Si se conoce el punto $P(x_1, y_1)$ y un punto del cual no se conocen sus coordenadas $P(x, y)$, pertenecientes a la recta l, la pendiente se determina mediante la fórmula:

$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

Al multiplicar ambos lados de la igualdad por $(x - x_1)$ se obtiene:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación de la recta dado un punto y su pendiente.

Ecuación general de la recta:

$Ax + By + C = 0$

Ejemplo 1: Que pasa por el punto $A(-1, -1)$ si su pendiente $m = \frac{3}{5}$

$$\begin{array}{lll} & x_1 & y_1 \\ A(& -1, & -1) \end{array} \quad \text{y} \qquad m = \tfrac{3}{5}$$

Al sustituir en la fórmula tenemos

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-1) = \frac{3}{5}(x - (-1))$

$y + 1 = \frac{3}{5}(x + 1)$

Multiplicamos por 5 ambos términos para eliminar el denominador

$5(y + 1) = 5(\frac{3}{5}(x + 1))$

$5(y + 1) = 3(x + 1)$

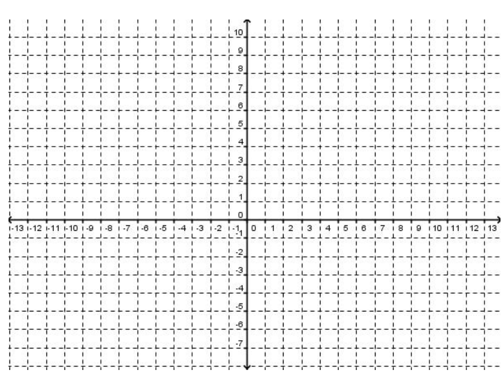
Desarrollando la ecuación

$5y + 5 = 3x + 3$

Igualando a cero la ecuación

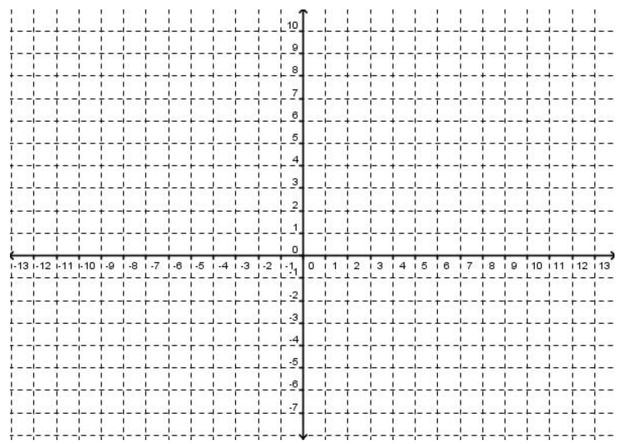
$3x - 5y + 3 - 5 = 0$

$3x - 5y - 2 = 0$ Ecuación de la recta en su forma general.

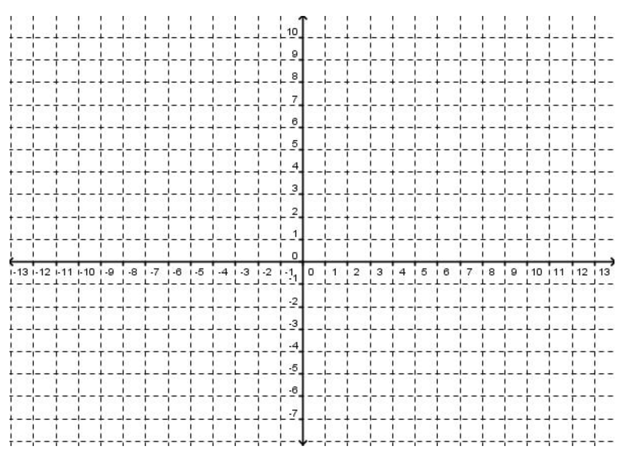


Ejercicio 4.1 Gráfica y determina la ecuación de las siguientes rectas:

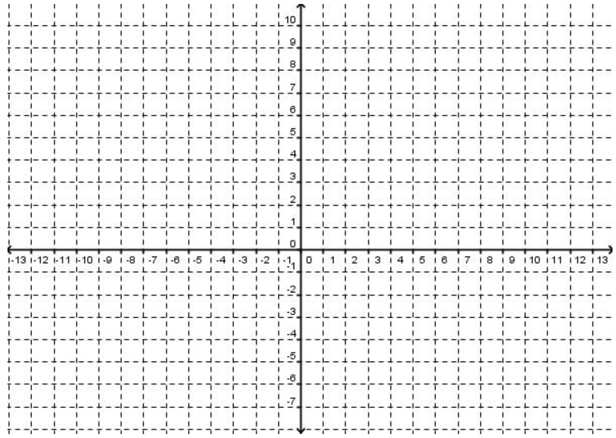
1. Que pasa por el punto $B(-4, 3)$ si su pendiente $m = \frac{3}{4}$



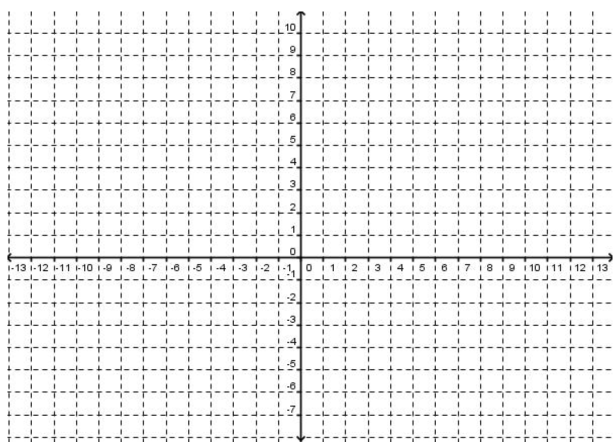
2. Que pasa por el punto $C(4, 6)$ si su pendiente $m = \frac{3}{2}$



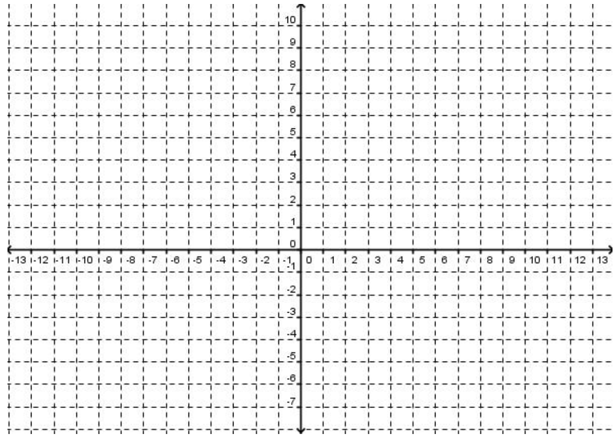
3. Que pasa por el punto $L(6, -3)$ si su pendiente $m = -3$



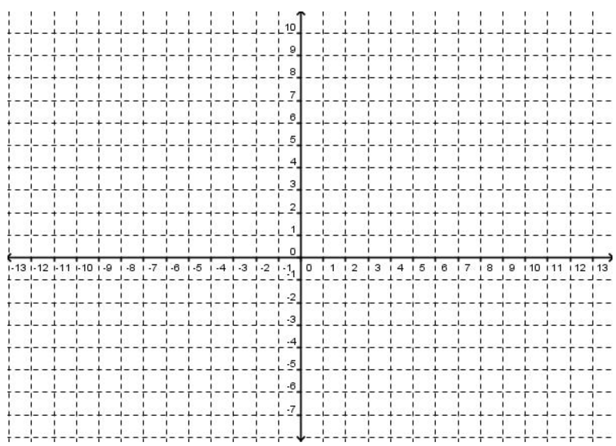
4. Que pasa por el punto $A(4, 1)$ si su pendiente $m = \frac{3}{2}$



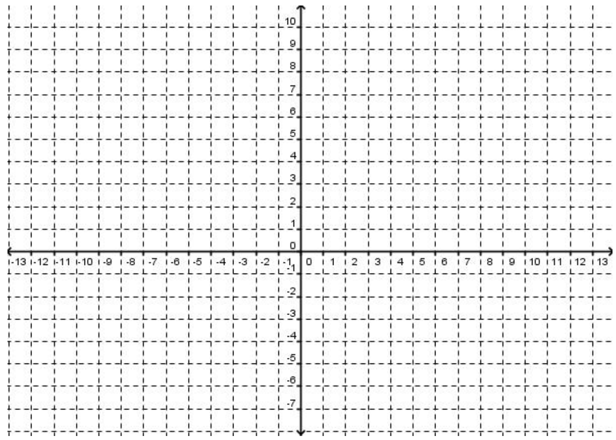
5. Que pasa por el punto $B(3,4)$ si su pendiente $m=-5$



6. Que pasa por el punto $C(-1,-3)$ si su pendiente $m=\frac{3}{5}$



7. Que pasa por el punto $D(-2,7)$ si su pendiente $m = \frac{-5}{2}$



4.3. Ecuación de la recta con dos puntos

De la ecuación de la recta dado un punto y su pendiente.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Si sustituimos la pendiente en la ecuación de la recta

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Tenemos

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación de la recta dados dos puntos.

Ejemplo 1: Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,-3)$ y $B(1,0)$

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & y_1 & & x_2 \quad y_2 \\ A(& -2, & -3) & \text{y} & B(1, \quad 0) \end{array}$$

Sustituyendo en la fórmula

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y - (-3) = \frac{0-(-3)}{1-(-2)}(x - (-2))$

$y + 3 = \frac{0+3}{1+2}(x + 2)$

$y + 3 = \frac{3}{3}(x + 2)$

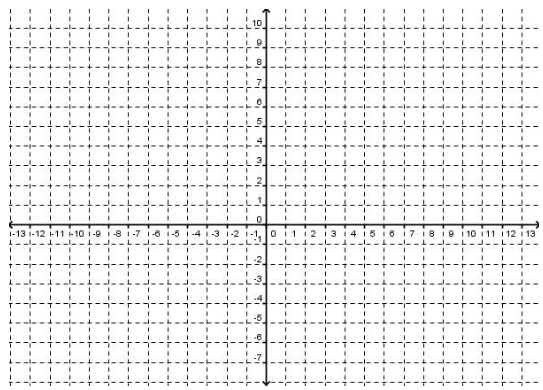
$y + 3 = 1(x + 2)$

$y + 3 = x + 2$

Igualando la ecuación a cero tenemos:

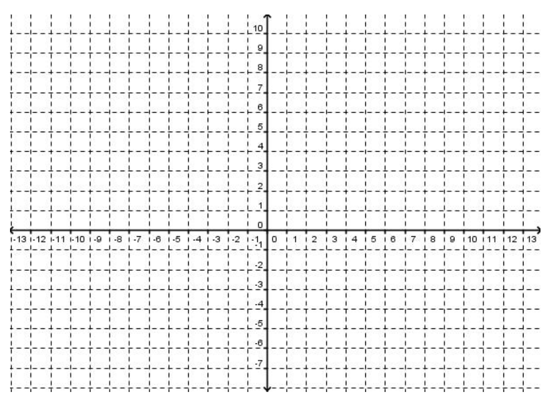
$x + 2 - y - 3 = 0$

$x - y - 1 = 0$ Ecuación en su forma general

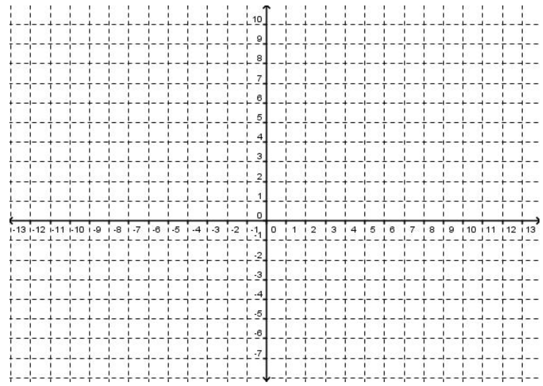


Ejercicio 4.2

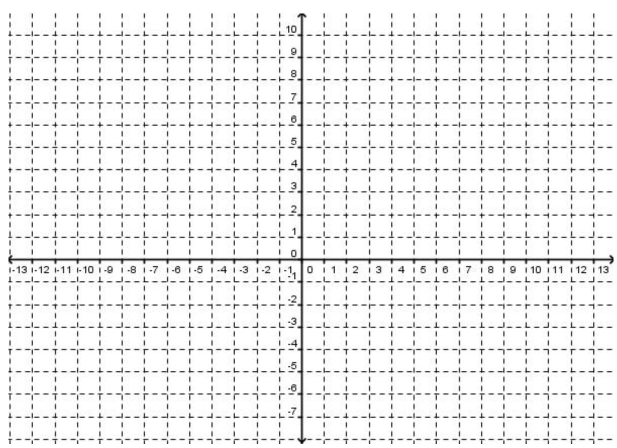
1. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, -2)$ y $B(1, 7)$.



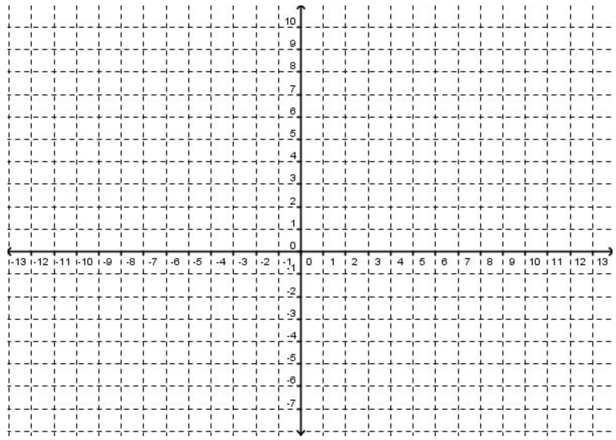
2. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,7)$ y $B(5,6)$.



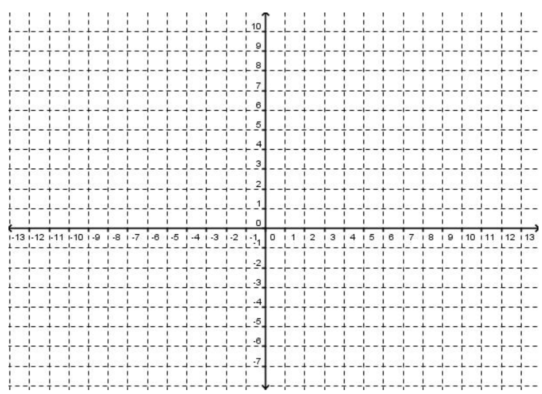
3. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,0)$ y $B(6,-4)$.



4. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(-3,3)$.

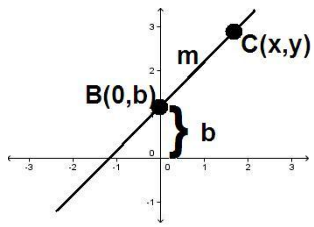


5. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,6)$ y $(-2,0)$.



4.4. Ecuación de una recta en su forma "pendiente y ordenada al origen"

Si se considera una recta l cuya pendiente es m y que pasa por el punto $B(0, b)$.



El punto en el que la recta l intersecta al eje de las ordenadas, se llama ordenada al origen.

Sustituyendo las coordenadas del punto $B(0, b)$ en:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Se obtiene la ecuación de la recta, en su forma de "pendiente - ordenada al origen" es

$y = mx + b$

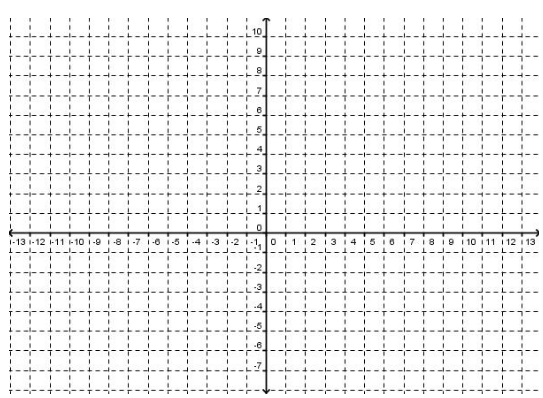
Ejemplo 1: Determina la pendiente y la ordenada al origen para la recta $3x + 5y - 9 = 0$

La ecuación que debemos obtener debe ser de la forma $y = mx + b$ por lo que es necesario despejar a y

$3x + 5y - 9 = 0$

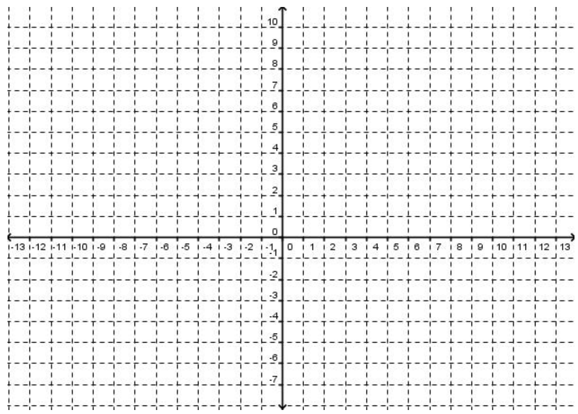
$5y = -3x + 9$
$y = \frac{-3}{5}x + \frac{9}{5}$

De la ecuación podemos obtener lo siguiente $m = \frac{-3}{5}$ y $b = \frac{9}{5}$, es decir la pendiente de la recta es $\frac{-3}{5}$ y la ordenada al origen es $\frac{9}{5}$

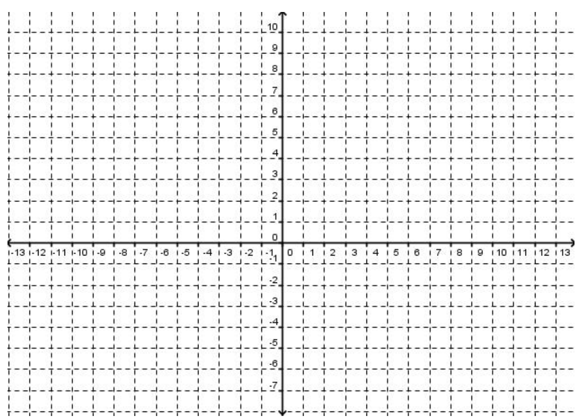


Ejercicio 4.3 Determina la pendiente, la ordenada al origen de las rectas siguientes y traza su gráfica.

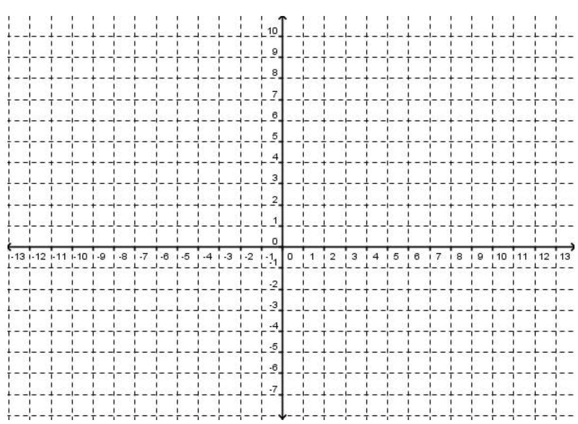
a) $x - y + 8 = 0$



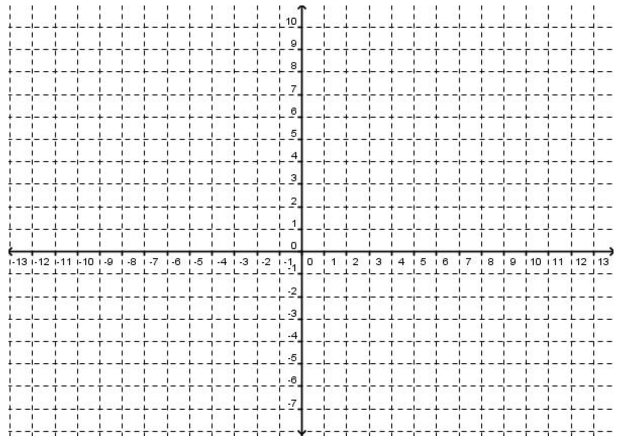
b) $x + y + 1 = 0$



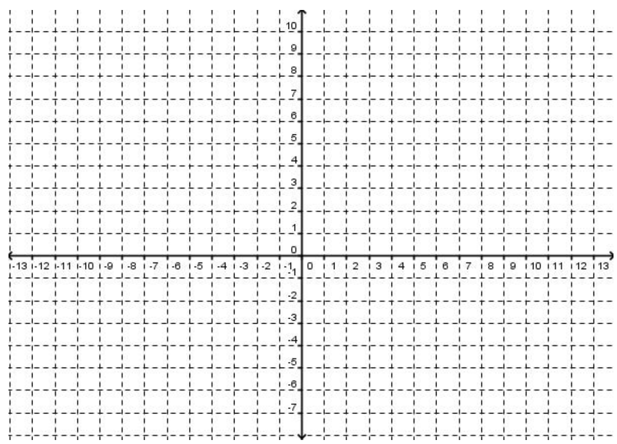
c) $x + y = 0$



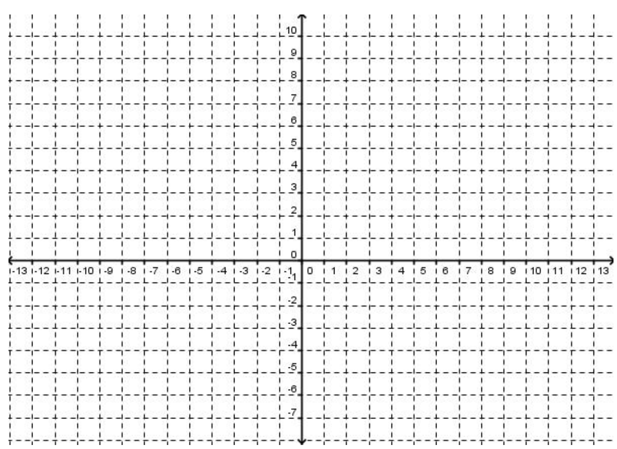
d) $x + 3y = 0$



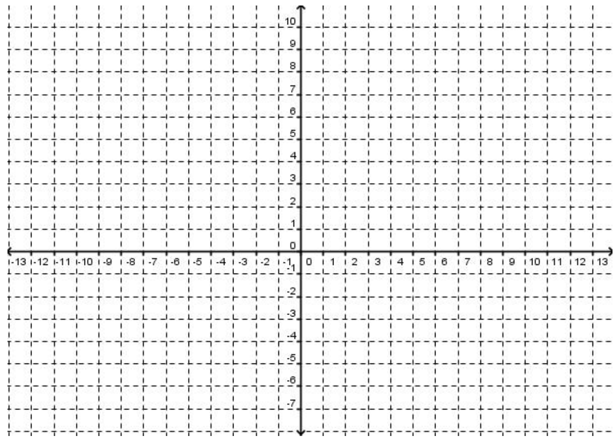
e) $3x + y - 3 = 0$



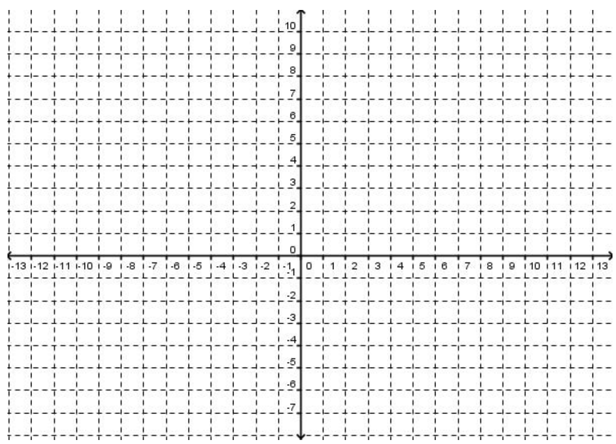
f) $9x - 8y + 11$



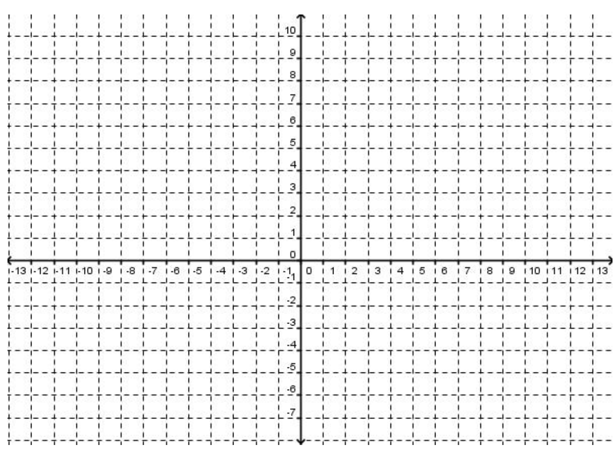
g) $3x + 6y + 7 = 0$



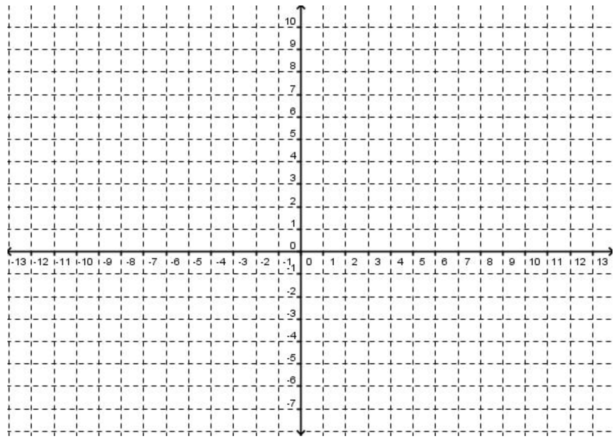
h) $-9x + 10y - 11 = 0$



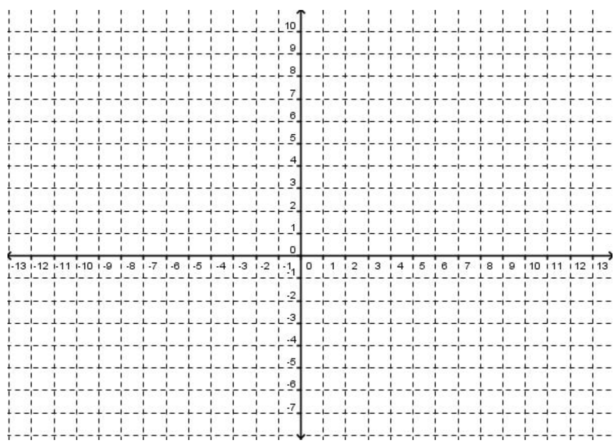
i) $-5x - 7y - 13 = 0$



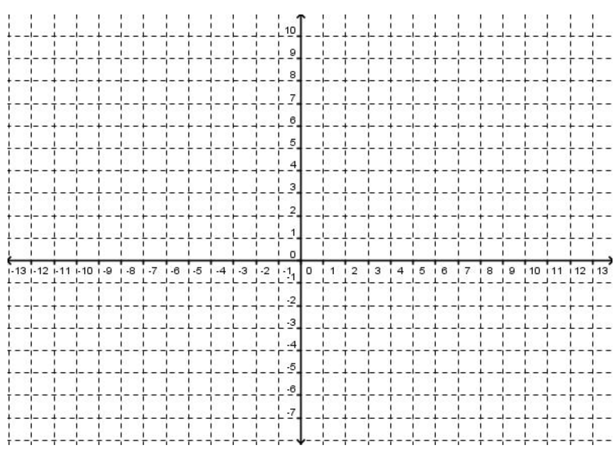
j) $11x + 10y - 9 = 0$



k) $5x - 7y + 21 = 0$

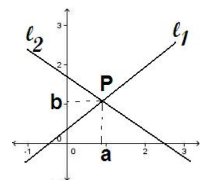


l) $-x + 12y + 13 = 0$



4.5. Intersección de dos rectas que se cortan

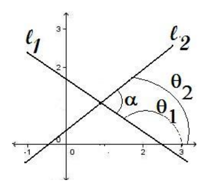
Sean las rectas l_1 y l_2 las que se muestran en la gráfica siguiente:



El punto de intersección P(a,b) está sobre las rectas l_1 y l_2. Para obtener el punto de intersección de manera algebraica, se resuelve el sistema de dos ecuaciones lineales que representan a las rectas.

4.6. Ángulo entre dos rectas que se cortan

Las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente y forman el ángulo α, como se muestra en la figura.



El ángulo α corresponde a:

$\measuredangle\alpha = \measuredangle\theta_2$ - $\measuredangle\theta_1$

$tan\alpha = tan(\theta_2 - \theta_1)$

$tan\alpha = \frac{tan\theta_2 - tan\theta_1}{1+tan\theta_2 \cdot \theta_1}\ m_1 \cdot m_2 \neq -1$

Sustituyendo a las tangentes con los respectivos símbolos se obtiene:

$tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1+m_2 \cdot m_1}\ m_1 \cdot m_2 \neq -1$

El ángulo se obtiene al calcular

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1+m_2 \cdot m_1}\right)\ m_1 \cdot m_2 \neq -1$

Ejemplo 1: Determina el ángulo que forman las rectas $2x + 3y - 1 = 0$ y $3x - 5y + 4 = 0$, y obtener las coordenadas del punto donde se intersectan.

De ambas rectas necesitamos obtener la pendiente.

Recta 1:

$2x + 3y - 1 = 0$

$3y = -2x + 1$

$y = \frac{-2x+1}{3}$

$y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$

$m = \frac{-2}{3}$ y $b = \frac{1}{3}$

Recta 2:

$3x - 5y + 4 = 0$

$-5y = -3x - 4$

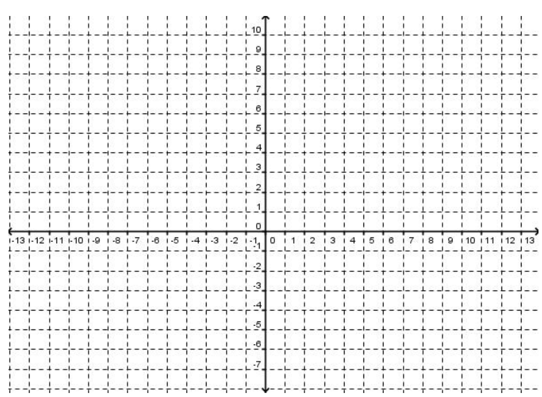
$y = \frac{-3x-4}{-5}$

$y = \frac{-3}{-5}x - \frac{4}{-5}$

$y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$

$m = \frac{3}{5}$ y $b = \frac{4}{5}$

Traza la grafica



Por la ubicación de las rectas.

$m_1 = \frac{-2}{3}$ y $m_2 = \frac{3}{5}$

Para determinar el ángulo sustituimos en la fórmula

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right)$ $m_1 \cdot m_2 \neq -1$

Primero comprobamos que el producto de las pendientes se diferente de -1

$m_1 \cdot m_2 \neq -1$

$(\frac{-2}{3})(\frac{3}{5}) \neq -1$

$\frac{-6}{15} \neq -1$

$\frac{-2}{5} \neq -1$

Sustituimos para obtener el ángulo

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right)$

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{5} - \frac{-2}{3}}{1 + (\frac{-2}{3})(\frac{3}{5})}\right)$

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}}{1 + (\frac{-2}{5})}\right)$

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{\frac{19}{15}}{1 - \frac{2}{5}}\right)$

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{\frac{19}{15}}{\frac{3}{5}}\right)$

$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{19}{9}\right)$

$\alpha = 64.65^o$

$\alpha = 64^o 39' 13''$

El punto donde se intersectan las rectas se obtiene al resolver el sistema que forman las rectas

$$\begin{cases} \text{2x+3y-1=0} \\ \text{3x-5y+4=0} \end{cases}$$

Acomodando el sistema tenemos

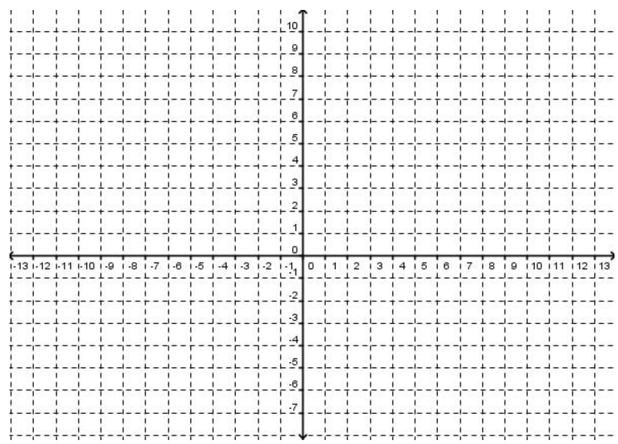
$$\begin{cases} \text{2x+3y=1} \\ \text{3x-5y=-4} \end{cases}$$

El sistema tiene solución en $x = -\frac{7}{19}$ y en $y = \frac{11}{19}$. Por lo que el punto de intersección donde se forma el ángulo es $(-\frac{7}{19}, \frac{11}{19})$

Ejercicio 4.4: Determina las coordenadas del punto de intersección y el ángulo que forman las rectas que tienen ecuaciones:

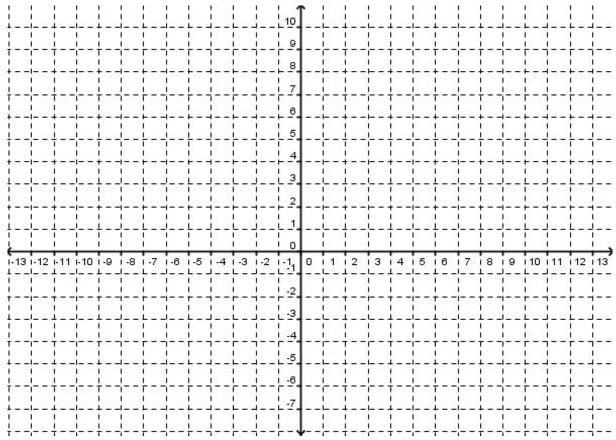
a)

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$



b)

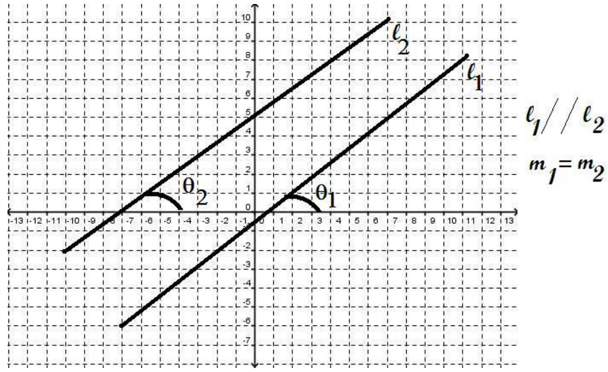
$$\begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$



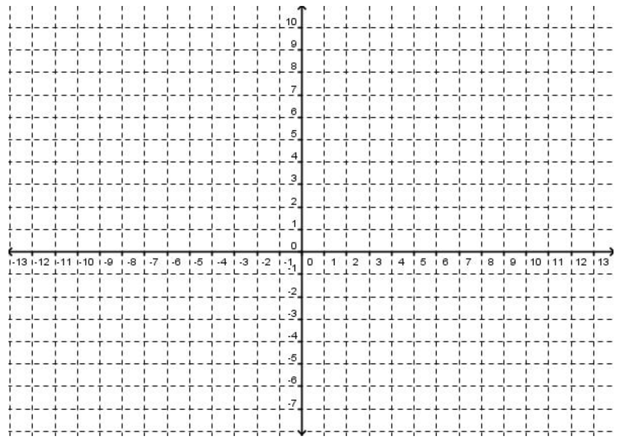
4.7. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

4.7.1. Rectas Paralelas

Definición: Dos rectas no verticales son paralelas si, y solamente si, sus pendientes son iguales.

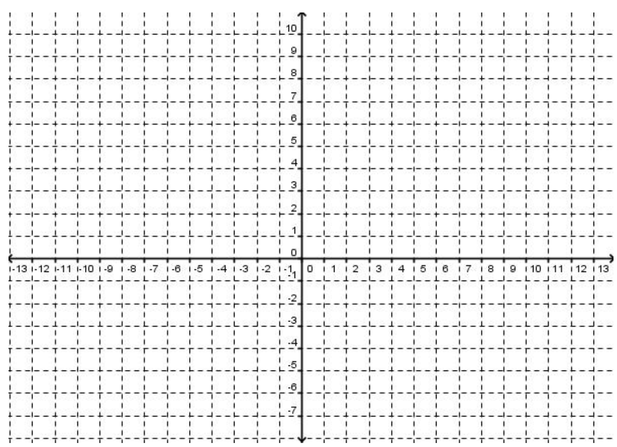


Ejemplo 1: Demostrar que los puntos $A(6,1)$, $B(5,7)$, $C(-4,3)$ y $D(-3,-3)$ son los vértices de un paralelogramo

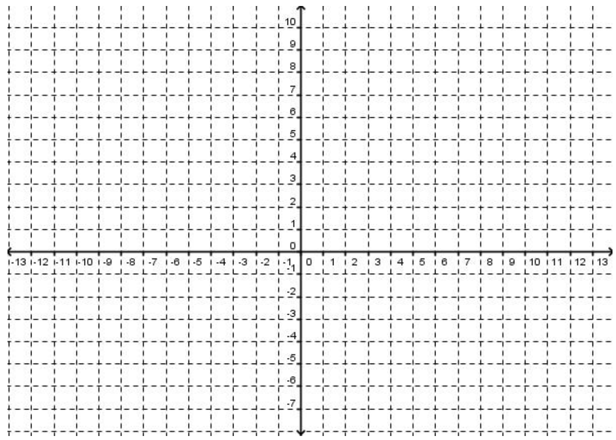


Ejercicio: 4.5

1. Demuestra que los puntos $A(-4,-3)$, $B(5,-3)$, $C(5,2)$ y $D(-4,2)$ son los vértices de un paralelogramo.

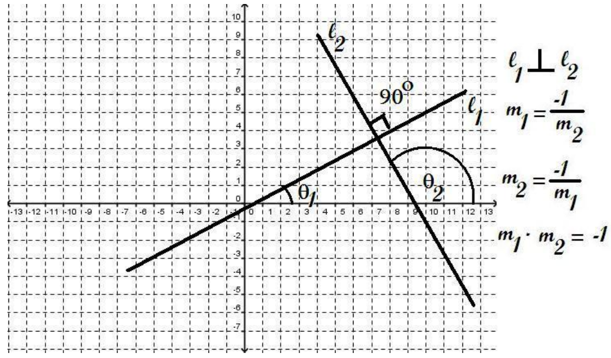


2. Demostrar que la recta l_1 que pasa por los puntos $A(-4,-5)$ y $B(8,3)$ es paralela a la recta l_2 que pasa por los puntos $C(0,-10)$ y $D(18,2)$.

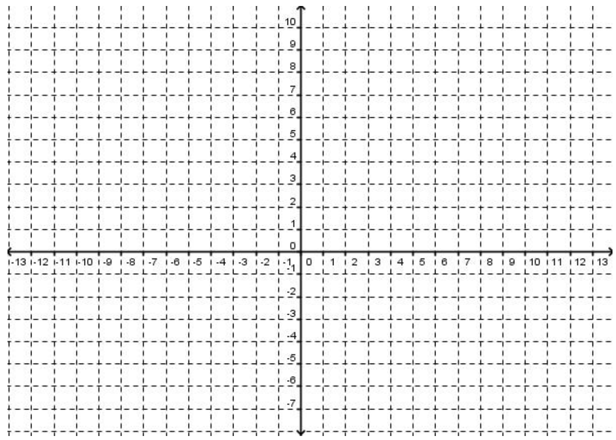


4.7.2. Rectas Perpendiculares

Definición: Dos rectas son perpendiculares si, y solamente si, la pendiente de una es la recíproca con signo contrario de la pendiente de la otra.

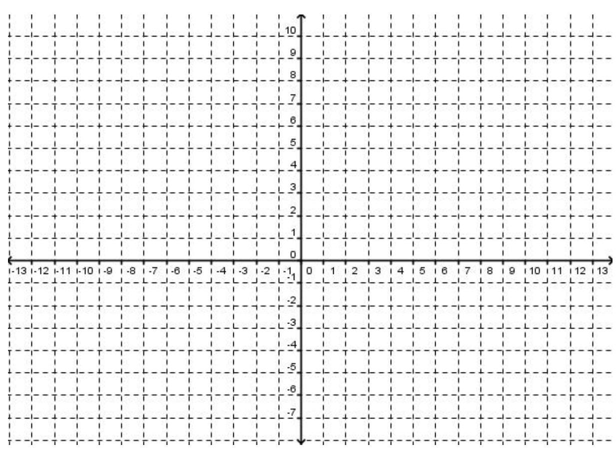


Ejemplo 1: Demostrar que la recta l_1 que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(-3,-5)$ es perpendicular a la recta l_2 que pasa por los puntos $C(3,2)$ y $D(-5,6)$

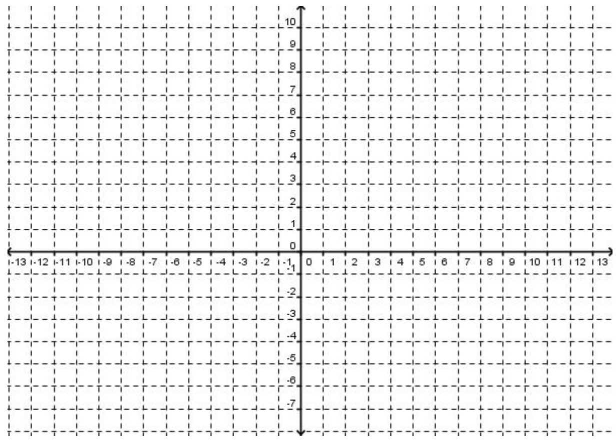


Ejercicio 4.6:

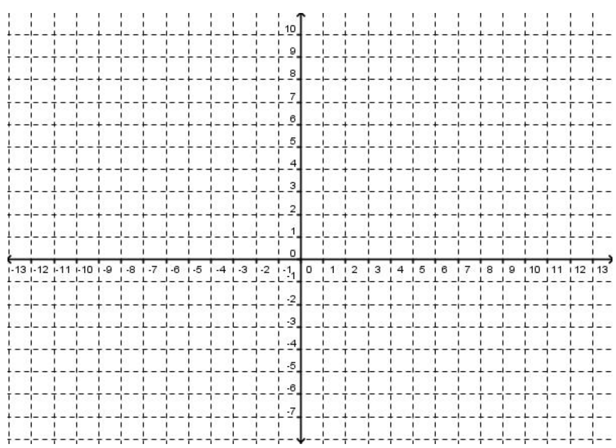
1. Aplicando el concepto de pendientes demuestra que el triángulo $A(3,1)$, $B(-2,5)$ y $C(-10,-5)$ es rectángulo.



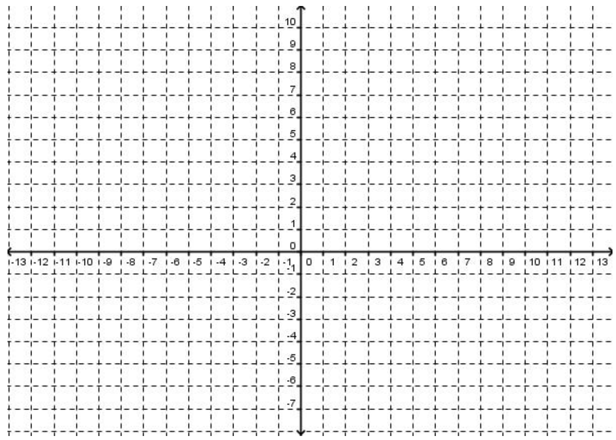
2. Utiliza las pendientes para demostrar que los puntos $A(2,-4)$, $B(4,0)$ y $C(8,-2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.



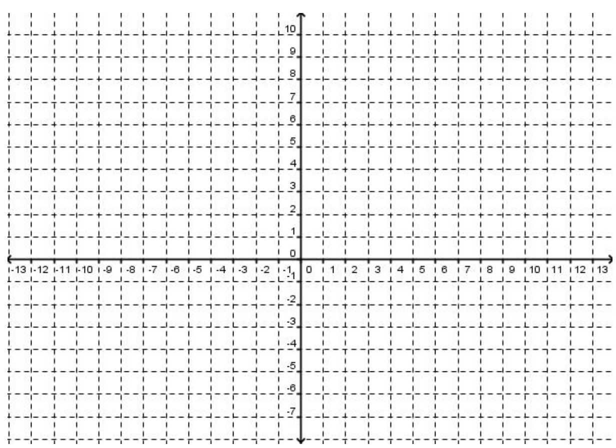
3. Utiliza las pendientes para demostrar que los puntos $A(1,1)$, $B(3,3)$ y $C(4,-2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.



4. Aplicando el concepto de pendientes demuestra que el triángulo $A(4,3)$, $B(6,-2)$ y $C(-11,-3)$ es rectángulo.

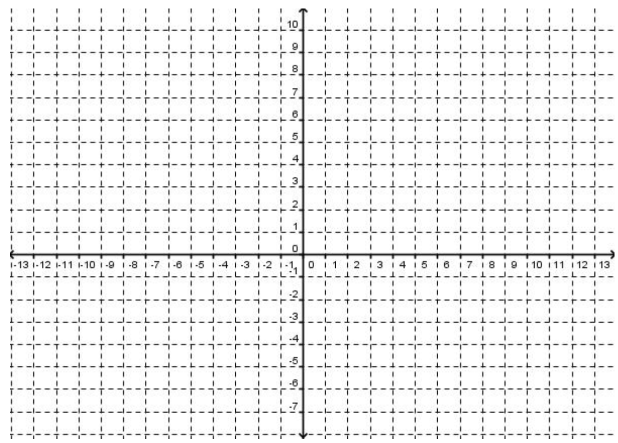


Ejemplo 1 Determina la ecuación de dos rectas que pasan a través de $A(4,1)$, una paralela y otra perpendicular a la recta $2x-3y+5=0$

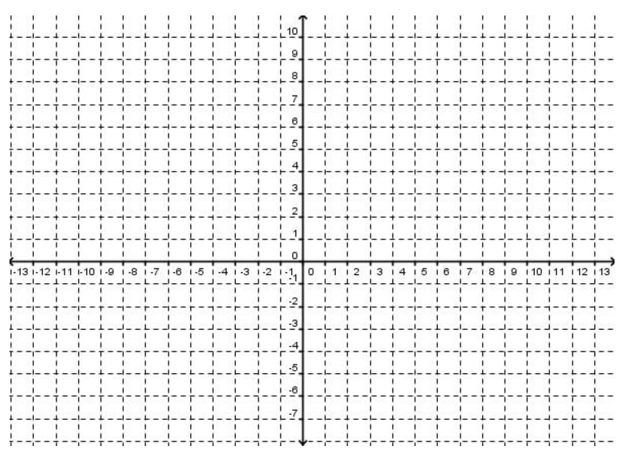


Ejercicios 4.7:

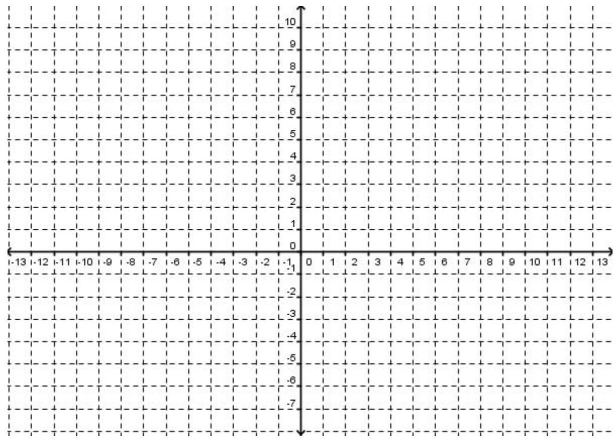
1. Determina la ecuación de dos rectas que pasan a través de $A(3,4)$, una paralela y otra perpendicular a la recta $7x+5y+4=0$



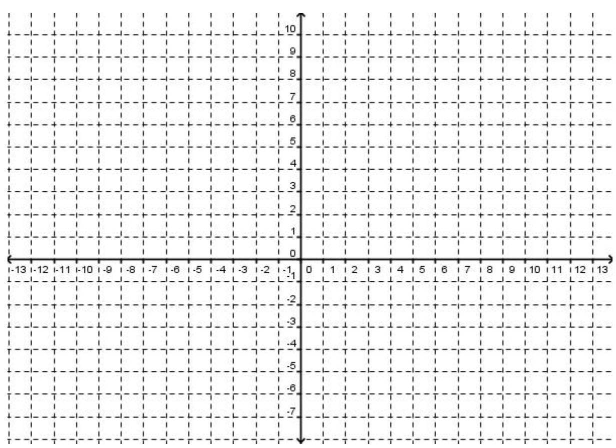
2. Determina la ecuación de dos rectas que pasan a través de $A(-1,2)$, una paralela y otra perpendicular a la recta $2x-y=0$



3. Determina la ecuación de dos rectas que pasan a través de $A(-4, 0)$, una paralela y otra perpendicular a la recta $4x + 3y - 2 = 0$



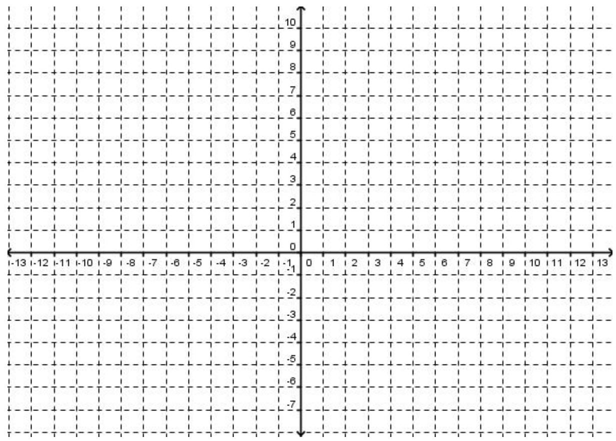
4. Determina la ecuación de dos rectas que pasan a través de $A(4, 1)$, una paralela y otra perpendicular a la recta $2x - 3y + 5 = 0$



5. La pendiente de la recta es 2. Determina:

   a) La ecuación de la recta paralela a ésta que pasa por $A(3,4)$.

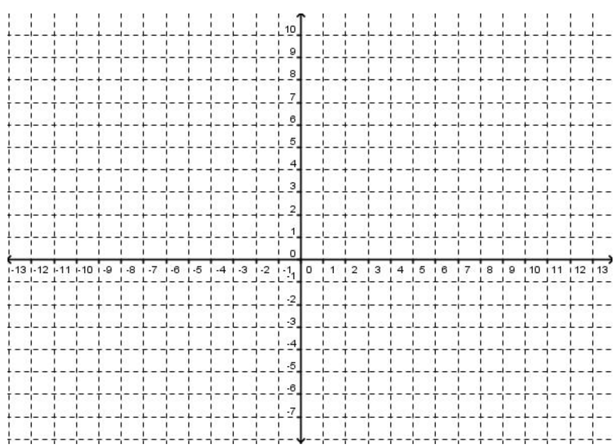
   b) La ecuación de la recta perpendicular a ésta que pasa por $A(3,4)$.



6. La pendiente de la recta es -3. Determina:

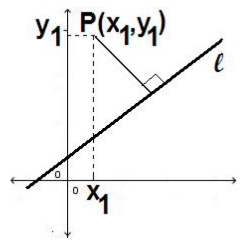
   a) La ecuación de la recta paralela a ésta que pasa por $B(-1,0)$.

   b) La ecuación de la recta perpendicular a ésta que pasa por $B(-1,0)$.



4.8. Distancia de un punto a una recta

Supongamos que se tiene una recta l y un punto $P(x_1, y_1)$ fuera de la recta.



La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta l que tiene como ecuación $Ax+By+C=0$ se define como la longitud del segmento perpendicular a la recta que llega al punto y se determina con la expresión:

$d = |\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}|$

Ejemplo 1 Determina la distancia del punto $P(-8, 4)$ a la recta $2x-y+5=0$ y traza la grafica

x_1	y_1	A	B	C
P(-8	,4)	2x	-y	+5=0

Al sustituir en la formula

$d = |\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}|$

$d = |\frac{2(-8)-1(4)+5}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}|$

$d = |\frac{-16-4+5}{\sqrt{4+1}}|$

$d = |\frac{-15}{\sqrt{5}}|$

$d = \frac{15}{\sqrt{5}}$

Para simplificar el resultado convertimos al 15 en un producto de 3 por 5

$d = \frac{3\cdot 5}{\sqrt{5}}$

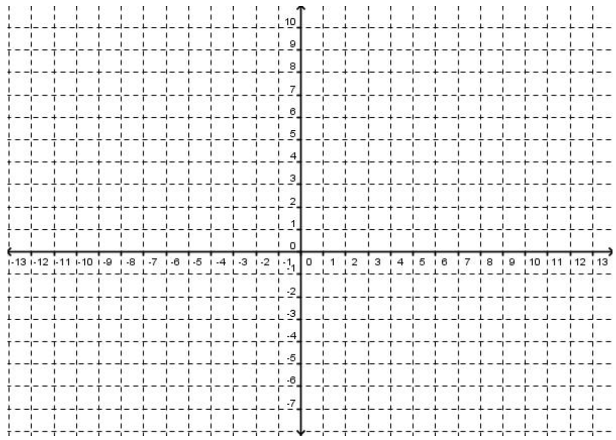
Como $\sqrt{5}\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5$ descomponemos al 5 en un producto de raices

$d = \frac{(3)(\sqrt{5})(\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$

Simplificando

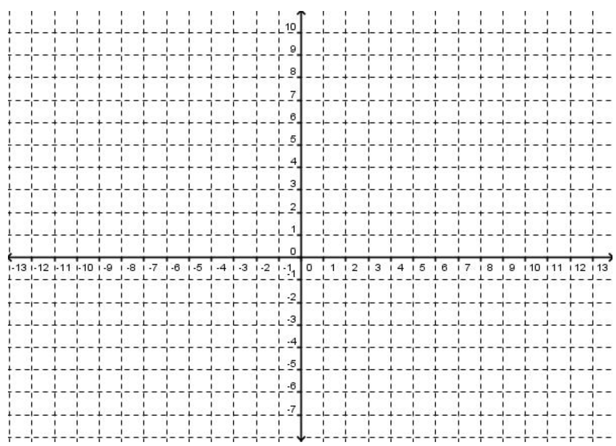
$d = 3\sqrt{5}$

Trazamos la gráfica.

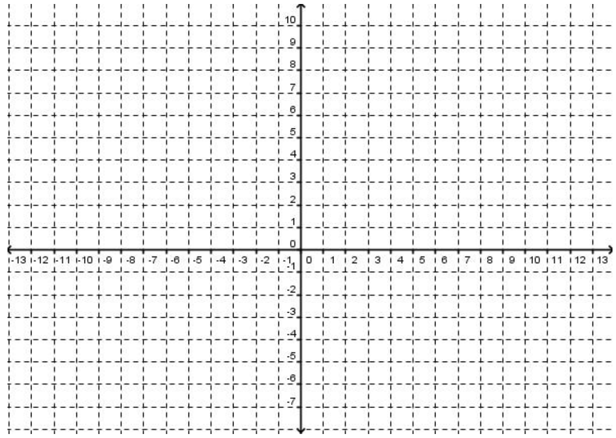


Ejercicio 4.8:

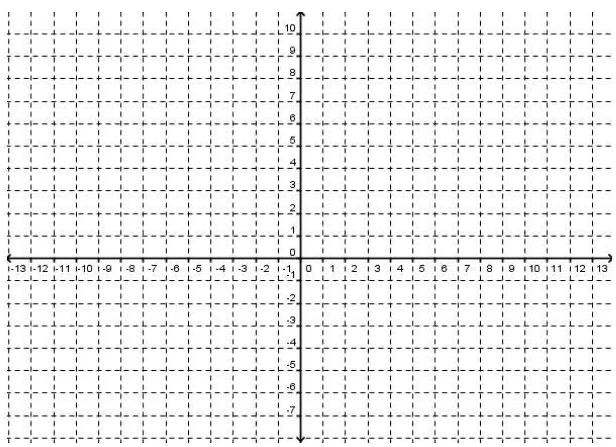
1. Determina la distancia del punto P(6,4) a la recta $3x + 4y - 40 = 0$ y traza la gráfica.



2. Determina la distancia del punto P(-3,7) a la recta $y = \frac{1}{2}x + 10$ y traza la gráfica.

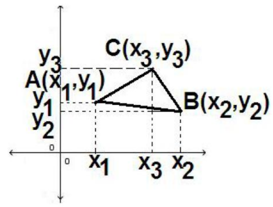


3. Determina la distancia del punto P(1,0) a la recta $x = -4$ y traza la gráfica.



4.9. Área de un triángulo

Se tiene un triángulo cuyos vértices son A, B y C.



Para obtener el área del triángulo, se puede utilizar la fórmula de:

$Area_{\Delta}=\frac{(base)(altura)}{2}$

La base puede ser cualquier lado, por ejemplo AC. Al considerar éste lado, la altura correspondiente es el segmento perpendicular a dicho lado desde el vértice opuesto (B).

Si se considera como base al lado AB, la altura correspondiente es el segmento perpendicular a dicho lado desde el vértice opuesto (C).

Finalmente, si se considera como base al lado BC, la altura correspondiente es el segmento perpendicular a dicho lado desde el vértice opuesto (A).

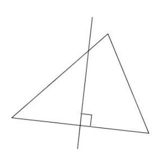
Se puede determinar la longitud de cualquiera de las tres alturas, evaluando la distancia del vértice al lado opuesto (distancia de la recta a un punto).
Además el área del triángulo también puede calcularse de la siguiente forma:

Sean los vértices del triángulo, leídos en sentido contrario al de las manecillas del reloj, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ el área del triángulo puede obtenerse al resolver:

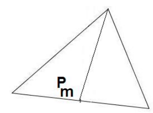
$$Area_{\Delta}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

4.10. Ecuaciones de las rectas y puntos notables en todo triángulo

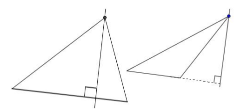
Mediatriz: Es la recta perpendicular a un lado de un triángulo (o a cualquier segmento de recta) y que pasa por su punto medio.



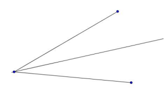
Mediana: Es el segmento de recta que une cualquier vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.



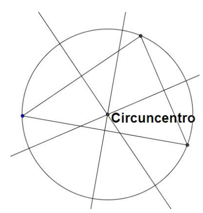
Altura: Es el segmento de recta que une un vértice de un triángulo con su lado opuesto o su prolongación, formando un ángulo de 90^o.



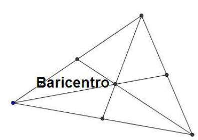
Bisectriz: Es el segmento de recta que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes.



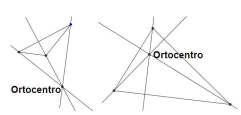
Circuncentro: Es el punto donde se intersectan las tres mediatrices de los lados de un triángulo y es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.



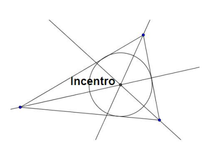
Baricentro: Es el punto donde se intersectan las tres medianas de un triángulo.



Ortocentro: Es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo, se encuentra dentro del triángulo si es acutángulo, coincide con el vértice del ángulo recto si es rectángulo o fuera si es obtusángulo.



Incentro: Es el punto donde se intersectan las tres bisectrices y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, y equidista de sus tres lados.



Ejemplo 1: En el triángulo formado por los puntos $A(-4,-3)$, $B(6,1)$ y $C(4,11)$.

a) Determina el área del triángulo.

b) Determina las ecuaciones de las mediatrices.

c) Determina las coordenadas del punto de intersección de las mediatrices (Circuncentro).

d) Traza la gráfica de las mediatrices y dibuja la circunferencia circunscrita.

e) Determina las ecuaciones de las medianas.

f) Determina las coordenadas del punto de intersección de las medianas (Baricentro).

g) Traza la gráfica de las medianas.

h) Determina la ecuación de las alturas.

i) Determina el punto de intersección de las alturas (Ortocentro).

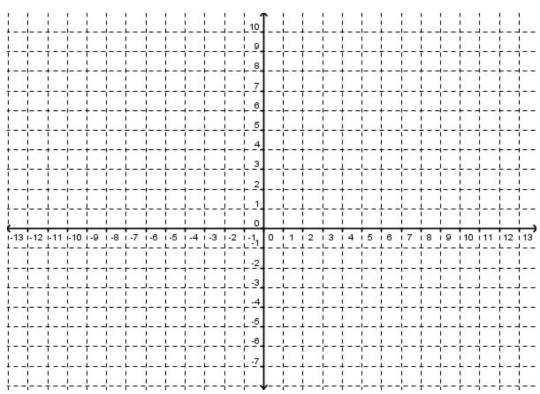
j) Traza la gráfica de las alturas.

a) Determina el área del triángulo.

Los vértices son $A(-4,-3)$, $B(6,1)$ y $C(4,11)$.

Se sabe que $Area_{\Delta}=\frac{(base)(altura)}{2}$

Trazamos la gráfica del triángulo



Si la base es la distancia del punto $A(-4,-3)$ al punto $B(6,1)$:

Base$=d_{AB}$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es:

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & y_1 & & x_2 & y_2 \\ A(-4, & -3) & \text{y} & B(6, & 1) \end{array}$$

$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$

$y - (-3) = \frac{1-(-3)}{6-(-4)}(x - (-4))$

$y + 3 = \frac{1+3}{6+4}(x + 4)$

$y + 3 = \frac{4}{10}(x + 4)$

$y + 3 = \frac{2}{5}(x + 4)$

$5(y + 3) = 2(x + 4)$

$5y + 15 = 2x + 8$

$2x - 5y + 8 - 15 = 0$

$2x - 5y - 7 = 0$

La altura del triángulo es la distancia del punto $C(4, 11)$ a la recta $2x - 5y - 7 = 0$

Por lo que el área del triángulo es:

$Area_\Delta = \frac{(base)(altura)}{2}$

Podemos comparar si obtenemos el mismo resultado del calculo del área del triángulo utilizando la fórmula

$$Area_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

El área del triángulo es $54u^2$

b) Determina la ecuación de las mediatrices.

Mediatriz AB

Determina el punto medio de A y B

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & y_1 & & x_2 & y_2 \\ A(& -4, & -3) & \text{y} & B(6, & 1) \end{array}$$

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$P_m\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$$

$$P_m\left(\frac{2}{2}, \frac{-2}{2}\right)$$

$P_m(1, -1)$

La pendiente de A y B

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Determina la pendiente perpendicular

$m_{\perp} = \frac{-1}{m}$

$m_{\perp AB} = \frac{-1}{\frac{2}{5}}$

$m_{\perp AB} = \frac{-5}{2}$

Determina la ecuación de la mediatriz de AB con el punto medio de AB y la pendiente perpendicular

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & y_1 & \\ Pm_{AB}(& 1, & -1) & \text{y} \quad m_{\perp AB} = \frac{-5}{2} \end{array}$$

La ecuación de la mediatriz es $5x + 2y - 3 = 0$

Mediatriz AC

Determina el punto medio de A y C

$$\overset{x_1}{A(-4,} \quad \overset{y_1}{-3)} \quad \text{y} \quad \overset{x_2}{C(4,} \quad \overset{y_2}{11)}$$

Determina la pendiente de AC

La pendiente perpendicular de AC

Determina la ecuación de la mediatriz de AC con el punto medio de AC y la pendiente perpendicular

$$\overset{x_1}{Pm_{AC}(0,} \quad \overset{y_1}{4)} \quad \text{y} \quad m_{\perp AB} = \frac{-4}{7}$$

La ecuación de la mediatriz es $4x + 7y - 28 = 0$

Mediatriz BC

Determina el punto medio de B y C

$$\overset{x_1}{B(6,} \quad \overset{y_1}{1)} \quad \text{y} \quad \overset{x_2}{C(4,} \quad \overset{y_2}{11)}$$

Determina la pendiente de BC

La pendiente perpendicular de BC

Determina la ecuación de la mediatriz de BC con el punto medio de BC y la pendiente perpendicular

$$Pm_{AC}(\overset{x_1}{5}, \quad \overset{y_1}{6}) \quad \text{y} \quad m_{\perp BC} = \frac{1}{5}$$

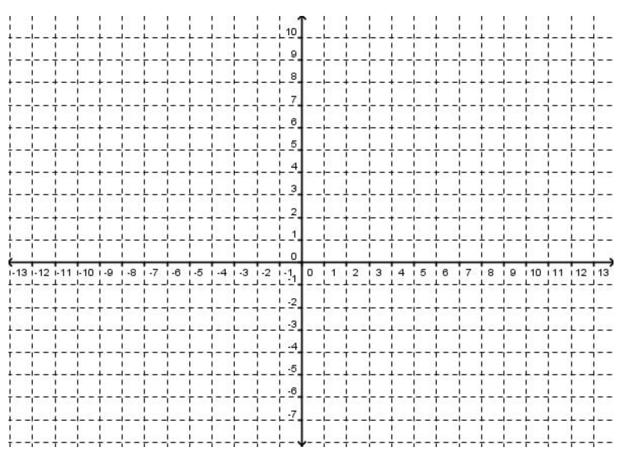
La ecuación de la mediatriz es BC es:

c) Determina el punto de intersección de las mediatrices (Circuncentro).
Tomamos las mediatrices de AB y AC para calcular su intersección

$$\begin{cases} \text{5x+2y-3=0} \\ \text{4x+7y-28=0} \end{cases}$$

El circuncentro está en $(-\frac{35}{27}, \frac{128}{27})$

d) Traza la gráfica de las mediatrices y dibuja la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.



e) Determina la ecuación de las medianas.

Mediana AC

La mediana de AC es la recta que pasa por el punto medio de AC y por el vértice B

$$\begin{array}{lccclcc} & x_1 & y_1 & & & x_2 & y_2 \\ Pm_{AC}(& 0, & 4) & \text{y} & B(& 6, & 1) \end{array}$$

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

La mediana de AC es $x + 2y - 8 = 0$

Mediana BC

La mediana de BC es la recta que pasa por el punto medio de BC y por el vértice A

$$\begin{array}{lccclcc} & x_1 & y_1 & & & x_2 & y_2 \\ Pm_{BC}(& 5, & 6) & \text{y} & A(& -4, & -3) \end{array}$$

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

La mediana de BC es $x - y + 1 = 0$

Mediana AB

La mediana de AB es la recta que pasa por el punto medio de AB y por el vértice C

$$\begin{array}{lccclcc} & x_1 & y_1 & & & x_2 & y_2 \\ Pm_{AB}(& 1, & -1) & \text{y} & C(& 4, & 11) \end{array}$$

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

La mediana de AB es:

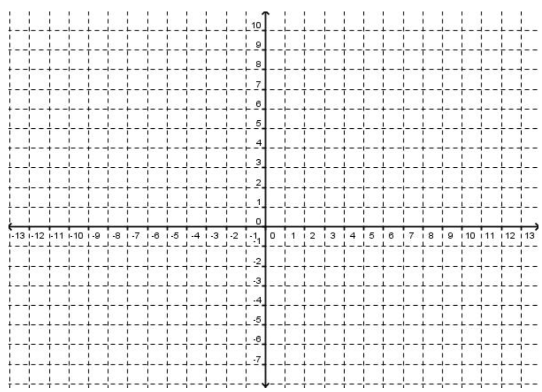
f) Determina el punto de intersección de las medianas (Baricentro).

Tomamos las medianas de BC y AC para calcular su intersección

$$\begin{cases} \text{x-y+1=0} \\ \text{x+2y-8=0} \end{cases}$$

El Baricentro está en $(2,3)$

g) Traza la gráfica de las medianas.



h) Determina la ecuación de las alturas.

Altura AB

Determina la ecuación de la altura de AB con el punto C y la pendiente perpendicular de AB

$$\begin{array}{ll} \quad x_1 & y_1 \\ C(4, & 11) \end{array} \quad \text{y} \quad m_{\perp AB} = -\frac{5}{2}$$

La ecuación de la altura AB es $5x + 2y - 42 = 0$

Altura AC

Determina la ecuación de la altura de AC con el punto B y la pendiente perpendicular de AC

$$\begin{array}{ll} & x_1 \quad y_1 \\ & B(6, \quad 1) \quad \text{y} \quad m_{\perp AC} = -\tfrac{4}{7} \end{array}$$

La ecuación de la altura AC es $4x + 7y - 31 = 0$

Altura BC

Determina la ecuación de la altura de BC con el punto A y la pendiente perpendicular de BC

$$\begin{array}{ll} & x_1 \quad y_1 \\ & A(-4, \quad -3) \quad \text{y} \quad m_{\perp BC} = \tfrac{1}{5} \end{array}$$

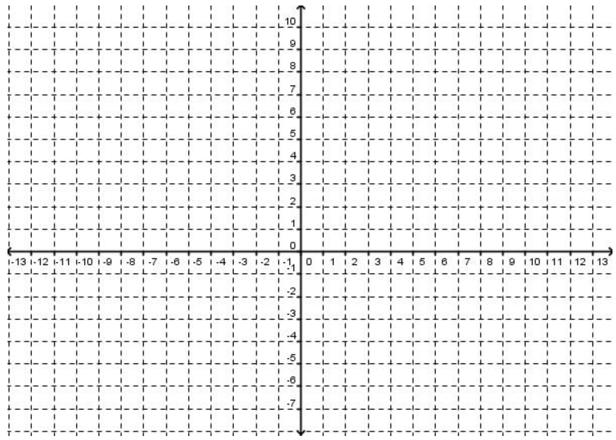
La ecuación de la altura BC es:

i) Determina el punto de intersección de las alturas (Ortocentro).
Tomamos las alturas de AB y AC para calcular su intersección

$$\begin{cases} \text{5x+2y-42=0} \\ \text{4x+7y-31=0} \end{cases}$$

El Baricentro está en $(\frac{232}{27}, -\frac{13}{27})$

j) Traza la gráfica de las alturas.



Ejercicios 4.9 En el triángulo formado por los puntos $A(-2,3)$**,** $B(2,-3)$ **y** $C(6,5)$.

a) Determina el área del triángulo.

b) Determina la ecuación de las mediatrices.

c) Determina el punto de intersección de las mediatrices (Circuncentro).

d) Traza la gráfica de las mediatrices y dibuja la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

e) Determina la ecuación de las medianas.

f) Determina el punto de intersección de las medianas (Baricentro).

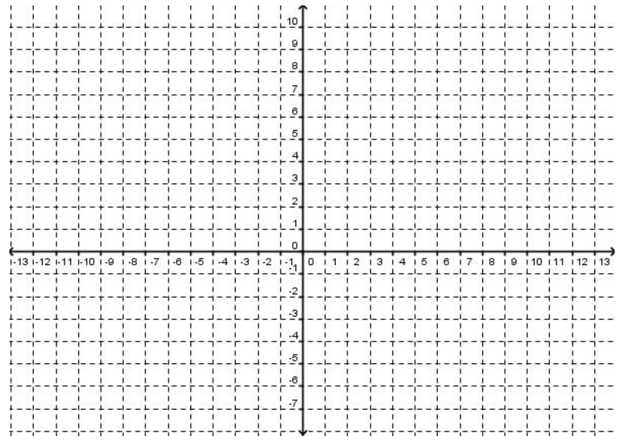
g) Traza la gráfica de las medianas.

h) Determina la ecuación de las alturas.

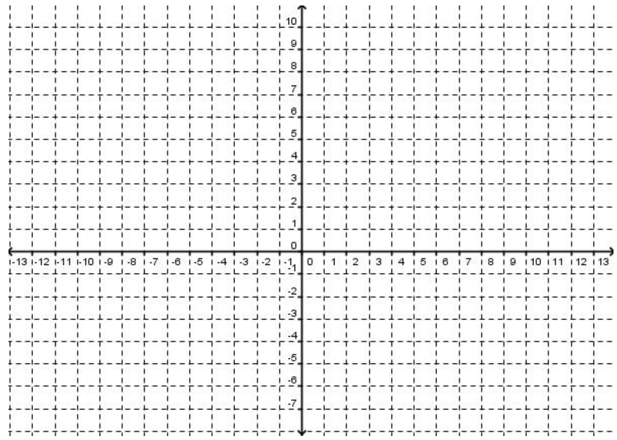
i) Determina el punto de intersección de las alturas (Ortocentro).

j) Traza la gráfica de las alturas.

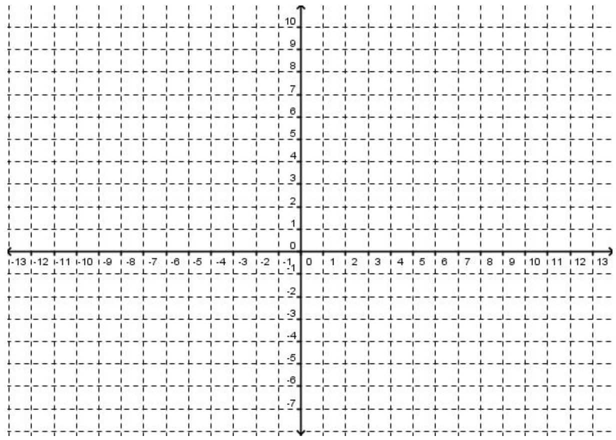
Mediatrices



Medianas



Alturas



Capítulo 5

UNIDAD 4 - LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Definición de la parábola como lugar geométrico: La parábola es el conjunto de puntos del plano que equidistan de una recta fija D llamada directriz y un punto fijo F que no está en ella llamado foco.

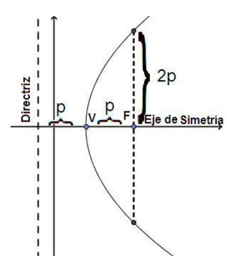
5.1. Elementos de la parábola

La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama eje de simetría S o eje focal de la parábola.

El punto que se encuentra a la mitad del foco y la directriz se llama vértice V y pertenece a la parábola porque está a la misma distancia del foco y de la directriz.

La longitud que hay entre el vértice y el foco se denomina distancia focal o parámetro p.

El segmento de recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría, que mide $2p$ a partir el foco hacia arriba y $2p$ hacia abajo se llama ancho focal o lado recto de la parábola LR.



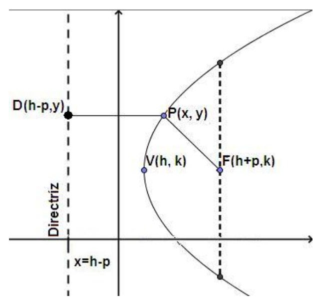
Definición analítica de la parábola: Es el conjunto de todos los puntos P situados en el plano, y donde P no está en D, que equidistan de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija D llamada directriz, que no contiene a F, es decir está definida por la ecuación:

$d(P,F) = d(P,D)$

5.2. Ecuación de la parábola en forma ordinaria, con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo al eje x (horizontal)

La definición de la parábola establece que si P(x,y) es un punto de la misma, la distancia del foco F al punto P ($\overline{PF}$) es igual a la distancia de P a la recta fija llamada directriz ($\overline{PD}$).

Sea $\overline{PD} = \overline{PF}$, como se muestra en la figura, el eje de simetría es paralelo al eje x y las coordenadas del vértice son $V(h,k)$.



$$\overline{PD} = \sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2} = \sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos términos tenemos

$$\left(\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-p)]^2+(y-y)^2 = [x-(h+p)]^2+(y-k)^2$$

Desarrollando los paréntesis tenemos

$$(x-h+p)^2+(0)^2 = (x-h-p)^2+(y-k)^2$$

$$(x-h+p)^2 = (x-h-p)^2+(y-k)^2$$

Desarrollando los cuadrados tenemos

$$x^2+h^2+p^2-2hx+2px-2hp = x^2+h^2+p^2-2hx-2px+2hp+(y-k)^2$$

$$x^2+h^2+p^2-2hx+2px-2hp-x^2-h^2-p^2+2hx+2px-2hp = (y-k)^2$$

$$4px-4hp = (y-k)^2$$

$(y-k)^2 = 4px - 4hp$

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Está es la ecuación de la parábola en su forma ordinaria, con eje de simetría paralelo al eje x, cuyos elementos son:

El Vértice tiene coordenadas $V(h,k)$

El Foco tiene coordenadas $F(h+p,k)$

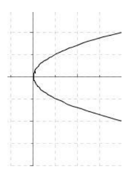
La ecuación de la directriz $x = h - p$

La ecuación del eje de simetría $y = k$

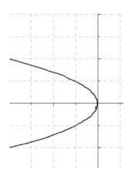
La longitud del lado recto o ancho focal $LR = |4p|$

La orientación y curvatura de la parábola está determinada por los signos y la magnitud de p, es decir:

Para una parábola horizontal si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha.



Si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda.

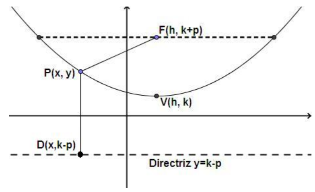


De la ecuación de la parábola en la forma ordinaria se conoce: h, k y p para determinar los otros elementos de la curva.

5.3. Ecuación de la parábola en forma ordinaria, con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo al eje y (vertical)

La definición de la parábola establece que si P(x,y) es un punto de la misma, la distancia del foco F al punto P ($\overline{PF}$) es igual a la distancia de P a la recta fija llamada directriz ($\overline{PD}$).

Sea $\overline{PD} = \overline{PF}$, como se muestra en la figura, el eje de simetría es paralelo al eje y y las coordenadas del vértice son $V(h, k)$.



$\overline{PD} = \sqrt{(x-x)^2 + [y-(k-p)]^2}$

$\overline{PF} = \sqrt{(x-h)^2 + [y-(k+p)]^2}$

$\sqrt{(x-x)^2 + [y-(k-p)]^2} = \sqrt{(x-h)^2 + [y-(k+p)]^2}$

Elevando al cuadrado ambos términos tenemos

$\left(\sqrt{(x-x)^2 + [y-(k-p)]^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-h)^2 + [y-(k+p)]^2}\right)^2$

$(x-x)^2 + [y-(k-p)]^2 = (x-h)^2 + [y-(k+p)]^2$

Desarrollando los paréntesis tenemos
$(0)^2 + (y-k+p)^2 = (x-h)^2 + (y-k-p)^2$

$(y-k+p)^2 = (x-h)^2 + (y-k-p)^2$

Desarrollando los cuadrados tenemos

$y^2 + k^2 + p^2 - 2ky + 2py - 2kp = (x-h)^2 + y^2 + k^2 + p^2 - 2ky - 2py + 2kp$

$y^2 + k^2 + p^2 - 2ky + 2py - 2kp - y^2 - k^2 - p^2 + 2ky + 2py - 2kp = (x-h)^2$

$4py - 4kp = (x-h)^2$

$(x-h)^2 = 4py - 4kp$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Ésta es la ecuación de la parábola en su forma ordinaria, con eje de simetría paralelo al eje y, cuyos elementos son:

El Vértice tiene coordenadas $V(h, k)$

El Foco tiene coordenadas $F(h, k+p)$

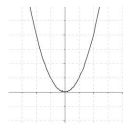
La ecuación de la directriz $y = k - p$

La ecuación del eje de simetría $x = h$

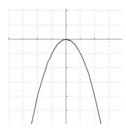
La longitud del lado recto o ancho focal $LR = |4p|$

La orientación y curvatura de la parábola está determinada por los signos y la magnitud de p, es decir:

Para una parábola vertical si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba.



Si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.



De la ecuación de la parábola en la forma ordenaría se conoce: h, k y p para determinar los otros elementos de la curva.

5.4. Representación gráfica de una parábola dada su ecuación en forma ordinaria

Por simple inspección de la ecuación de una parábola en su forma ordinaria, es posible determinar si es horizontal o vertical, las coordenadas del vértice, si p es positivo o negativo, y con ello saber si abre a la derecha o izquierda en caso de ser horizontal o hacia arriba o hacia abajo en caso de ser vertical.

Ejemplo 1: A partir de la ecuación ordinaria de la parábola dada, indica las coordenadas del vértice, si se trata de una parábola horizontal o vertical, si $p > 0$ o $p < 0$ y bosqueja la gráfica.

$(y + 2)^2 = 8(x - 5)$

Como el término que está elevado al cuadrado es y, la ecuación es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, que corresponde a la ecuación en forma ordinaria de la parábola vertical.

Al comparar término a término tenemos

$(y + 2)^2 = 8(x - 5)$

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

El Vértice tiene coordenadas $V(h, k)$, en este caso, $V(5, -2)$

Para determinar si p es positiva o negativa tenemos

$4p = 8$

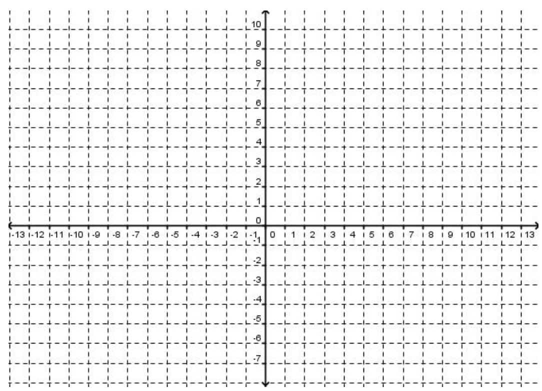
Despejando a p tenemos

$4p = 8$

$p = \frac{8}{4}$

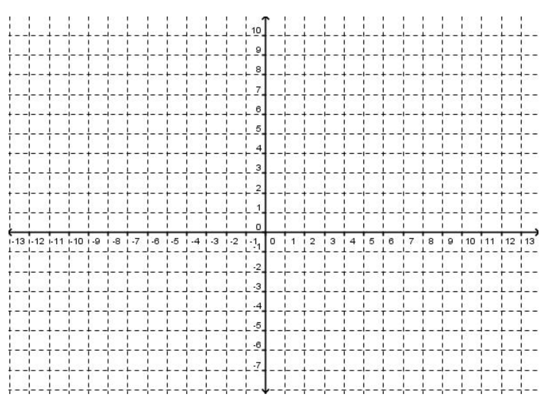
$p = 2$

El signo de p es positivo, y la parábola es horizontal, entonces abre hacia la derecha, tiene vértice en $V(5, -2)$

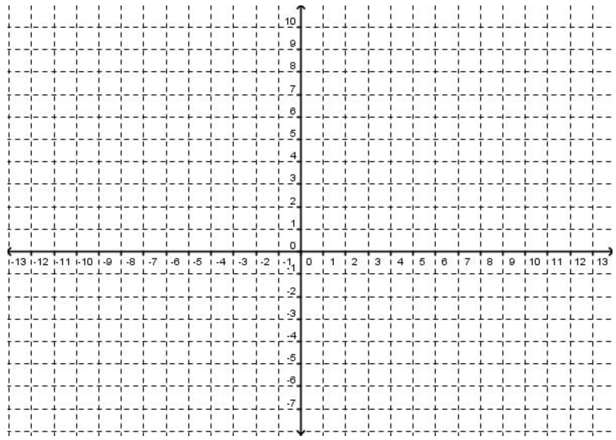


Ejercicio 5.1: A partir de la ecuación ordinaria de la parabola dada, indica las coordenadas del vértice, si se trata de una parábola horizontal o vertical, si $p > 0$ o $p < 0$ y bosqueja la gráfica.

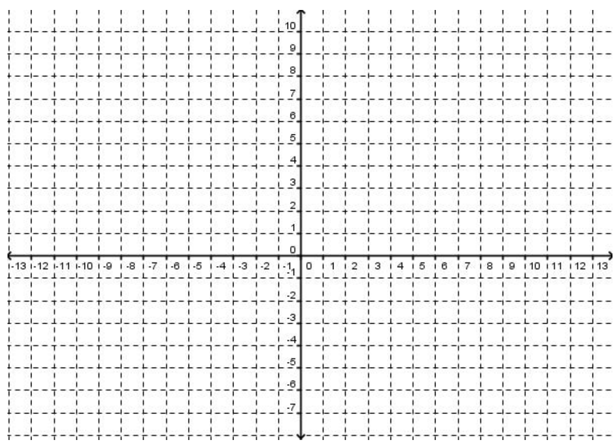
a)$(y - 3)^2 = 4(x - 3)$



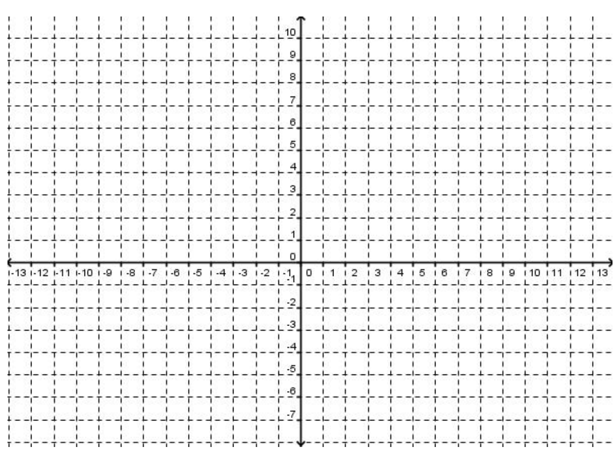
b) $(x+4)^2 = -2(y-4)$



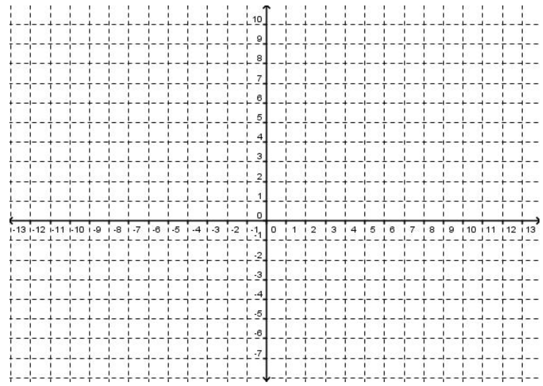
c) $(y+5)^2 = -5(x+7)$



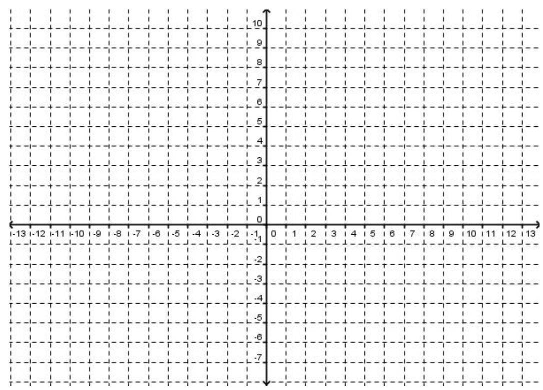
d) $(x-8)^2 = -6(y+7)$



e)$(x-5)^2 = 10(y-4)$



f)$(y+1)^2 = 5(x-3)$



5.5. Ecuación General de la Parábola

La forma general de la ecuación de una parábola se obtiene desarrollando la forma ordinaria.

5.5.1. Parábola Horizontal

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Al desarrollar el binomio al cuadrado y efectuar las operaciones indicadas:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4hp$

$y^2 - 2ky + k^2 - 4px + 4hp = 0$

$y^2 + (-4p)x + (-2k)y + k^2 + 4hp = 0$

Que corresponde a la forma $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

A ésta ecuación se le conoce como la forma general de la parábola horizontal.

5.5.2. Parábola Vertical

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Al desarrollar el binomio al cuadrado y efectuar las operaciones indicadas:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4kp$

$x^2 - 2hx + h^2 - 4py + 4kp = 0$

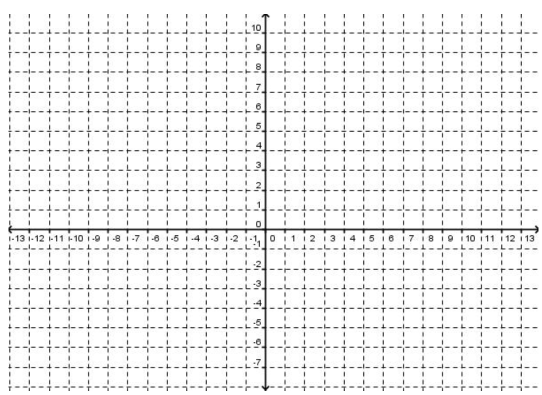
$x^2 + (-2h)x + (-4p)y + h^2 + 4kp = 0$

Que corresponde a la forma $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

A ésta ecuación se le conoce como la forma general de la parábola vertical.

5.6. Ecuación de la parábola dado el vértice y el foco.

Ejemplo 1: Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(2, 0)$ y su foco está en el punto $F(2, 2)$



Al graficar los puntos tenemos que $p = 2$

La ecuación de la directriz es $y = -2$

$y + 2 = 0$

Al calcular el lado recto

$LR = |4p|$

$LR = |4(2)|$

$LR = |8|$

$LR = 8$

La parábola es vertical la ecuación que le corresponde es:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Al sustituir el vértice $V(2,0)$ y $p = 2$ tenemos

$(x-2)^2 = 4(2)(y-0)$

$(x-2)^2 = 8(y-0)$ Es la ecuación en forma ordinaria

Para obtener la ecuación en su forma general se desarrolla la ecuación

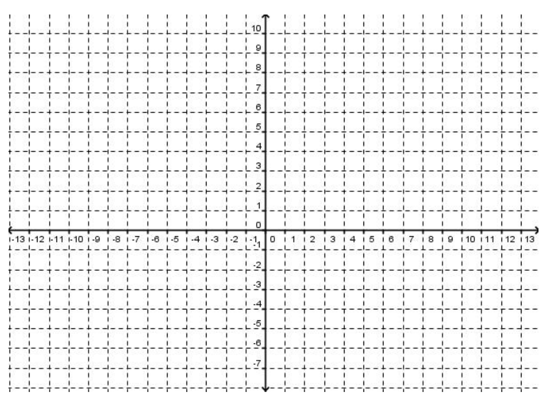
$(x-2)^2 = 8(y-0)$

$x^2 - 2(x)(2) + (2)^2 = 8y$

$x^2 - 4x + 4 - 8y = 0$

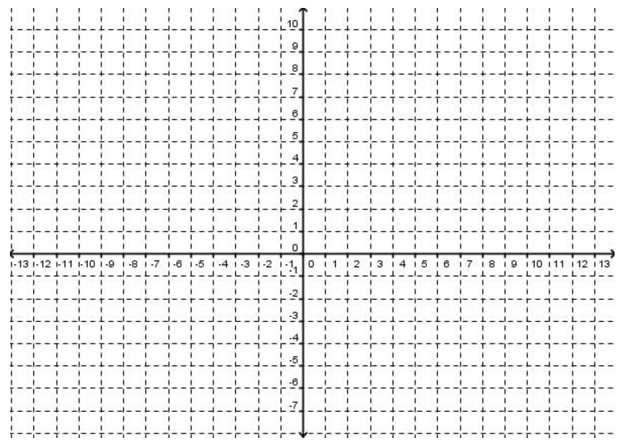
$x^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ Es la ecuación de la parábola en su forma general.

Ejemplo 2: Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(2,3)$ y su foco está en el punto $F(6,3)$

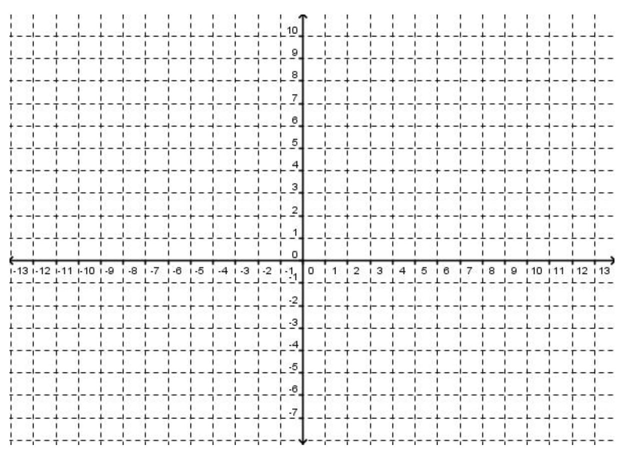


Ejercicio 5.2

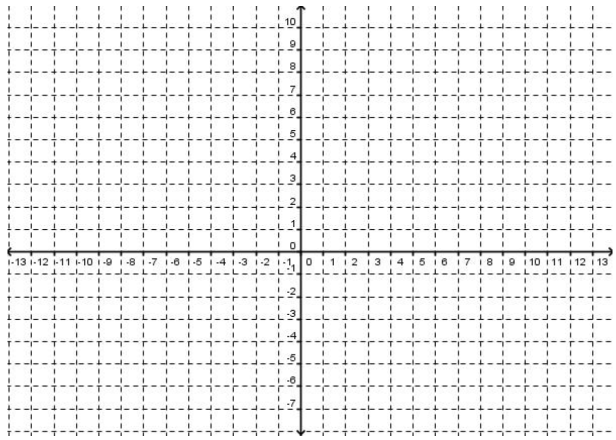
1. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(2,1)$ y su foco está en el punto $F(2,4)$



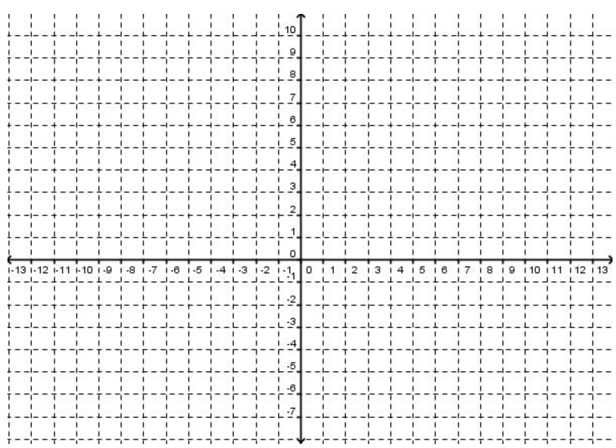
2. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(3,4)$ y su foco está en el punto $F(6,4)$



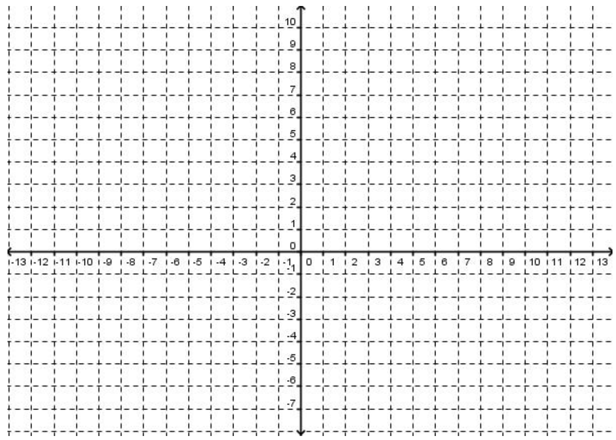
3. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(0,3)$ y su foco está en el punto $F(4,3)$



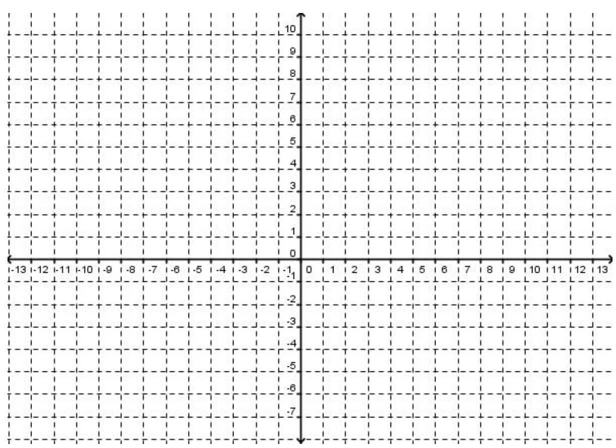
4. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(-1,2)$ y su foco está en el punto $F(-3,2)$



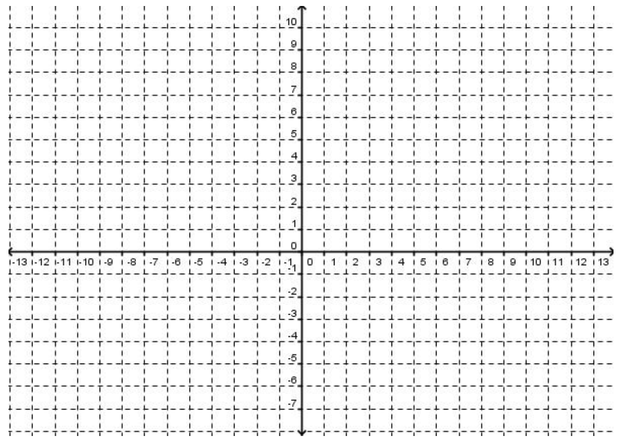
5. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(1,4)$ y su foco está en el punto $F(3,4)$



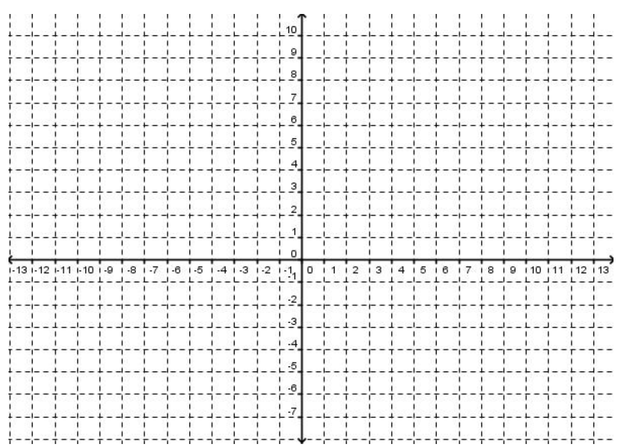
6. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en el origen y su foco está en el punto $F(0,-5)$



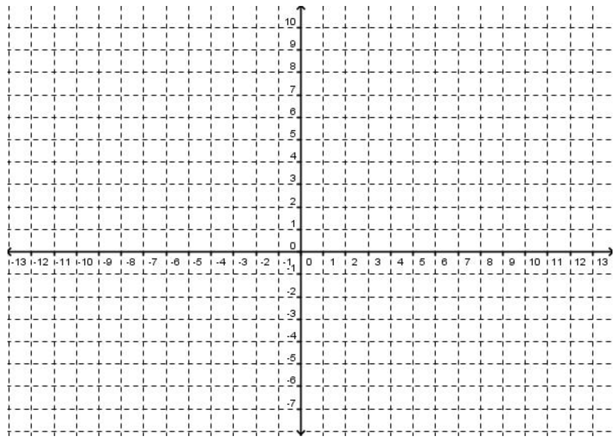
7. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en el origen y su foco está en el punto $F(0, -6)$



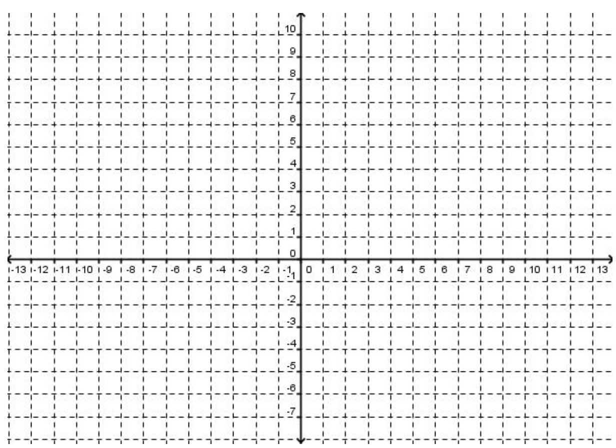
8. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(1, 4)$ y su foco está en el punto $F(1, 6)$



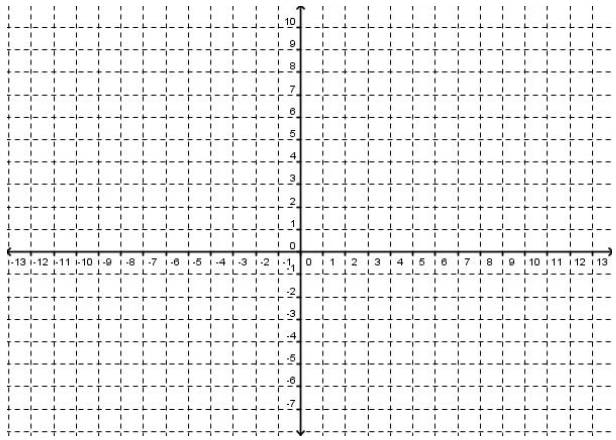
9. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(5,4)$ y su foco está en el punto $F(5,1)$



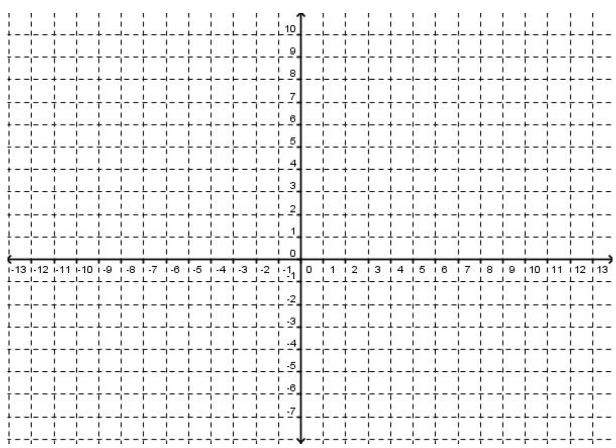
10. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en el origen y su foco está en el punto $F(-4,0)$



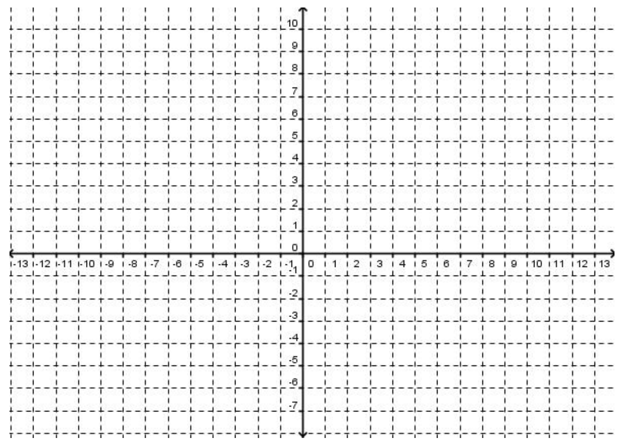
11. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(-3, 2)$ y su foco está en el punto $F(-3, 4)$



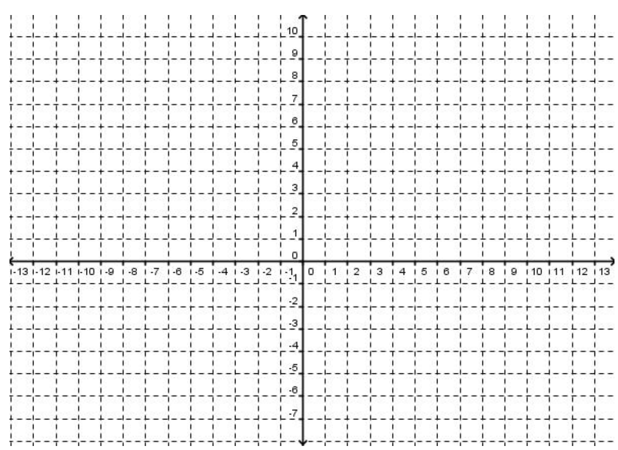
12. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(3, 1)$ y su foco está en el punto $F(4, 1)$



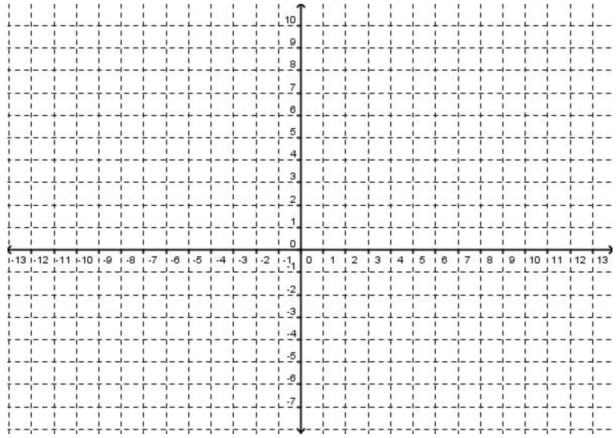
13. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(-2,2)$ y su foco está en el punto $F(-2,5)$



14. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(1,4)$ y su foco está en el punto $F(1,6)$

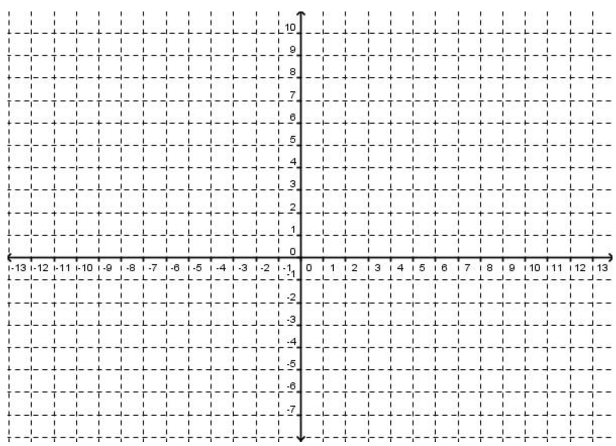


15. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, directriz y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(3,7)$ y su foco está en el punto $F(-3,-2)$



5.7. Ecuación de una parábola dado el foco y la directriz

Ejemplo 1: Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(-2,1)$ y su directriz es $y+5=0$



Como la directriz es $y+5=0$ despejando la y obtenemos $y=-5$

El vértice está a la mitad del foco y la directriz en este caso el vértice tiene coordenadas $V(-2,-2)$

La medida de p es $p=3$

Al calcular el lado recto $LR=|4p|$

$LR = |4(3)|$

$LR = |12|$

$LR = 12$

La parábola es vertical la ecuación que le corresponde es:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Al sustituir el vértice $V(-2, -2)$ y $p = 3$ tenemos

$(x - (-2))^2 = 4(3)(y - (-2))$

$(x + 2)^2 = 12(y + 2)$ Es la ecuación en forma ordinaria

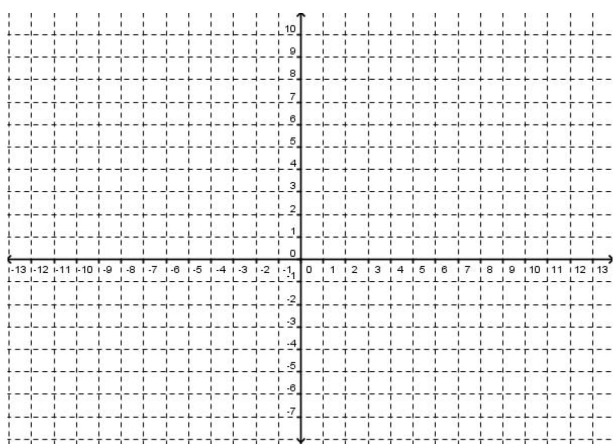
Para obtener la ecuación en su forma general se desarrolla la ecuación

$x^2 + 2(x)(2) + (2)^2 = 12y + 24$

$x^2 + 4x + 4 - 12y - 24 = 0$

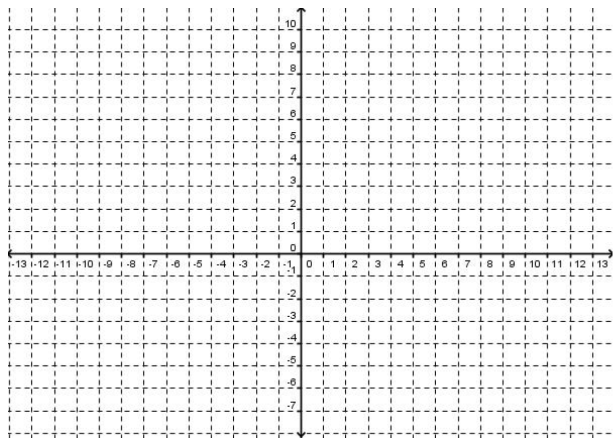
$x^2 + 4x - 12y - 20 = 0$ Es la ecuación de la parábola en su forma general.

Ejemplo 2: Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(4, 0)$ y su directriz es $x + 4 = 0$

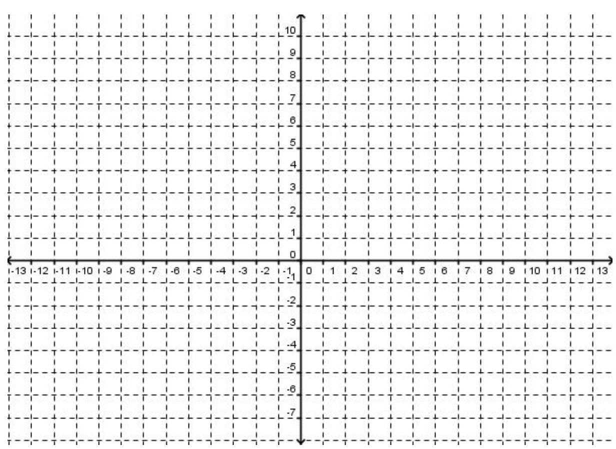


Ejercicio 5.3

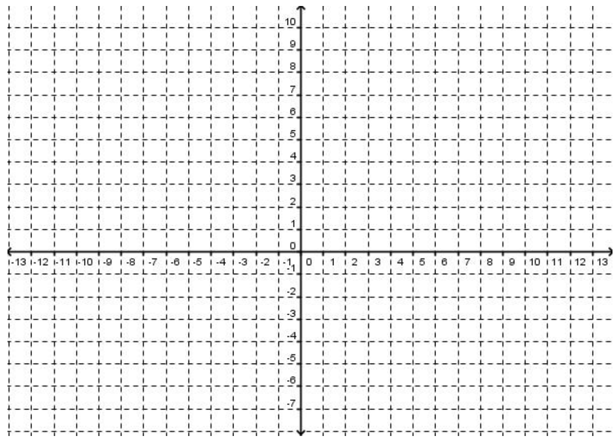
1. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(0, 3)$ y su directriz es $y + 3 = 0$



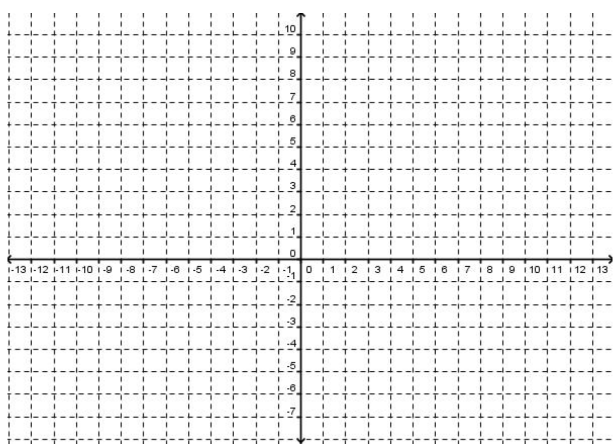
2. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(3, 4)$ y su directriz es el eje x.



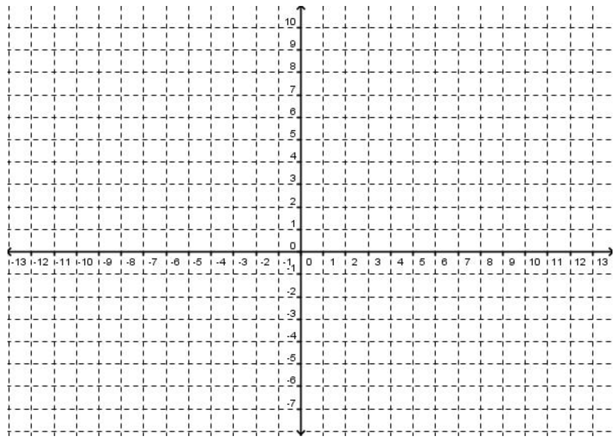
3. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(3,-4)$ y su directriz es $y+2=0$



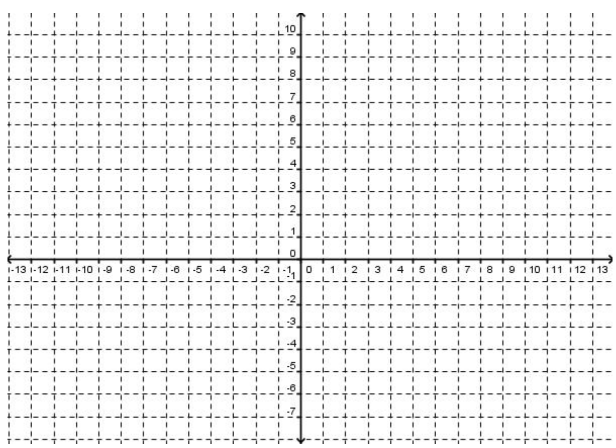
4. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(-7,0)$ y su directriz es $x-7=0$



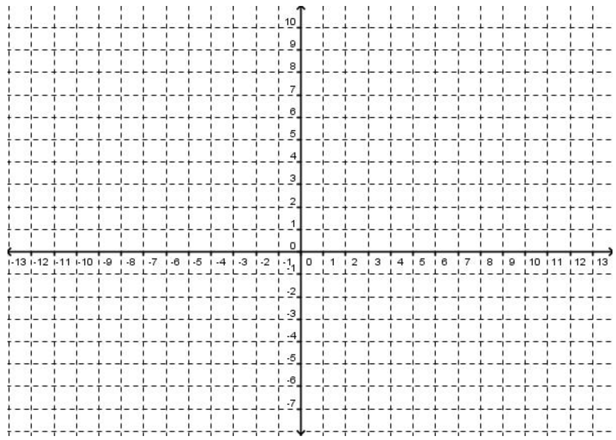
5. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(-5, 3)$ y su directriz es $x + 1 = 0$



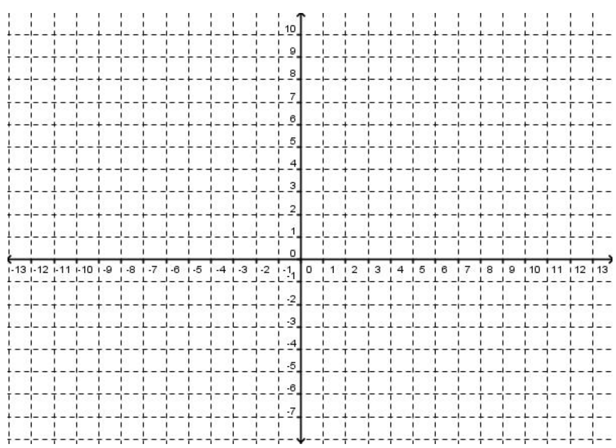
6. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(0, 6)$ y su directriz es $y + 6 = 0$



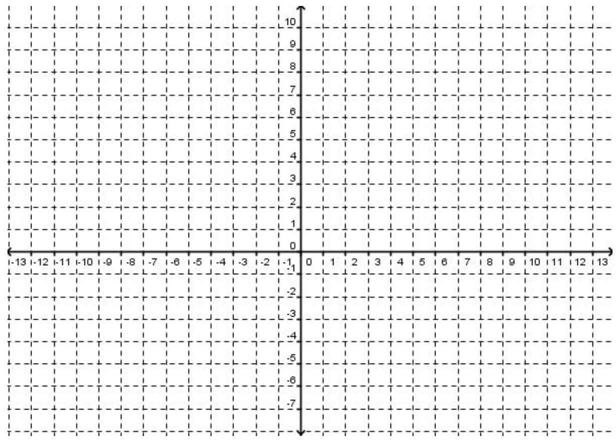
7. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(-5, 2)$ y su directriz es $x + 1 = 0$



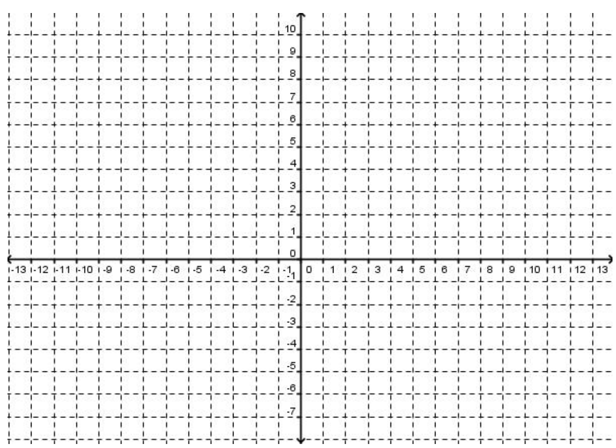
8. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(3, 4)$ y su directriz es $x - 1 = 0$



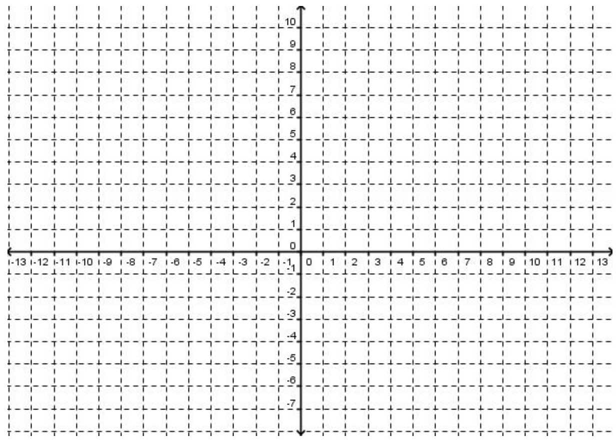
9. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(3, -5)$ y su directriz es $y - 1 = 0$



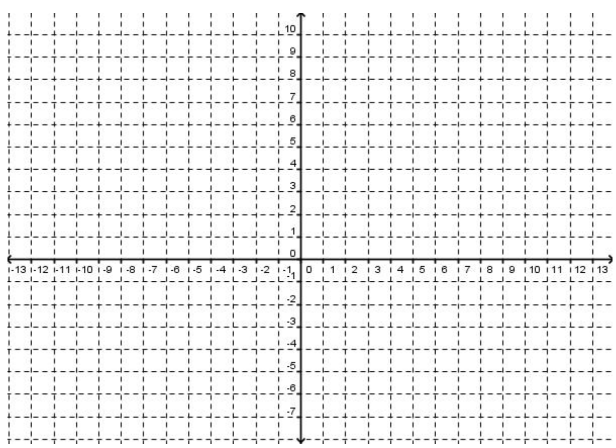
10. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(-3, 1)$ y su directriz es $x - 1 = 0$



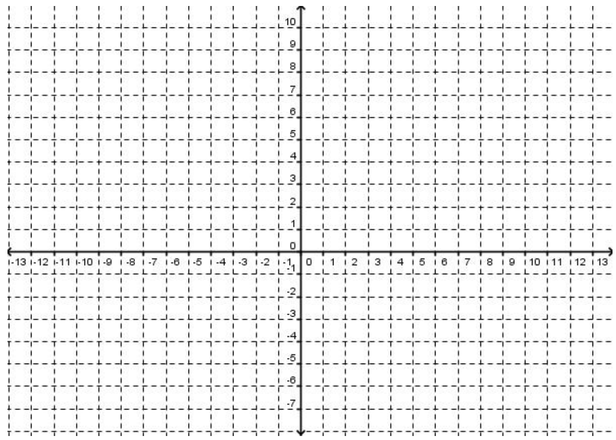
11. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(3,3)$ y su directriz es $y+1=0$



12. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(-5,-1)$ y su directriz es $x-1=0$

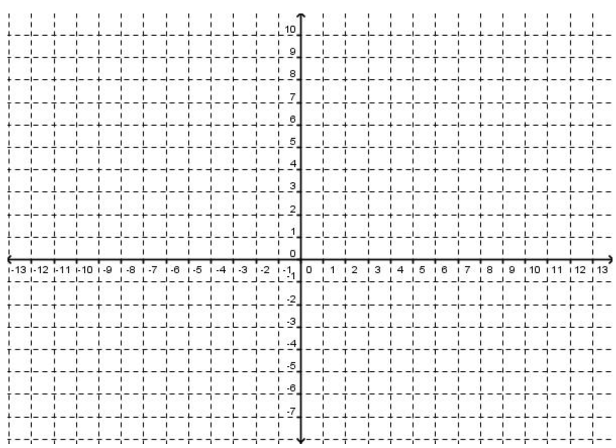


13. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(-2,1)$ y su directriz es $x-2=0$



5.8. Ecuación de una parábola dado el vértice y la directriz

Ejemplo 1: Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, las coordenadas de los extremos del lado recto y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(2,3)$ y su directriz es $x-3=0$



Al trazar la gráfica del vértice y la directriz tenemos que $p=-1$ y el foco tiene coordenadas $F(1,3)$

Al calcular el lado recto $LR=|4p|$

$LR=|4(-1)|$

$LR = |-4|$

$LR = 4$

La parábola es horizontal la ecuación que le corresponde es:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Al sustituir el vértice $V(2,3)$ y $p=-1$ tenemos

$(y-3)^2 = 4(-1)(x-2)$

$(y-3)^2 = -4(x-2)$ Es la ecuación en forma ordinaria

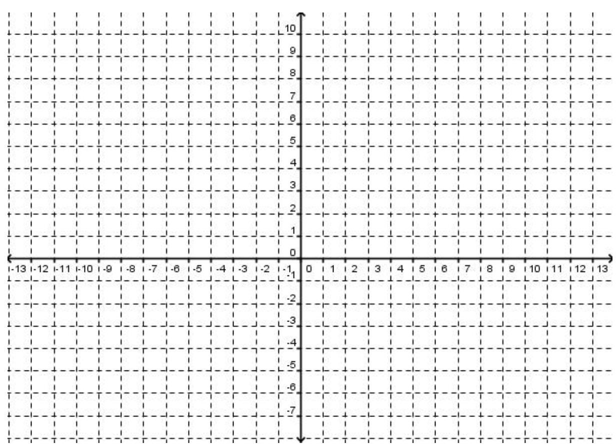
Para obtener la ecuación en su forma general se desarrolla la ecuación

$y^2 - 2(y)(3) + (3)^2 = -4x + 8$

$y^2 - 6y + 9 + 4x - 8 = 0$

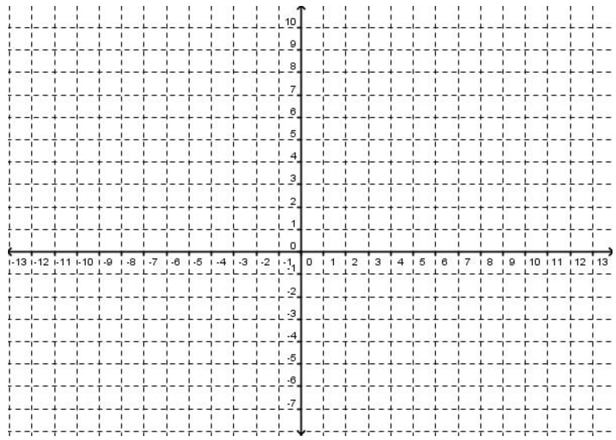
$y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ Es la ecuación de la parábola en su forma general.

Ejemplo 2: Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco , las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(-1,1)$ y su directriz es $y+3=0$

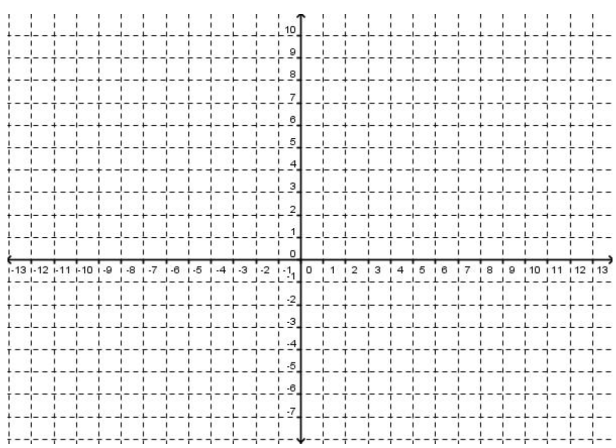


Ejercicio 5.4

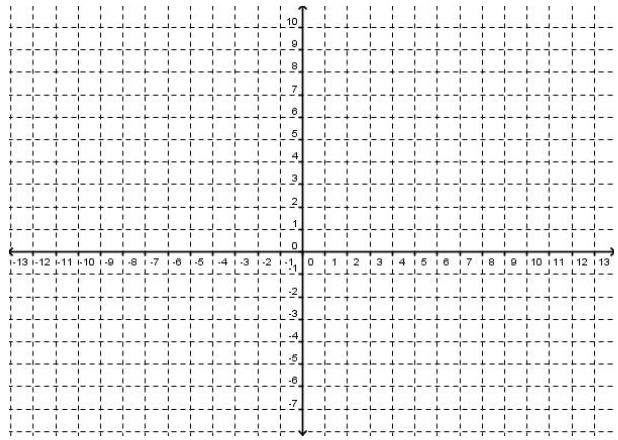
1. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(-1, 1)$ y su directriz es $y - 3 = 0$



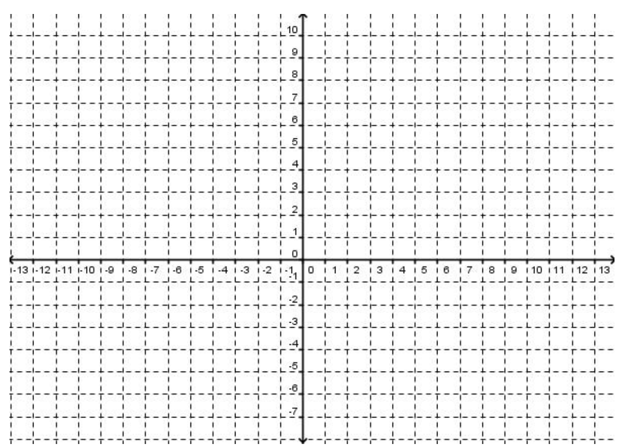
2. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, las coordenadas de los extremos del lado recto y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(1, -1)$ y su directriz es $x - 2 = 0$



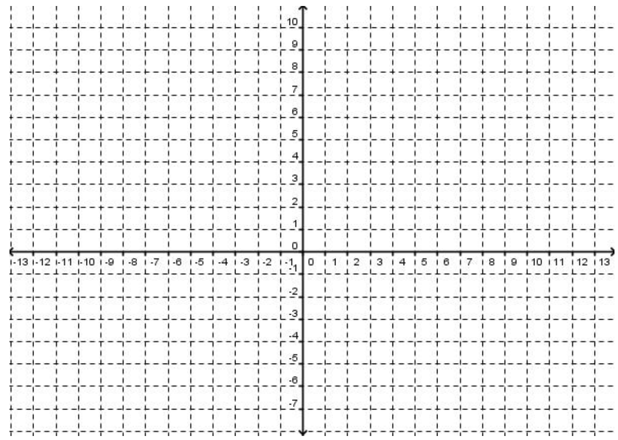
3. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(3,-2)$ y su directriz es $y-1=0$



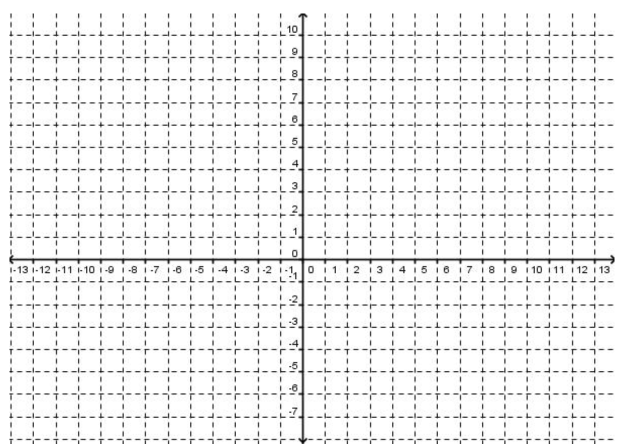
4. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(2,1)$ y su directriz es $y+2=0$



5. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(-1,1)$ y su directriz es $y-3=0$

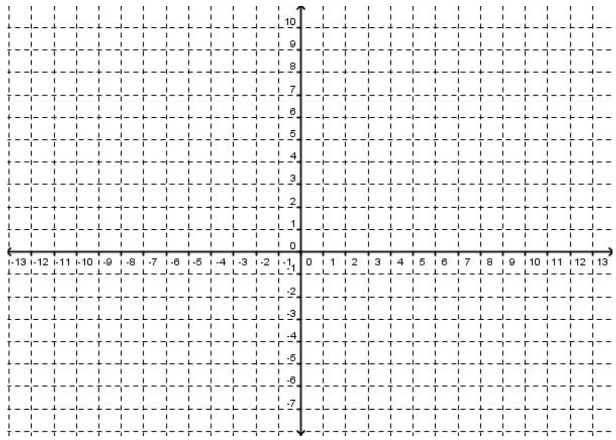


6. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(3,0)$ y su directriz es $x+10=0$



5.9. Ecuación de una parábola, dado el vértice y los extremos del lado recto

Ejemplo 1: Determina la ecuación en su forma ordinaria,forma general, lado recto, foco, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(2,1)$ y los extremos del lado recto son: $P(-1,-5)$ y $Q(-1,7)$



Al localizar los puntos en la gráfica, se obtiene que el foco está en $F(-1,1)$

La parábola es horizontal y por la ubicación abre a la izquierda

La medida del lado recto es 12.

$LR = 12$

Con la medida del lado recto despejamos a p

$4p = 12$

$p = \frac{12}{4}$

$p = 3$

Pero como la gráfica indica que abre a la izquierda entonces p debe ser negativa, entonces

$p = -3$

Al localizar la directriz en el plano tenemos que está en:

$x = 5$

La ecuación de la directriz es:

$x - 5 = 0$

El eje de simetría es $y = 1$

Como la parábola es horizontal le corresponde la ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Al sustituir los valores del vértice $V(2, 1)$ y el de $p = -3$
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

$(y - 1)^2 = 4(-3)(x - 2)$

$(y - 1)^2 = -12(x - 2)$ Ecuación en Forma Ordinaria

Desarrollando la ecuación tenemos

$(y)^2 - 2(y)(1) + (1)^2 = -12x + 24$

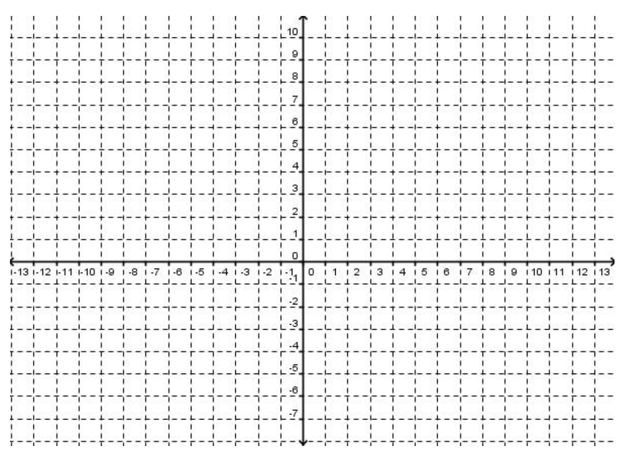
$y^2 - 2y + 1 = -12x + 24$

$y^2 + 12x - 2y + 1 - 24 = 0$

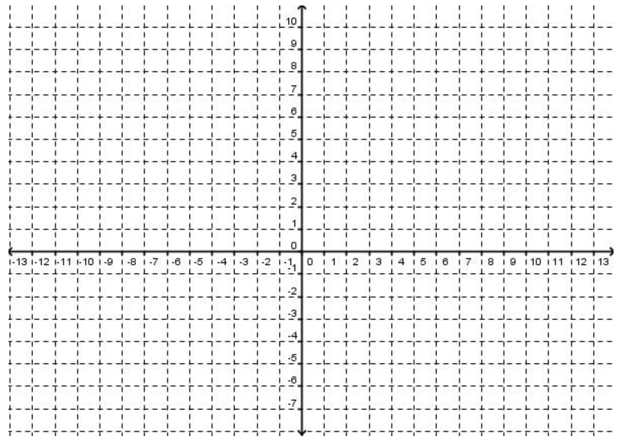
$y^2 + 12x - 2y - 23 = 0$ Ecuación en Forma General

Ejercicio 5.5

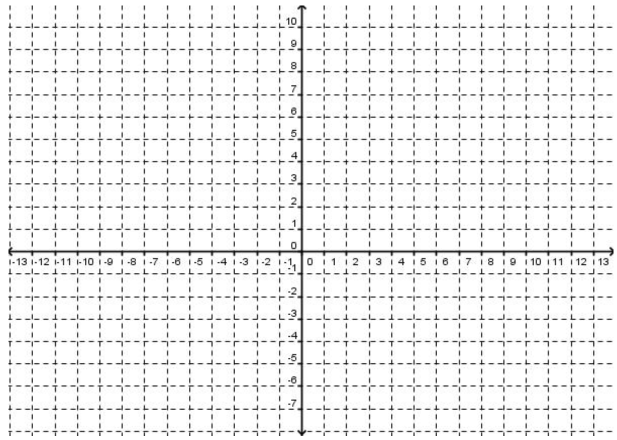
1. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(-3, -1)$ y los extremos del lado recto son: $P(1, 7)$ y $Q(1, -9)$



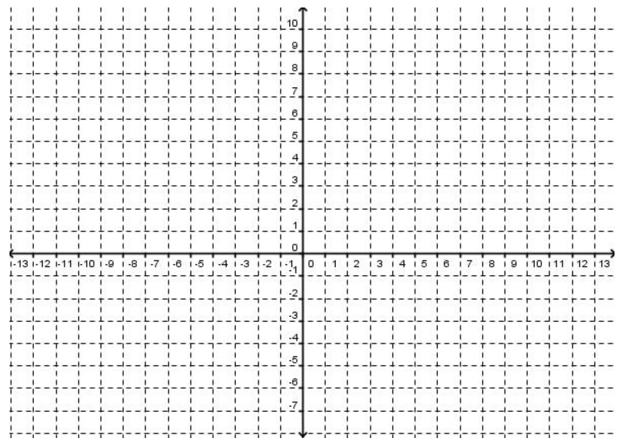
2. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(-1,-2)$ y los extremos del lado recto son: $P(5,-5)$ y $Q(-7,-5)$



3. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(4, -1)$ y los extremos del lado recto son: $P(6, 3)$ y $Q(6, -5)$

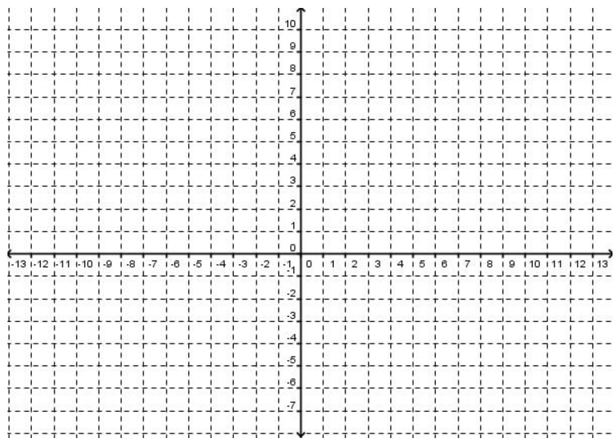


4. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, foco, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(4,-2)$ y los extremos del lado recto son: $P(7,4)$ y $Q(7,-8)$



5.10. Ecuación de una parábola dado el foco o el vértice, la medida del lado recto y hacia donde abre la parábola

Ejemplo 1: Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, foco, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(2,3)$,lado recto $LR = 8$ y abre hacia la derecha



Al graficar el foco, como el lado recto mide $LR = 8$, y la parábola abre a la derecha los extremos del lado recto se encuentran arriba y abajo del foco y sus coordenadas son $P(2,7)$ y $Q(2,-1)$

La parábola es horizontal

Despejamos el valor de p del lado recto

$LR = 8$

$4p = 8$

$p = \frac{8}{4}$

$p = 2$

Al graficar el vértice tiene coordenadas $V(0,3)$ y la directriz está en $x = -2$

Directriz $x + 2 = 0$

El eje de simetría es $y = 3$

Como la parábola es horizontal le corresponde la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Al sustituir los valores del vértice $V(0,3)$ y el de $p = 2$
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$(y-3)^2 = 4(2)(x-0)$

$(y-3)^2 = 8(x-0)$ Ecuación en Forma Ordinaria

Desarrollando la ecuación tenemos

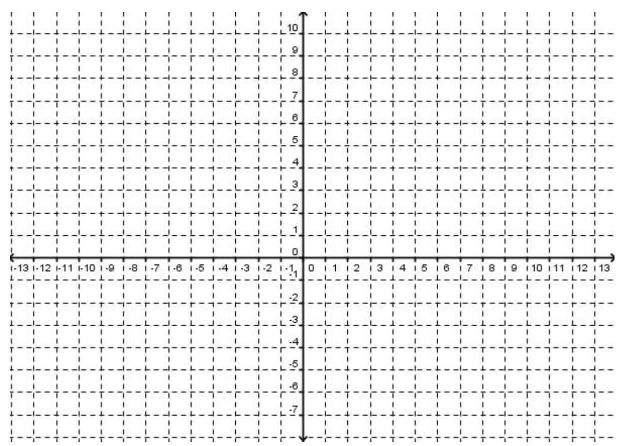
$(y)^2 - 2(y)(3) + (3)^2 = 8x$

$y^2 - 6y + 9 = 8x$

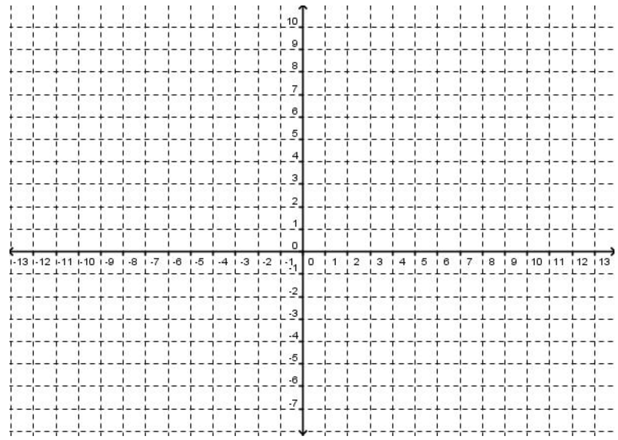
$y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$ Ecuación en Forma General

Ejercicio 5.6

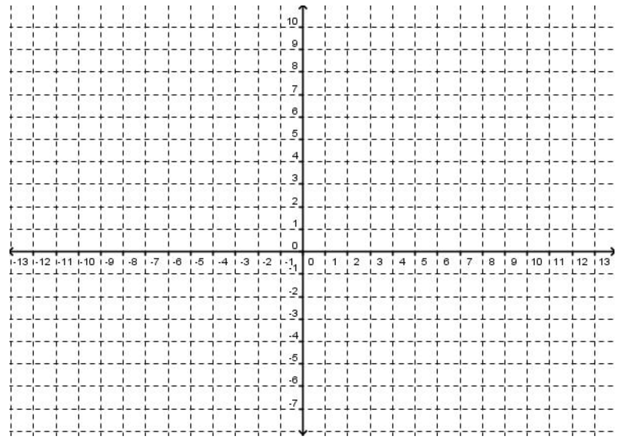
1. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice,foco, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si los extremos del lado recto son los puntos $P(3,1)$, $Q(3,5)$ y abre a la derecha.



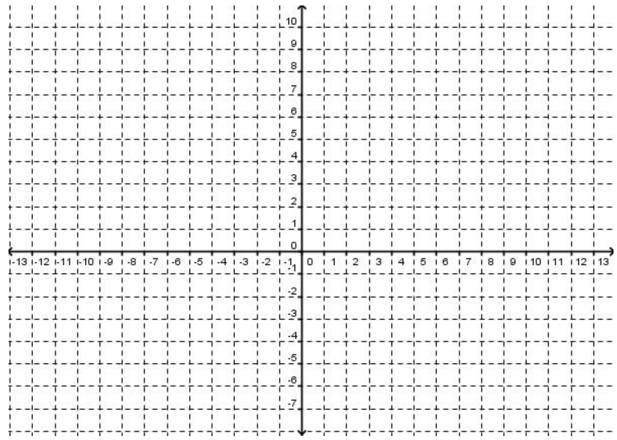
2. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice,foco, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si los extremos del lado recto son: $P(1,-1)$ y $Q(1,3)$ y abre hacia la izquierda



3. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, foco, las coordenadas de los extremos del lado recto, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su vértice está en $V(1,-2)$, lado recto $LR = 4$ y abre hacia arriba



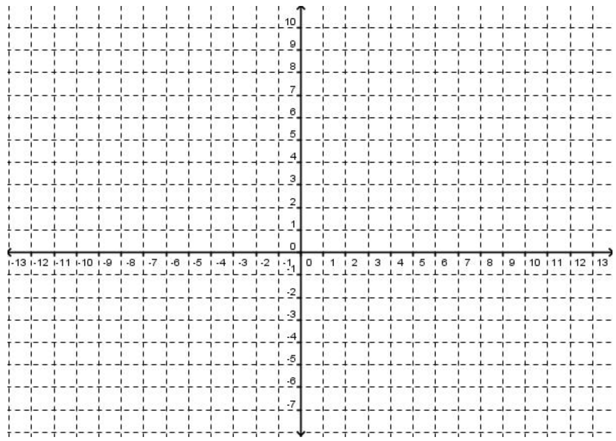
4. Determina la ecuación en su forma ordinaria, forma general, lado recto, vértice, directriz, el eje de simetría y traza la gráfica de la parábola, si su foco está en $F(-2,-4)$ y los extremos del lado recto son: $P(-2,-6)$ y $Q(-2,-2)$ y abre hacia la izquierda



5.11. Determinar los elementos de la parábola a partir de su ecuación en forma general

Se trata de transformar la ecuación general a la forma ordinaria, mediante el uso del método de completar cuadrados, agrupando los términos semejantes y completando el trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 1: La ecuación de la parábola es $x^2 - 6x - 8y - 23 = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica.



Se agrupan los términos:
$x^2 - 6x - 8y - 23 = 0$

$x^2 - 6x = 8y + 23$

Completamos el trinomio cuadrado

2x( )=♯x

2x( )=6x

( )=$\frac{6x}{2x}$

( )= 3

Se completan el cuadrado y para compensar la alteración de la ecuación, se agregan también éste número en el segundo miembro de la ecuación.

$x^2 - 6x + (3)^2 = 8y + 23 + (3)^2$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto

$(x - 3)^2 = 8y + 23 + 9$

$(x-3)^2 = 8y + 32$

Se factoriza al coeficiente de y para obtener la forma ordinaria

$(x-3)^2 = 8(y+4)$ Ecuación Forma Ordinaria

Al compararla con la forma ordinaria $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ tenemos

Vértice $V(3,-4)$ y $4p = 8$

Despejando a p tenemos

$4p = 8$

$p = \frac{8}{4}$

$p = 2$

Al graficar los puntos en el plano tenemos que el foco está en $F(3,-2)$

La directriz está en $y = -6$

Directriz $y + 6 = 0$

El lado recto es:

$LR = |4p|$

$LR = |4(2)|$

$LR = |8|$

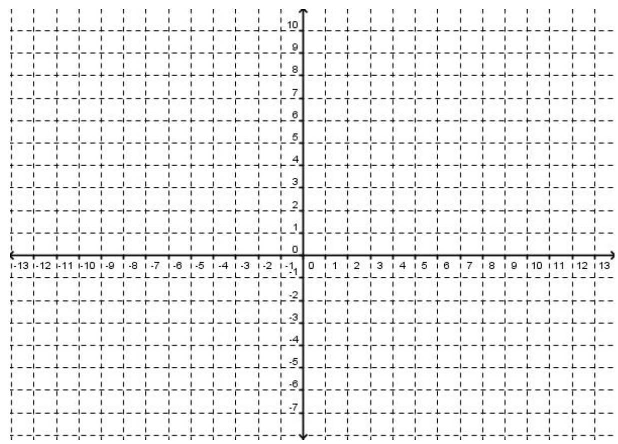
$LR = 8$

Los extremos del lado recto son: $P(-1,-2)$ y $Q(7,-2)$

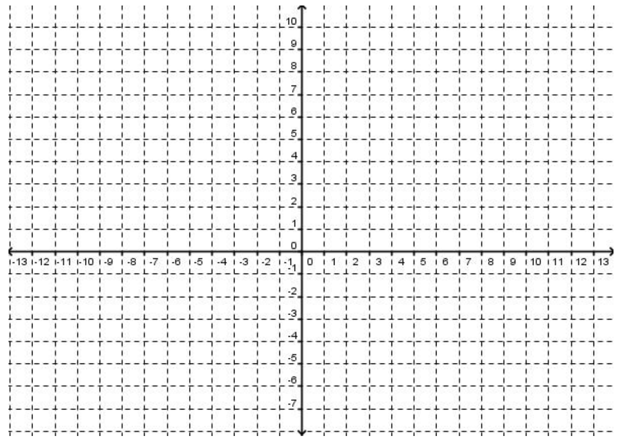
El eje de simetría es $x = 3$

Ejercicio 5.7

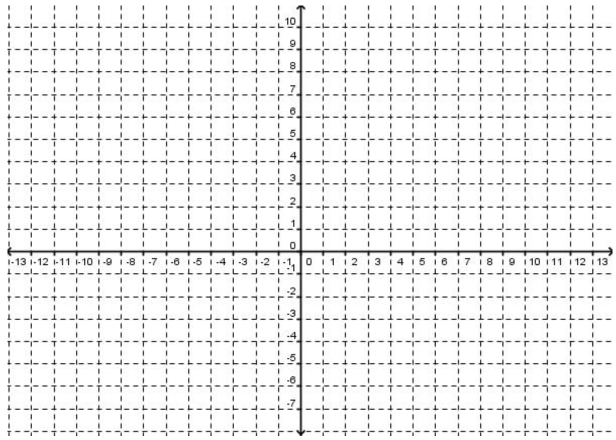
1. La ecuación de la parábola es $x^2 + 8x - 2y + 10 = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica.



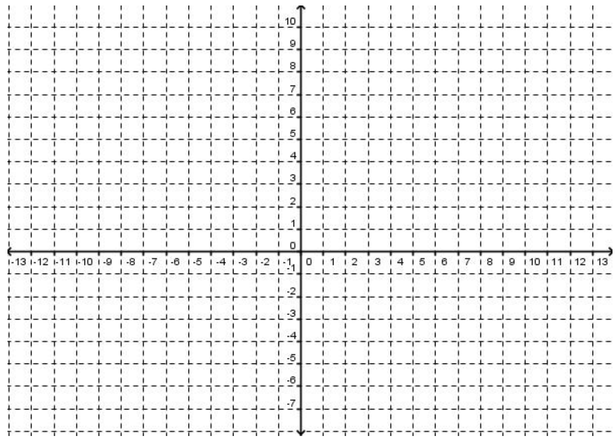
2. La ecuación de la parábola es $y^2 - 4y + 4x = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica.



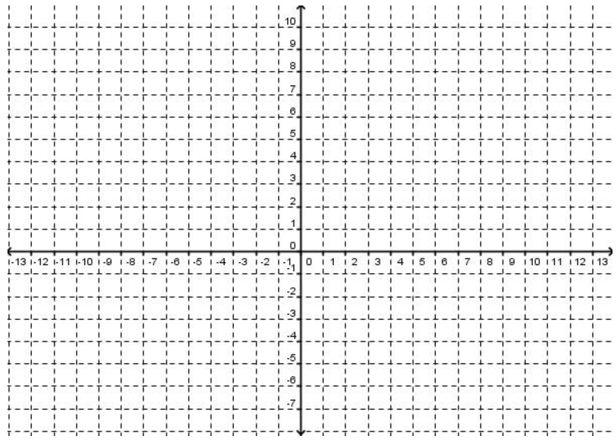
3. La ecuación de la parábola es $x^2 + 20y = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz, el eje de simetría y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto y traza la gráfica.



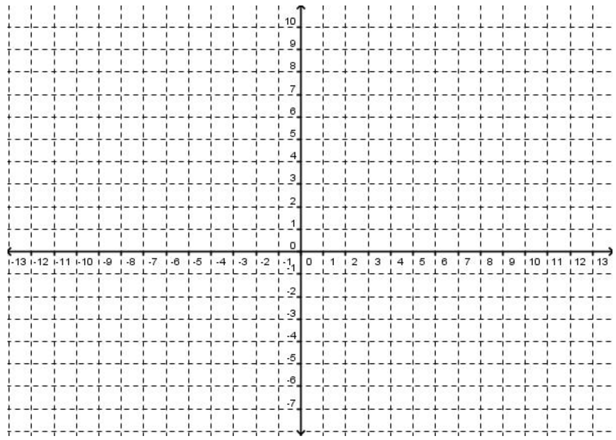
4. La ecuación de la parábola es $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica.



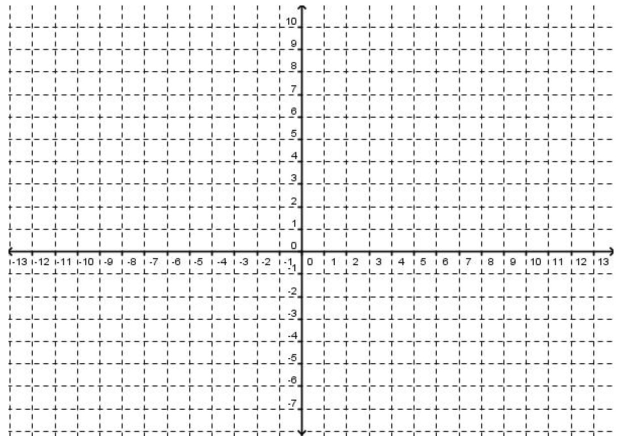
5. La ecuación de la parábola es $y^2 + 12x - 6y + 45 = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica.



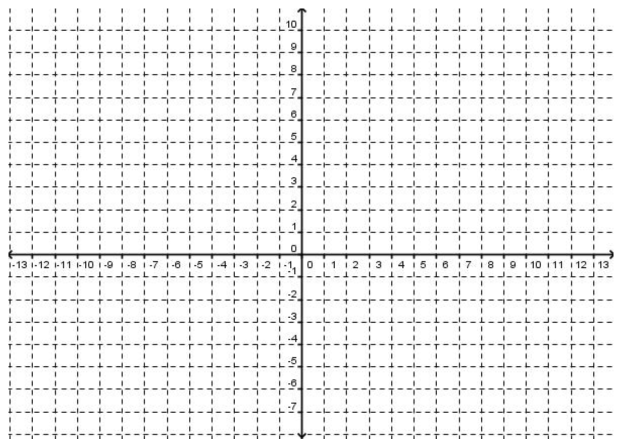
6. La ecuación de la parábola es $x^2 - 8x + 6y - 8 = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica.



7. La ecuación de la parábola es $x^2 - 12x + 16y - 60 = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica.



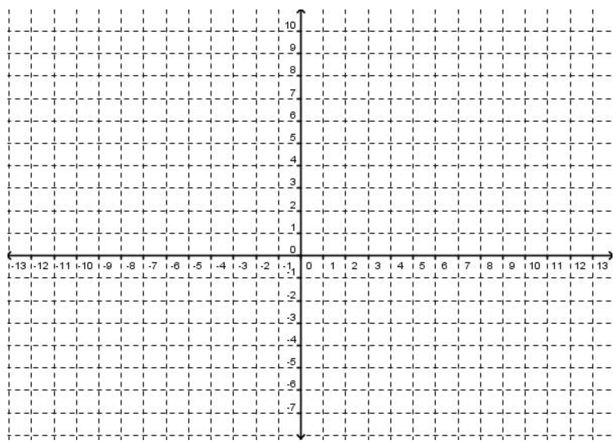
8. La ecuación de la parábola es $y^2 - 6x + 4y + 7 = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, las coordenadas de los extremos del lado recto, el eje de simetría y traza la gráfica.



5.12. Sistemas de ecuaciones formados por: Una ecuación lineal y una parábola

Ejemplo 1:Dados el siguiente sistema de ecuaciones, bosqueja la gráfica y menciona cuantas soluciones tiene el sistema y cuales son:

$$\begin{cases} \text{y=2x+1} \\ \text{y=x}^2 - 2 \end{cases}$$

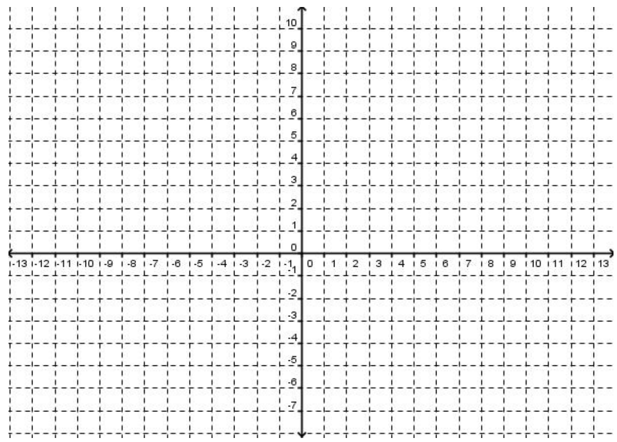


Ejercicio 5.8

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, en cada caso, bosqueja la gráfica y menciona cuantas soluciones tiene el sistema y cuales son:

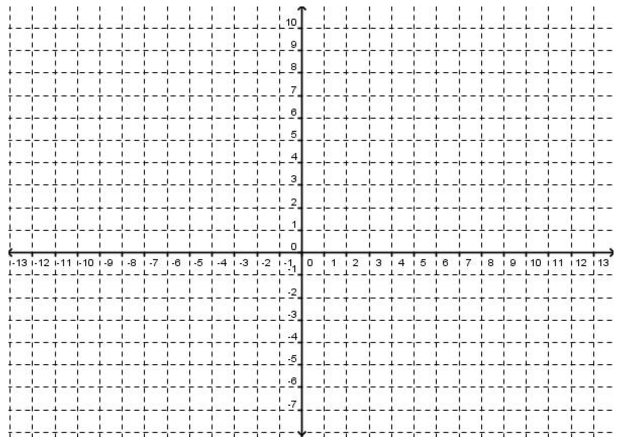
a)

$$\begin{cases} y=-x-2 \\ y=x^2-x-2 \end{cases}$$



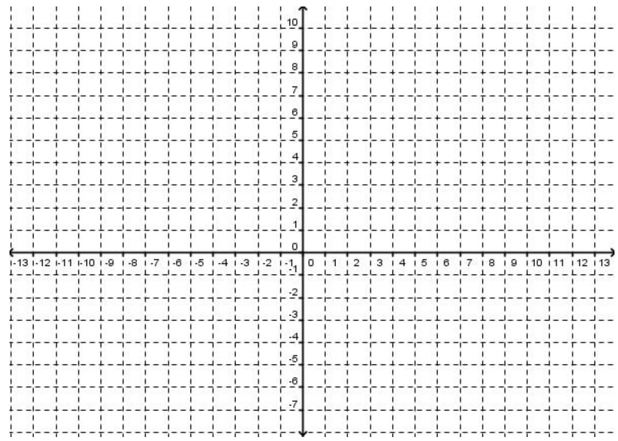
b)

$$\begin{cases} x\text{-}y^2 = 0 \\ x\text{-}2y=3 \end{cases}$$



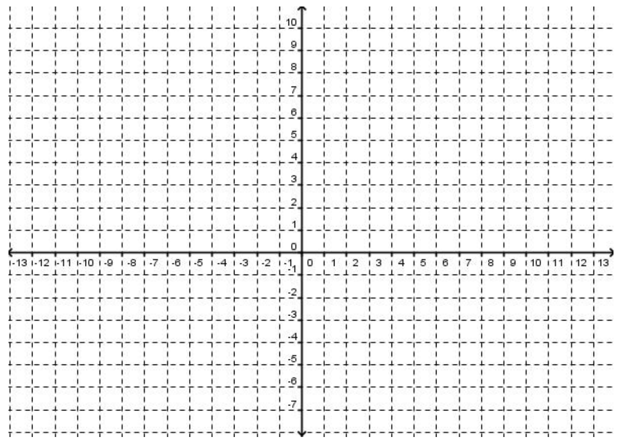
c)

$$\begin{cases} y=x^2 - 1 \\ y\text{-}x=1 \end{cases}$$



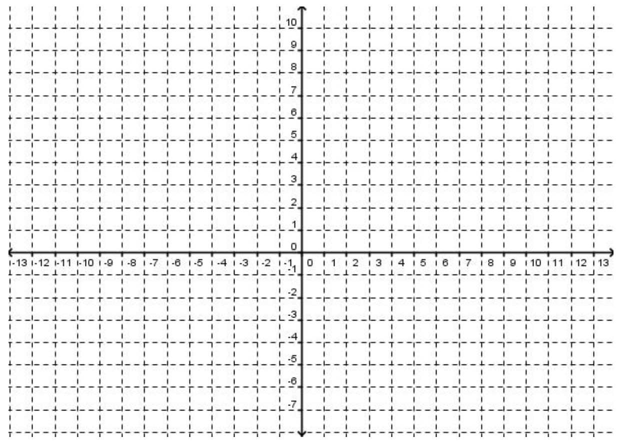
d)

$$\begin{cases} -3x+y=7 \\ y=(x+2)^2+3 \end{cases}$$



e)

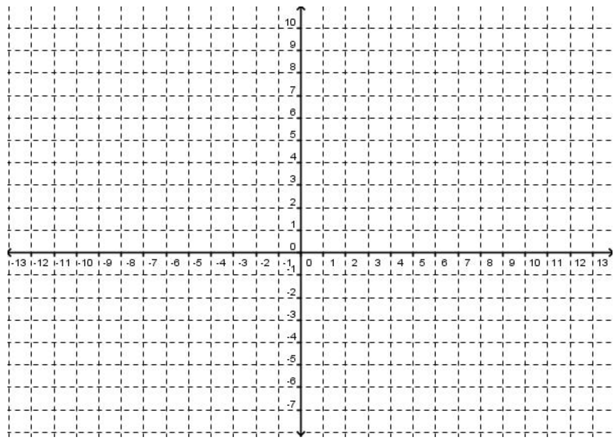
$$\begin{cases} y=2x+6 \\ x^2 = y-3 \end{cases}$$



5.13. Sistemas de ecuaciones formados por: Dos parábolas

Ejemplo 1:Dados el siguiente sistema de ecuaciones, bosqueja la gráfica y menciona cuantas soluciones tiene el sistema y cuales son:

$$\begin{cases} \mathrm{y}^2 - 2y = x + 1 \\ \mathrm{y}^2 - 2y = -x - 1 \end{cases}$$

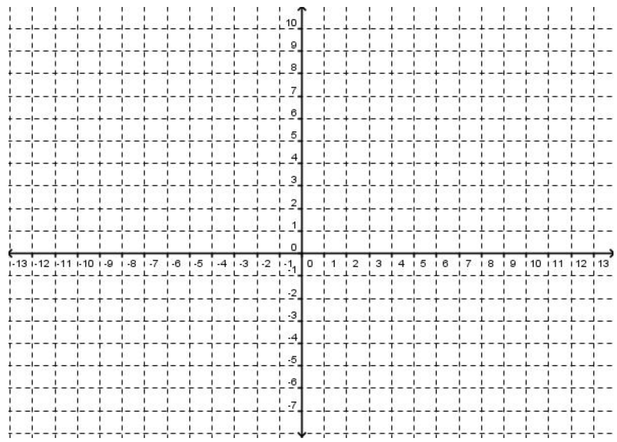


Ejercicio 5.9

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, en cada caso, bosqueja la gráfica y menciona cuantas soluciones tiene el sistema y cuales son:

a)

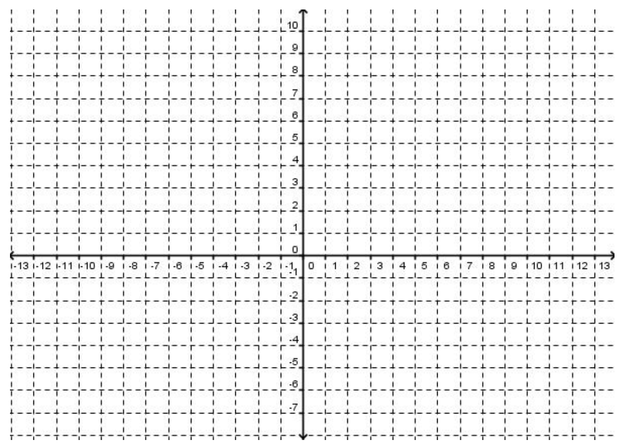
$$\begin{cases} \text{y=x}^2 - 4 \\ \text{y=-x}^2 + x + 2 \end{cases}$$



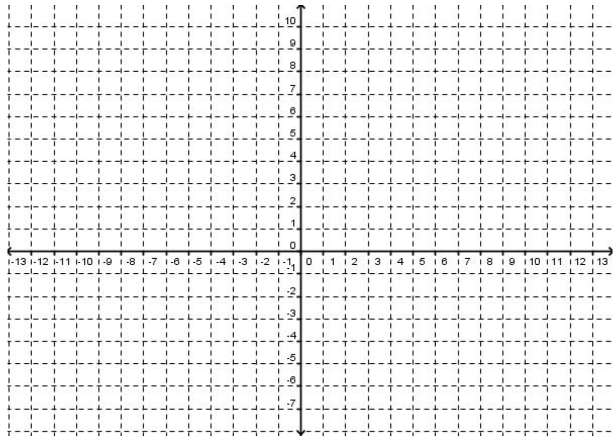
5.14. Resolución de problemas en diversos contextos

Ejercicio 5.10:

1. Una antena de un sistema de tv satelital tiene un diámetro de 40 cm ¿A que distancia debe colocarse el receptor?



2. Si los postes de un puente colgante tienen una separación de 300 m y los cables están atados a ellos a 100m por arriba del piso. ¿Que longitud debe tener el puntal que está a 20m del poste izquierdo?



Capítulo 6

UNIDAD 5 - La Circunferencia, la Elipse y sus Ecuaciones Cartesianas

6.1. La circunferencia y sus Ecuaciones Cartesianas

Definición: Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos tales que su distancia a un punto fijo es constante.

Para determinar una circunferencia se requiere:

- Un punto fijo C llamado centro.
- Una distancia constante r llamada radio.

6.2. Elementos de la Circunferencia

C: Centro de la circunferencia.

$r = \overline{CP}$: Radio, segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.

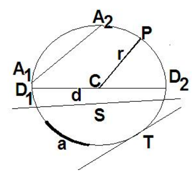
$d = \overline{D_1D_2}$: Diámetro, segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

$\overline{A_1A_2}$: Cuerda, segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

S: Secante, es una recta que corta en dos puntos a la circunferencia.

T: Tangente, es una recta que toca en un solo punto a la circunferencia. Es perpendicular al radio.

a: Arco, es la parte de la circunferencia limitada por dos puntos.

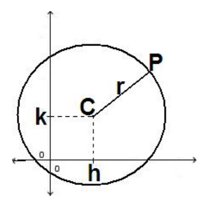


6.3. Ecuación de la Circunferencia

Si se tienen los puntos $P(x, y)$ y $C(h, k)$ al dejar fijo el centro en $C(h, k)$, se hace girar el punto P alrededor de C, manteniendo la misma distancia, de tal forma que se tendrá una circunferencia con centro en el punto C y de radio r, que es la distancia entre P y C. La expresión matemática que representa a ésta circunferencia es:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

A ésta expresión se le conoce como **Ecuación Ordinaria de la Circunferencia con centro en $C(h, k)$.**



6.4. Ecuación General de la Circunferencia

Al desarrollar las potencias de la forma ordinaria y reordenando términos, se obtiene la forma general de la ecuación de la circunferencia.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

Los parámetros constantes son:

$D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$

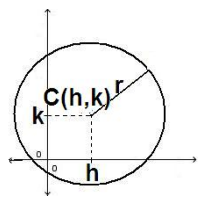
Por lo que la forma general de la circunferencia es:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

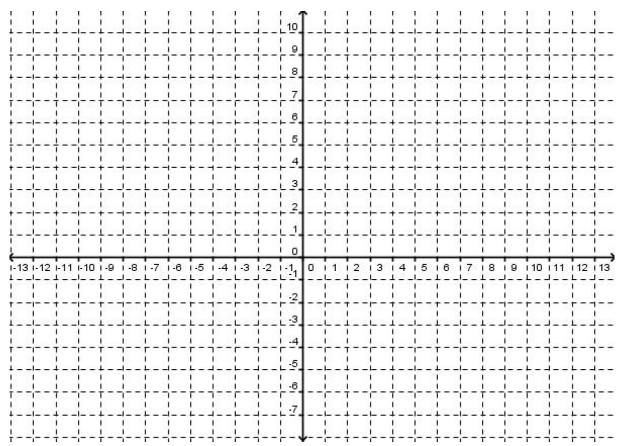
Si alguno de los nuevos parámetros es un número racional, se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores y resulta:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A = C$

6.5. Ecuación de la Circunferencia con Centro(h, k) y Radio r

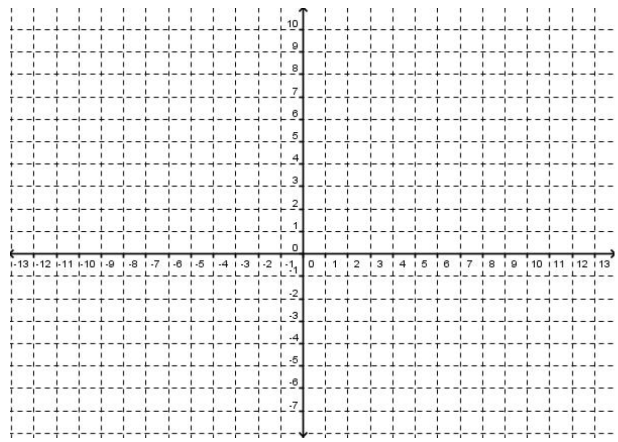


Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(3, 4)$ y radio $r = 5$ y traza la gráfica.

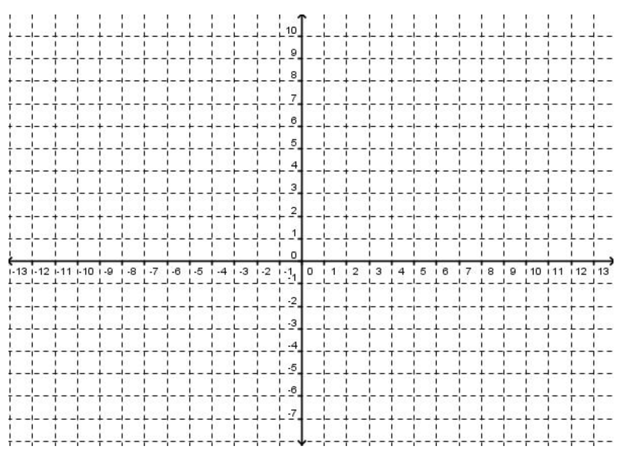


Ejercicio 6.1:

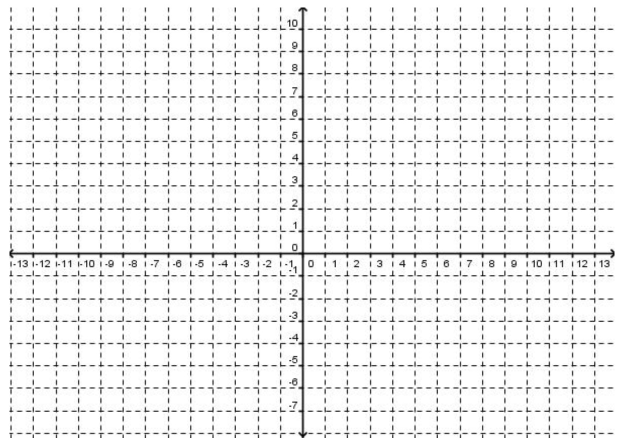
1. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(-1,2)$ y radio $r=4$ y traza la grafica



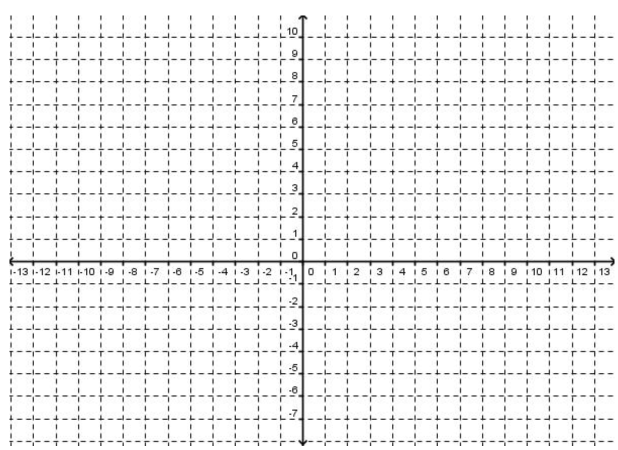
2. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(-3,-5)$ y radio $r=3$ y traza la grafica



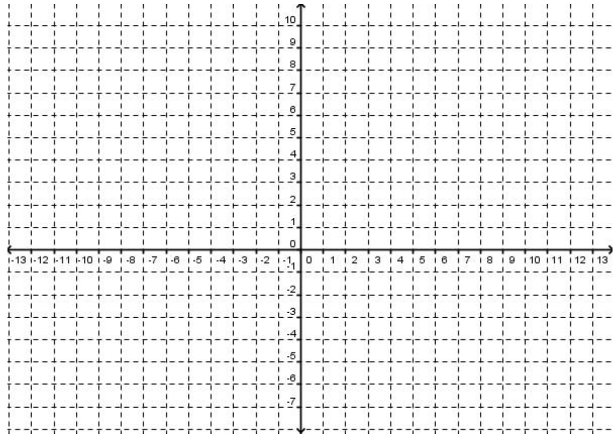
3. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = 6$ y traza la grafica



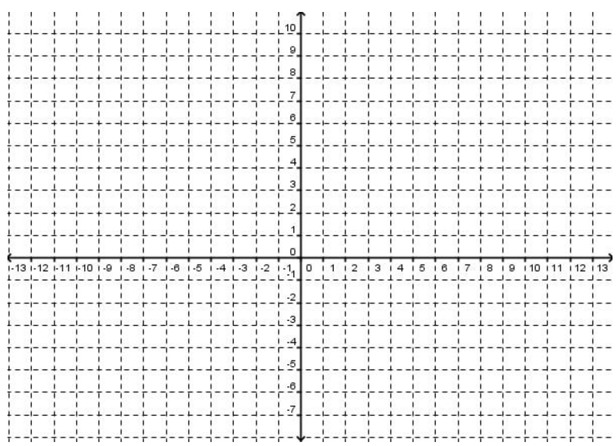
4. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(3, 2)$ y radio $r = 4$ y traza la grafica



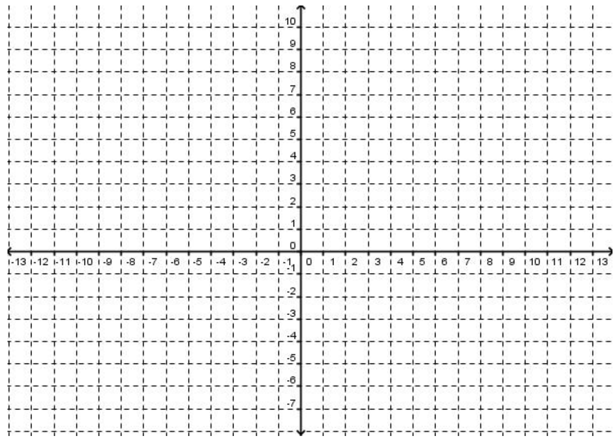
5. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(-2,3)$ y radio $r=4$ y traza la grafica



6. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(5,-1)$ y radio $r=10$ y traza la grafica



7. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(-2, 5)$ y radio $r = 7$ y traza la grafica



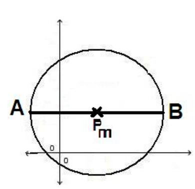
6.6. Ecuación de la Circunferencia definida por los extremos de uno de sus diámetros

Para determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia es necesario conocer las coordenadas del centro y el valor del radio.

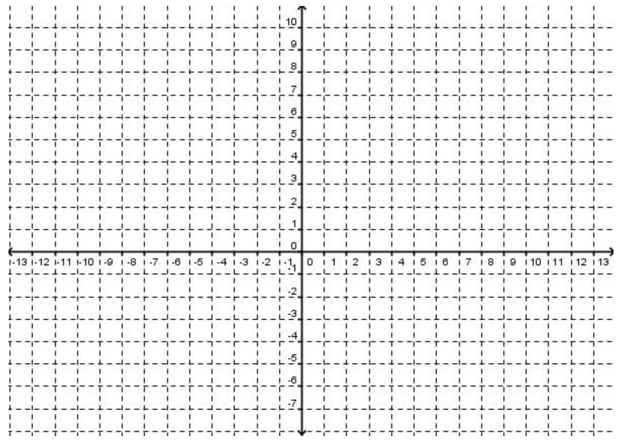
Para calcular el centro, tomamos los extremos del diámetro y determina el punto medio de ellos. Obteniendo con ello el centro de la circunferencia.

Para calcular el radio: Obtenemos la distancia que existe entre el centro y cualquiera de los extremos del diámetro.

De ésta manera al contar con el centro y el radio podemos obtener la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria.

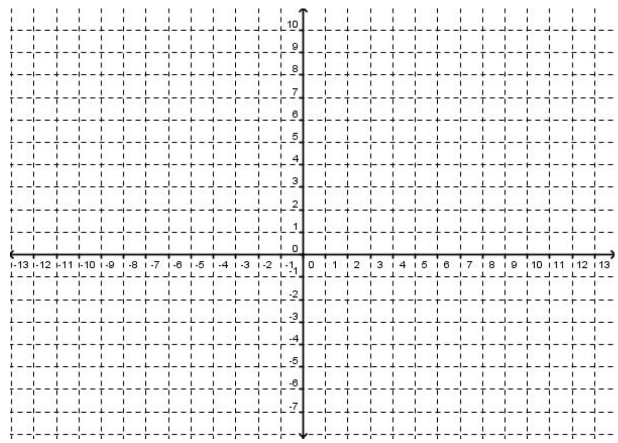


Ejemplo 1: Determina la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica si el segmento de recta que une $A(5,-1)$ y $B(-7,-5)$ es un diámetro.

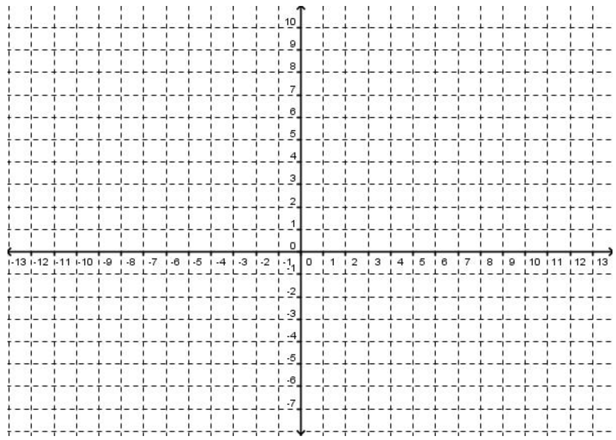


Ejercicio 6.2:

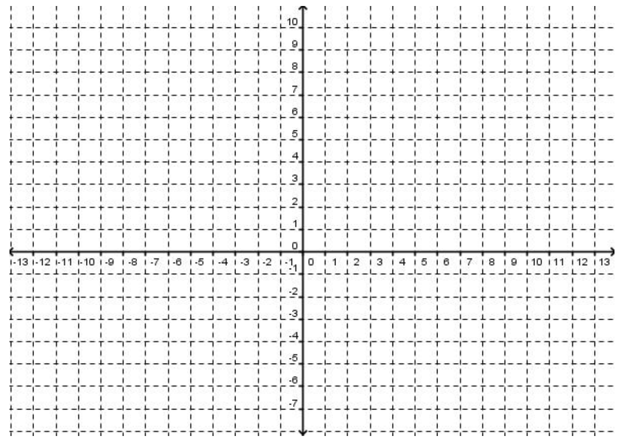
1. Determina la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica si el segmento de recta que une $A(0,0)$ y $B(-8,6)$ es un diámetro.



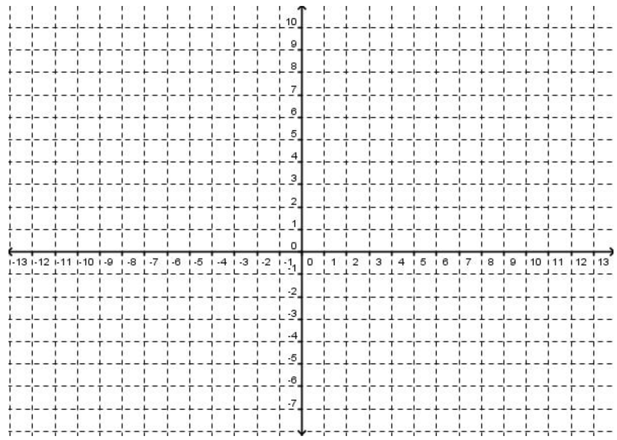
2. Determina la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica si el segmento de recta que une $A(-2,5)$ y $B(4,-3)$ es un diámetro.



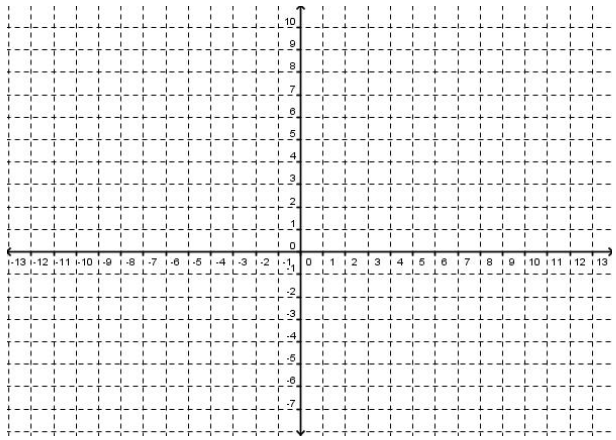
3. Determina la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica si el segmento de recta que une $A(5,2)$ y $B(-1,4)$ es un diámetro.



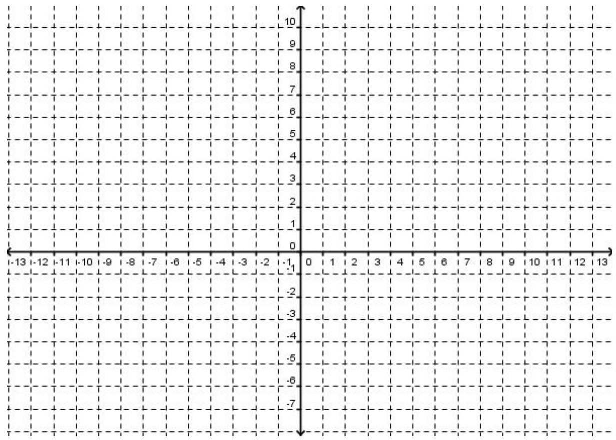
4. Determina la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica si el segmento de recta que une $A(-3,-7)$ y $B(5,3)$ es un diámetro.



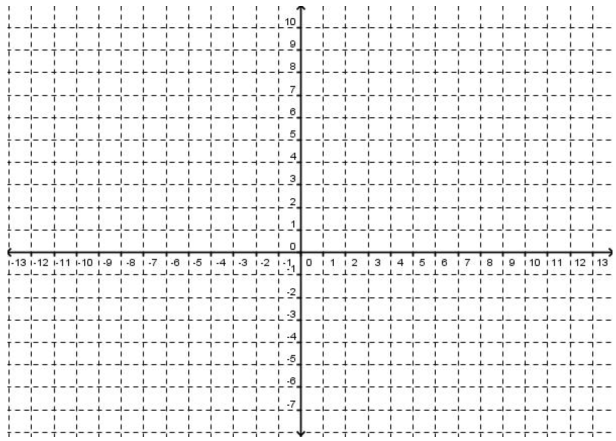
5. Determina la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica si el segmento de recta que une $A(-4,1)$ y $B(8,9)$ es un diámetro.



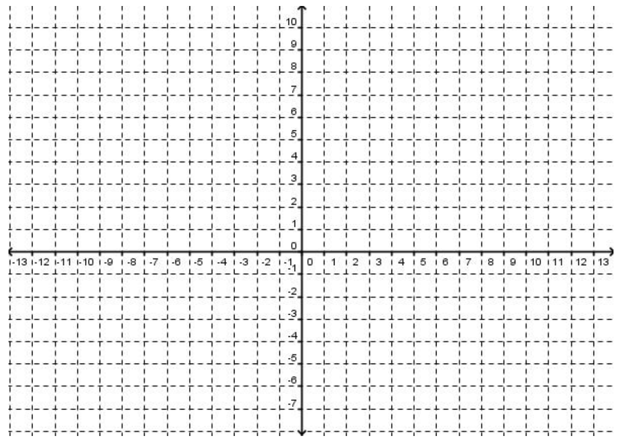
6. Determina la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica si el segmento de recta que une $A(4, 2)$ y $B(-2, 3)$ es un diámetro.



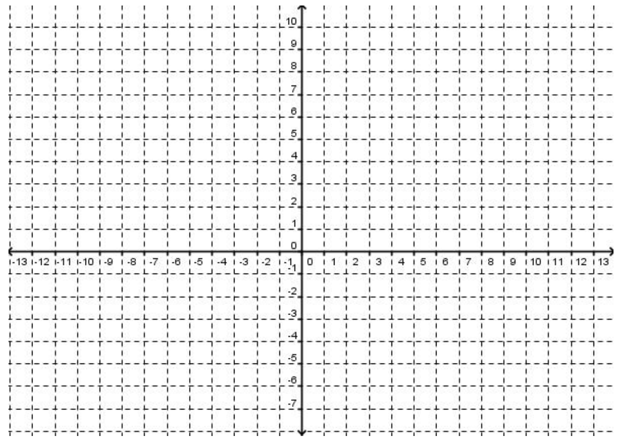
7. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-3, 4)$ y $B(3, -4)$. Determina las coordenadas del centro, cuánto mide el radio,cual es la ecuación de la circunferencia y traza la gráfica.



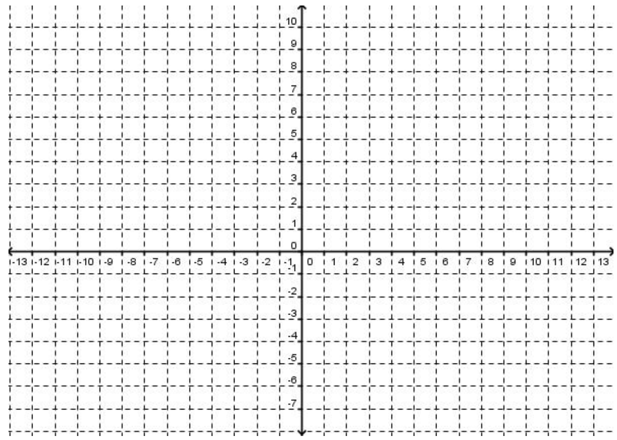
8. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento $A(3,4)$, $B(-7,2)$. Cual es el valor del radio y las coordenadas del centro. Traza la gráfica.



9. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento $A(3,-2)$, $B(5,4)$. Cual es el valor del radio y cuales son las coordenadas del centro. Traza la gráfica de la circunferencia.



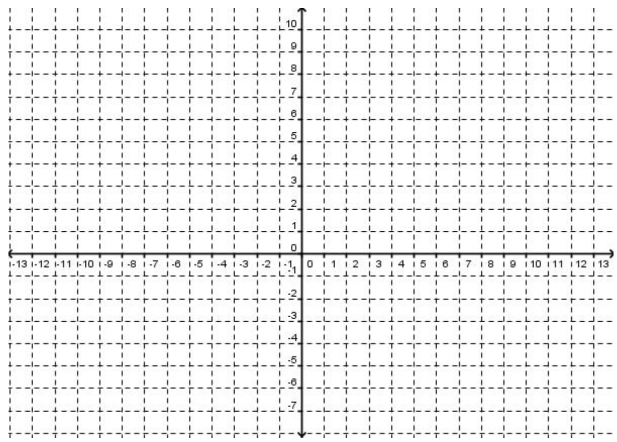
10. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento $A(3,6)$, $B(-5,2)$. Cual es el valor del radio y cuales son las coordenadas del centro. Traza la gráfica de la circunferencia.



6.7. Ecuación de la circunferencia con el centro(h, k) y un punto $P(x, y)$ por donde pasa

Para encontrara la ecuación ordinaria de la circunferencia hace falta conocer la longitud del radio, es decir la distancia entre el centro y el punto dado. Con estos datos se puede obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia.

Ejemplo 1: El centro de la circunferencia es el punto $C(4, 2)$ y pasa por el punto $P(-1, -1)$



Determina el radio con la distancia entre los puntos.

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & y_1 & & x_2 & y_2 \\ C(4, & 2) & \text{y} & P(-1, & -1) \end{array}$$

Sustituimos los valores en la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y tenemos:

$r = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-2)^2}$

$r = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}$

$r = \sqrt{25 + 9}$

$r = \sqrt{34}$

Sustituimos las coordenadas del centro y el radio en la ecuación ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$.

$$\begin{array}{cccc} h & k & & \\ C(4, & 2) & \text{y} & r = \sqrt{34} \end{array}$$

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{34})^2$

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 34$ Ecuación Forma Ordinaria

Desarrollando la ecuación tenemos:

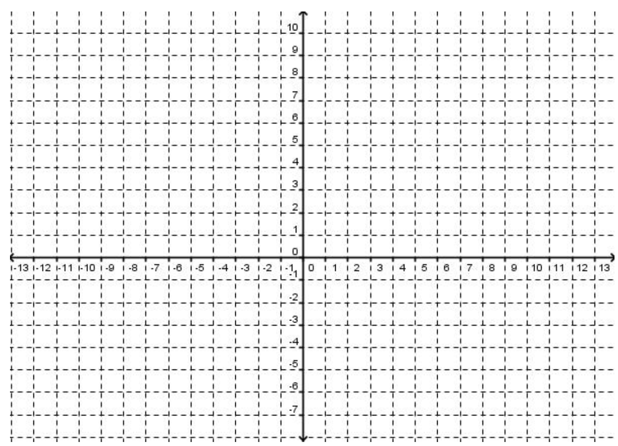
$x^2 - 2(x)(4) + (4)^2 + y^2 - 2(y)(2) + (2)^2 = 34$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 - 34 = 0$

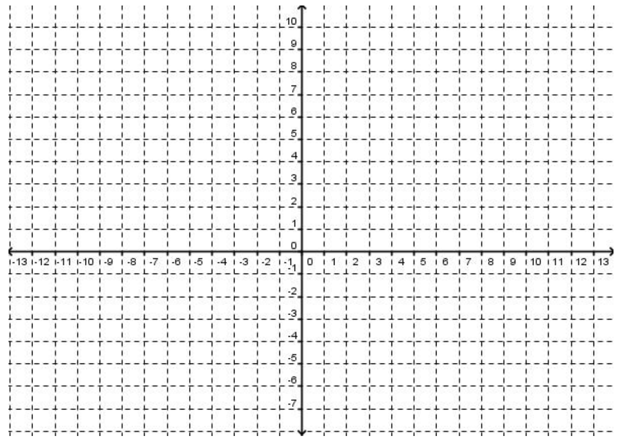
$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 14 = 0$ Ecuación Forma General

Ejercicio 6.3

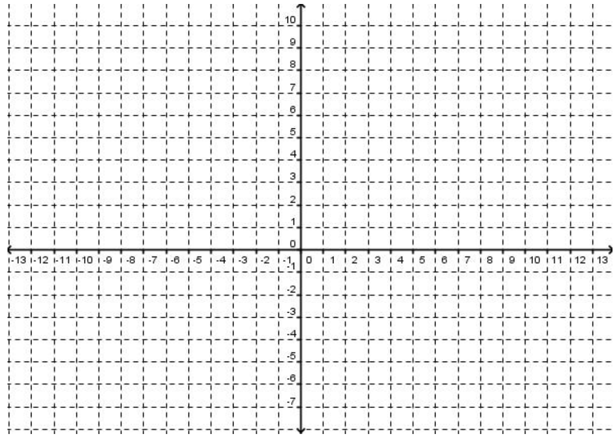
1. El centro de la circunferencia es el punto $C(-3, 1)$ y que pasa por el punto $P(5, -3)$



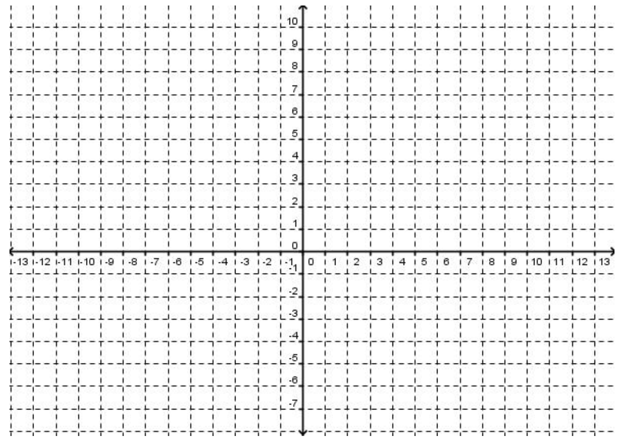
2. El centro de la circunferencia es el punto $C(-1, 3)$ y que pasa por el punto $P(2, -1)$



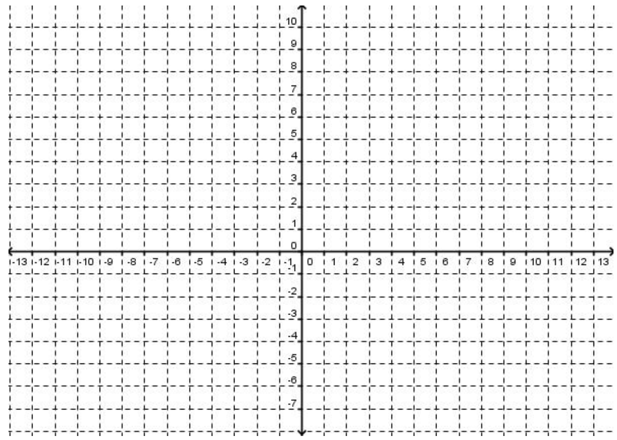
3. El centro de la circunferencia es el origen y que pasa por el punto $P(-3, 2)$



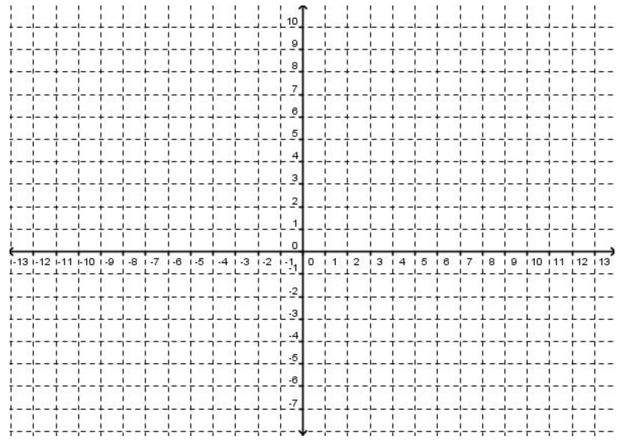
4. El centro de la circunferencia es el punto $C(-1,3)$ y que pasa por el punto $P(3,-9)$



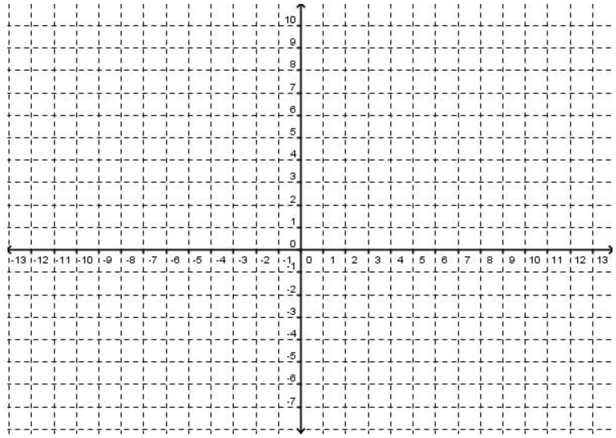
5. El centro de la circunferencia es el origen y que pasa por el punto $P(-5,-4)$



6. El centro de la circunferencia es el punto $C(6,8)$ y que pasa por el punto $P(-4,-2)$



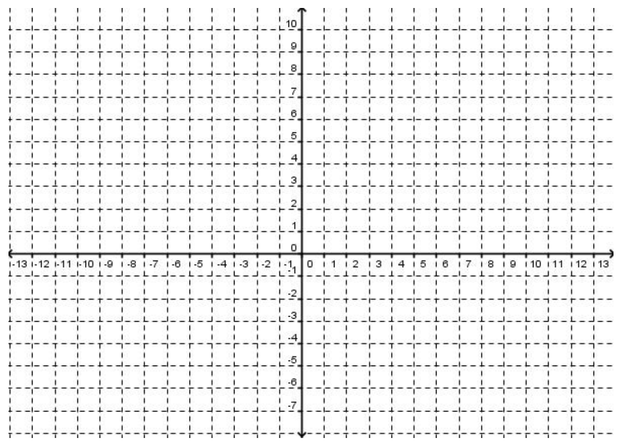
7. El centro de la circunferencia es el origen y que pasa por el punto $P(7, -6)$



6.8. Ecuación de una circunferencia dado el centro y la ecuación de una de sus rectas tangentes

Determina la distancia que hay del centro a la recta tangente para obtener el radio y poder sustituir en la ecuación ordinaria.

Ejemplo 1: Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(5,-3)$ y es tangente a la recta $10x-6y+9=0$



Escribimos la ecuación de la recta en la forma pendiente ordenada para trazar la gráfica.

$10x-6y+9=0$

$-6y=-10x-9$

$y=\frac{-10}{-6}x-\frac{9}{-6}$

$y=\frac{5}{3}x+\frac{3}{2}$ obtenemos que $m=\frac{5}{3}$ y $b=\frac{3}{2}$

Determina la distancia que hay del centro a la recta tangente al sustituir en la fórmula $d=|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}|$

x_1	y_1	A	B	C
C(5	,-3)	10x	-6y	+9=0

$r=|\frac{10(5)-6(-3)+9}{\sqrt{(10)^2+(-6)^2}}|$

$r=|\frac{50+18+9}{\sqrt{100+36}}|$

$r=|\frac{77}{\sqrt{136}}|$

Sustituimos los valores del centro y del radio en la ecuación ordinaria de la circunferencia

h	k		
$C(5,$	$-3)$	y	$r=\frac{77}{\sqrt{136}}$

$(x-5)^2+(y+3)^2=(\frac{77}{\sqrt{136}})^2$

$(x-5)^2+(y+3)^2=\frac{(77)^2}{(\sqrt{136})^2}$

$(x-5)^2+(y+3)^2=\frac{5929}{136}$ Ecuación Forma Ordinaria

Desarrollando la ecuación tenemos:

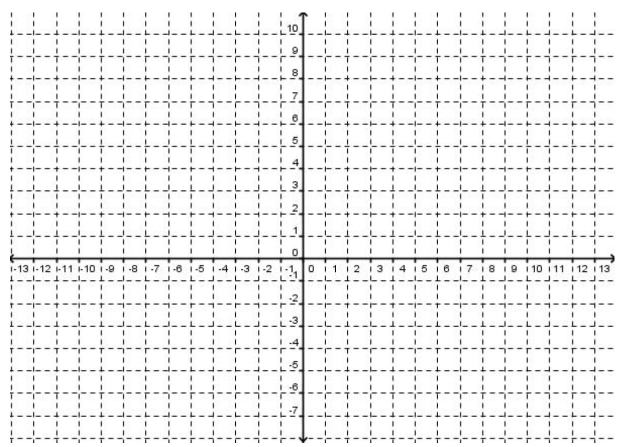
$x^2-2(x)(5)+(5)^2+y^2+2(y)(3)+(3)^2=\frac{5929}{136}$

$x^2-10x+25+y^2+6y+9-\frac{5929}{136}=0$

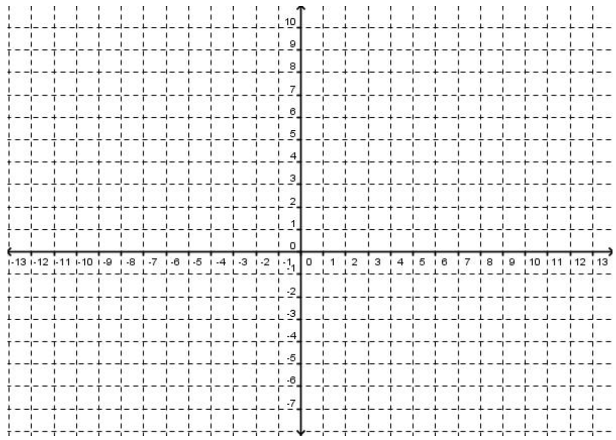
$x^2+y^2-10x+6y-\frac{1305}{136}=0$ Ecuación Forma General

Ejercicio 6.4

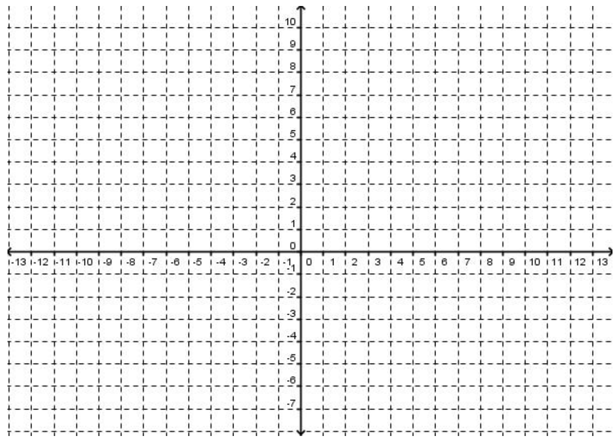
1. Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(0,7)$ y que es tangente a la recta $3x-4y-32=0$



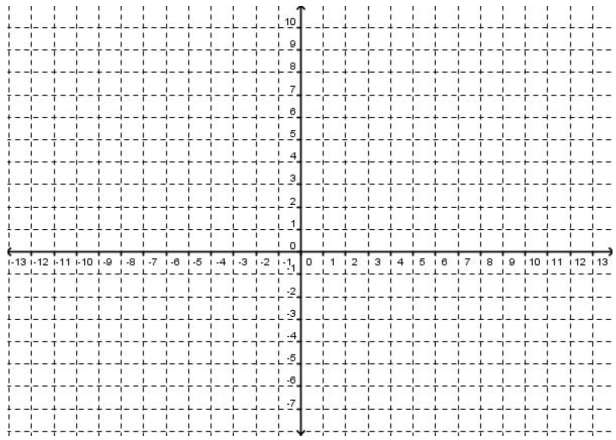
2. Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(0,0)$ y que es tangente a la recta $5x + 12y - 26 = 0$



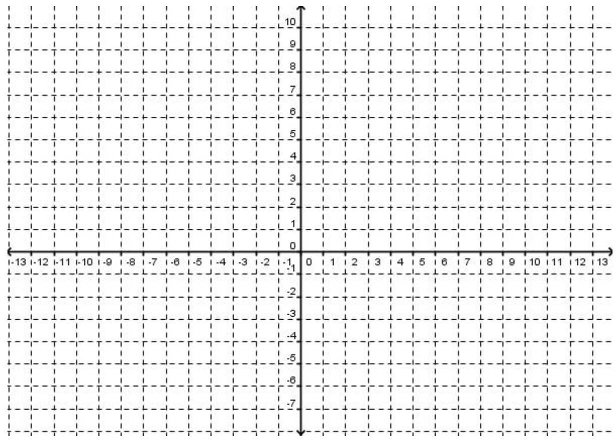
3. Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(4, 5)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y - 2 = 0$



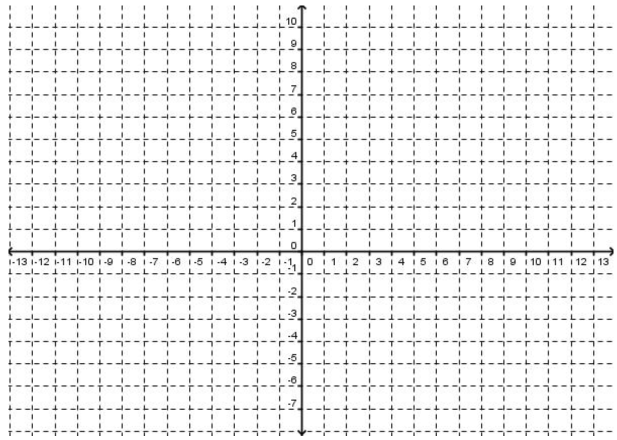
4. Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(3, 0)$ y que es tangente a la recta $2x - 3y - 1 = 0$



5. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(-1, 2)$ y que es tangente a la recta $y = \frac{-4}{5}x - 7$. Determina la longitud del radio. Traza las gráficas de la circunferencia y la recta.

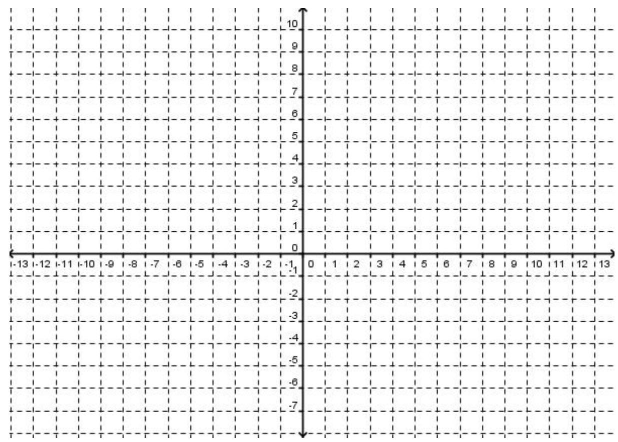


6. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(1, 5)$ y es tangente a la recta $y = -2x + 2$. Cual es el valor del radio. Traza la gráfica de la circunferencia y la recta.



6.9. Ecuación de la Circunferencia con centro sobre una recta dada y que es tangente a otra recta

Ejemplo 1: Determina la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $2x-y+1=0$ en el punto $(2,5)$ y el centro está sobre la recta $x+y-9=0$.



Convertimos las rectas en su forma pendiente ordenada para graficar.

Recta tangente	Recta que contiene al centro
$2x-y+1=0$	$x+y-9=0$
$y=2x+1$	$y=-x+9$
$m=2$ y $b=1$	$m=-1$ y $b=9$

La recta que pasa por $(2,5)$ y es perpendicular a la recta tangente $2x-y+1=0$ pasa por el centro del circulo.

Determina la pendiente perpendicular $m_{\perp}=\frac{-1}{m}$

$m_{\perp}=\frac{-1}{2}$

Determina la ecuación de la recta perpendicular a la recta tangente con el punto $(2,5)$ y la pendiente perpendicular

$$\begin{array}{ll} x_1 & y_1 \\ (2, & 5) \end{array} \quad \text{y} \quad m_{\perp}=\frac{-1}{2}$$

$y-5=\frac{-1}{2}(x-2)$

$2(y-5)=-1(x-2)$

$2y-10=-x+2$

$x + 2y - 10 - 2 = 0$

$x + 2y - 12 = 0$

Trazamos la recta en la gráfica y para determinar las coordenadas del centro, es necesario resolver el sistema:

$$\begin{cases} \text{x+2y-12=0} \\ \text{x+y-9=0} \end{cases}$$

El centro está en $C(6,3)$.

Determina la distancia del centro $C(6,3)$ al punto $(2,5)$ para determinar la longitud del radio.

$$\begin{array}{lllll} & x_1 & y_1 & & x_2 \quad y_2 \\ C(& 6, & 3) & \text{y} & P(2, \quad 5) \end{array}$$

$r = \sqrt{(2-6)^2 + (5-3)^2}$

$r = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2}$

$r = \sqrt{16 + 4}$

$r = \sqrt{20}$

Sustituimos las coordenadas del centro y la longitud del radio en la ecuación ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

$$\begin{array}{lllll} & h & k & & \\ C(& 6, & 3) & \text{y} & r = \sqrt{20} \end{array}$$

$(x-6)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{20})^2$

$(x-6)^2 + (y-3)^2 = 20$ Ecuación Forma Ordinaria

Desarrollando la ecuación tenemos:

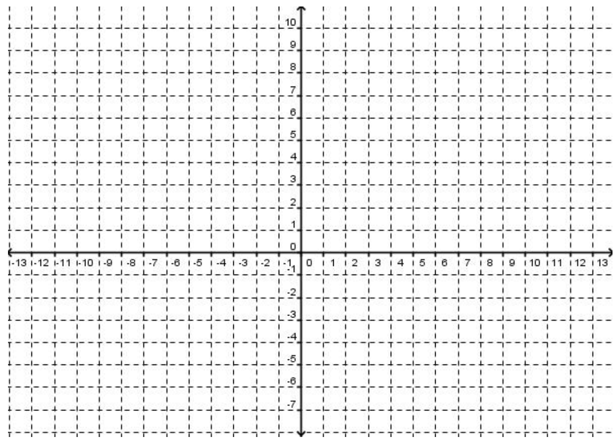
$x^2 - 2(x)(6) + (6)^2 + y^2 - 2(y)(3) + (3)^2 = 20$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 - 20 = 0$

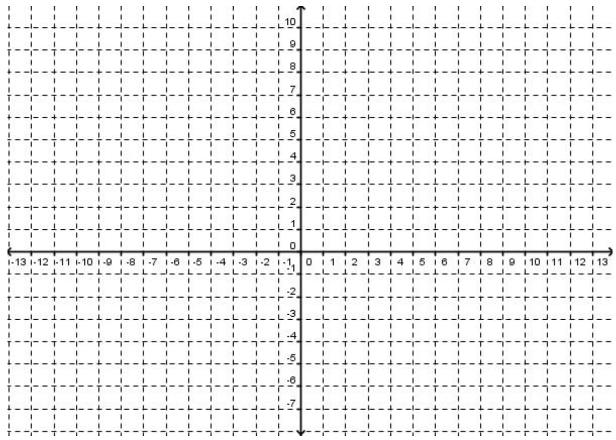
$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0$ Ecuación Forma General

Ejercicio 6.5

1. Determina la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $3x - 4y - 4 = 0$ en el punto $(-4, -4)$ y el centro está sobre la recta $x + y + 7 = 0$.

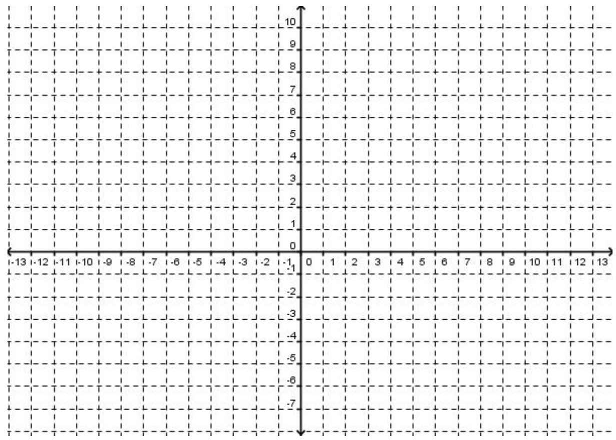


2. Determina la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $5x - y - 3 = 0$ en el punto $(2, 7)$ y el centro está sobre la recta $x + 2y - 19 = 0$.



6.10. Ecuación de la Circunferencia que pasa por tres puntos no alineados

Ejemplo 1: Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,5)$, $B(3,-2)$, $C(-4,-3)$.



Determina la ecuación de dos mediatrices.

Mediatriz AB

Determina el punto medio de A y B

$$\begin{array}{lllll} & x_1 & y_1 & & x_2 \quad y_2 \\ A(2, & 5) & \text{y} & B(3, & -2) \end{array}$$

$P_m(\frac{2+3}{2}, \frac{5-2}{2})$

$P_m(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

La pendiente de A y B

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Determina la pendiente perpendicular

$m_{\perp} = \frac{-1}{m}$

$m_{\perp AB} = \frac{-1}{-7}$

$m_{\perp AB} = \frac{1}{7}$

Determina la ecuación de la mediatriz de AB con el punto medio de AB y la pendiente perpendicular

$$Pm_{AB}(\overset{x_1}{\tfrac{5}{2}}, \quad \overset{y_1}{\tfrac{3}{2}}) \quad \text{y} \quad m_{\perp AB} = \tfrac{1}{7}$$

La ecuación de la mediatriz es: x-7y+8=0

Mediatriz AC

Determina el punto medio de A y C

$$A(\overset{x_1}{2}, \quad \overset{y_1}{5}) \quad \text{y} \quad C(\overset{x_2}{-4}, \quad \overset{y_2}{-3})$$

El punto medio de AC es $Pm(-1, 1)$

Determina la pendiente de AC

$m_{AC} = \frac{4}{3}$

La pendiente perpendicular de AC

$m_{\perp AC} = -\frac{3}{4}$

Determina la ecuación de la mediatriz de AC con el punto medio de AC y la pendiente perpendicular
$Pm_{AC}(-1, \quad 1) \quad \text{y} \quad m_{\perp AC} = \frac{-3}{4}$

La ecuación de la mediatriz es: 3x+4y-1=0

Para encontrar el punto de intersección de las mediatrices (Circuncentro).

Utilizamos las ecuaciones de las mediatrices de AB y AC para determinar las coordenadas de su punto de intersección

El centro está en $C(-1, 1)$

Determina la longitud del radio de la circunferencia del centro a uno de los extremos

El radio es r=5
Sustituimos en la ecuación ordinaria de la circunferencia

$$C(\overset{h}{-1}, \quad \overset{k}{1}) \quad \text{y} \quad r = 5$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = (5)^2$$

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ Ecuación Forma Ordinaria

Desarrollando la ecuación tenemos:

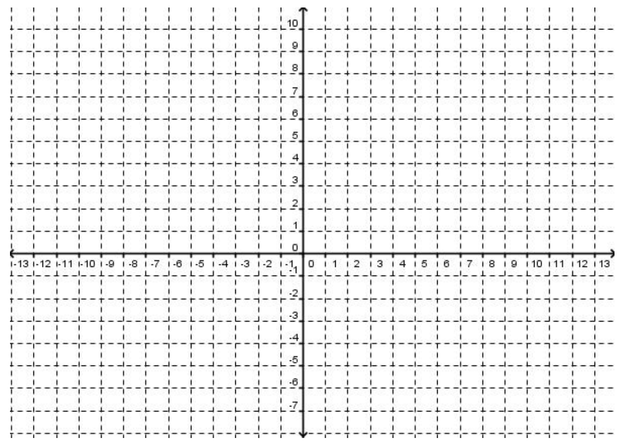
$$x^2 + 2(x)(1) + (1)^2 + y^2 - 2(y)(1) + (1)^2 = 25$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0$$

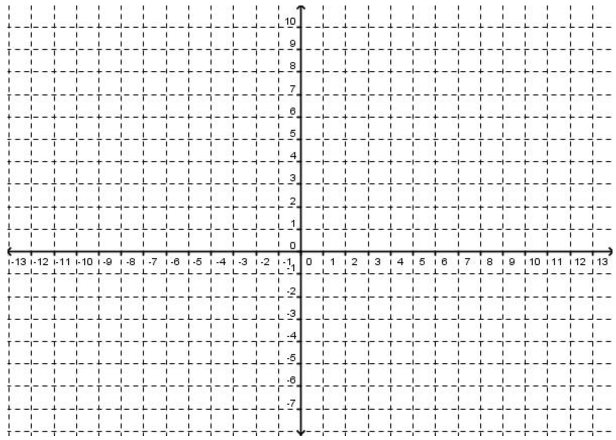
$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ Ecuación Forma General

Ejercicio 6.6:

1. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(4,-5)$, $B(6,1)$, $C(0,3)$.



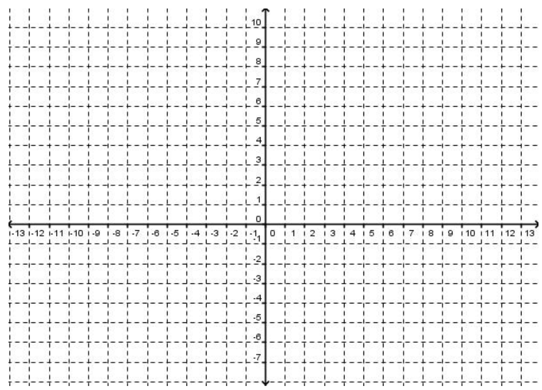
2. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-5, 2)$, $B(1, 2)$, $C(3, 0)$.



6.11. Relación entre las ecuaciones ordinaria y general de la circunferencia

Para obtener la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, se agrupan los términos que contienen a x, así como, los que contienen a las y, trasladando el terminó independiente al segundo miembro de la igualdad. Completando los trinomios cuadrados perfectos y factorizando, se obtiene la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria.

Ejemplo 1: Si la ecuación general de una circunferencia es: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, determina la ecuación en su forma ordinaria, la longitud del radio y las coordenadas del centro. Traza la gráfica.



Como a la ecuación que queremos llegar es la forma ordinaria de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Agrupamos los términos

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4$

Necesitamos completar los trinomios

$x^2 - 4x + \ + y^2 - 2y = 4$

Para obtener el tercer terminó despejamos a partir del segundo terminó

2x( )=♯x   2y( )=♯y

2x( )=4x   2y( )=2y

( )=$\frac{4x}{2x}$ ( )=$\frac{2y}{2y}$

( )= 2   ( )=1

Completando el trinomio cuadrado para cada variable, tenemos:

$x^2 - 4x + (2)^2 + y^2 - 2y + (1)^2 = 4 + (2)^2 + (1)^2$

Factorizando los trinomios tenemos

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 + 4 + 1$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

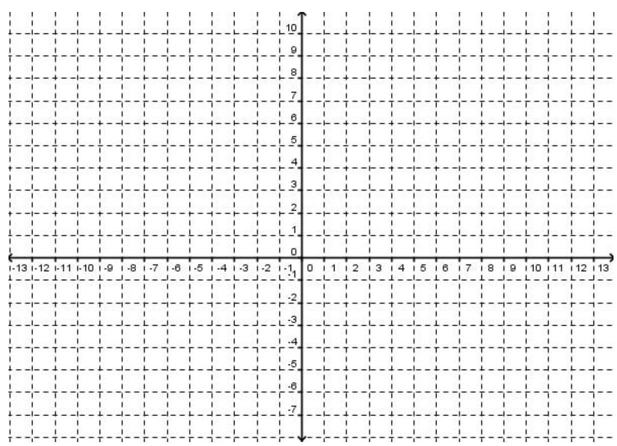
A partir de la ecuación ordinaria de la circunferencia, tenemos

Centro$(2, 1)$ y $r^2 = 9$

$r = \sqrt{9}$

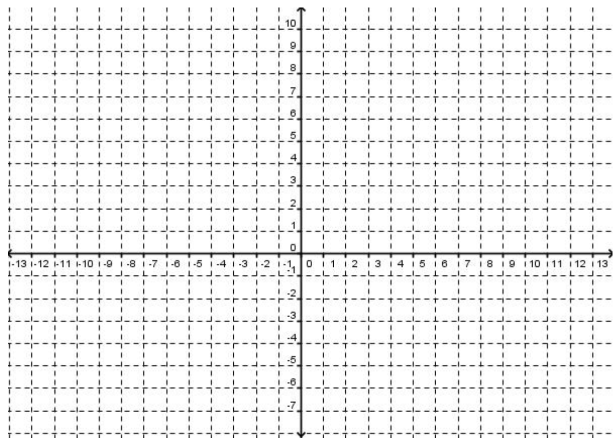
$r = 3u$

Ejemplo 2: Si la ecuación de una circunferencia es: $5x^2 + 5y^2 - 30x - 20y - 80 = 0$, determina su ecuación en forma ordinaria, las coordenadas del centro, la longitud del radio y traza la gráfica.

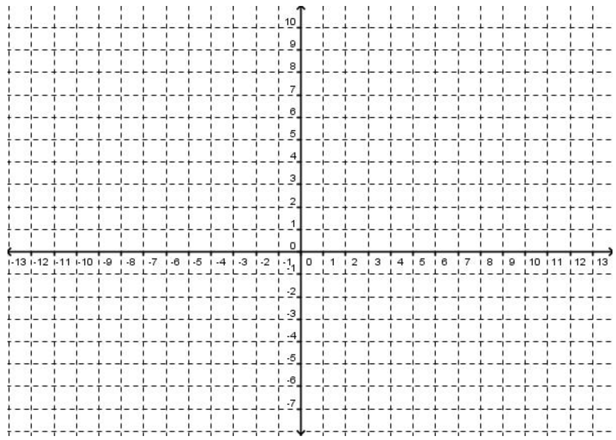


Ejercicio 6.7:

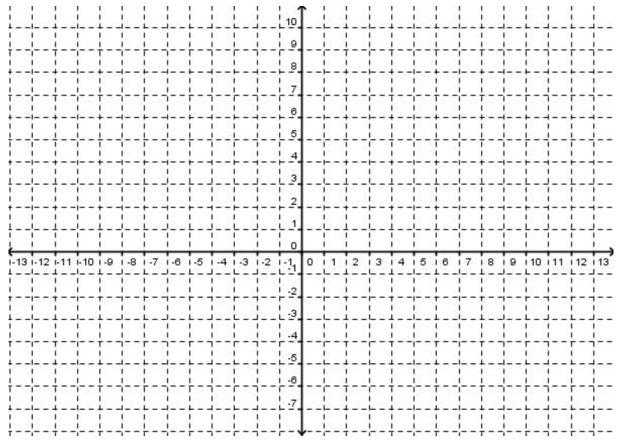
1. Si la ecuación de una circunferencia es: $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 14 = 0$, determina su ecuación en forma ordinaria, las coordenadas del centro, la longitud del radio y traza la gráfica.



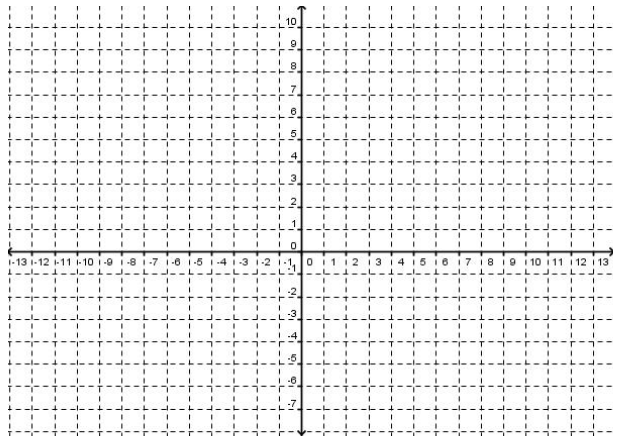
2. Si la ecuación de una circunferencia es: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$, determina su ecuación en forma ordinaria, las coordenadas del centro, la longitud del radio y traza la gráfica.



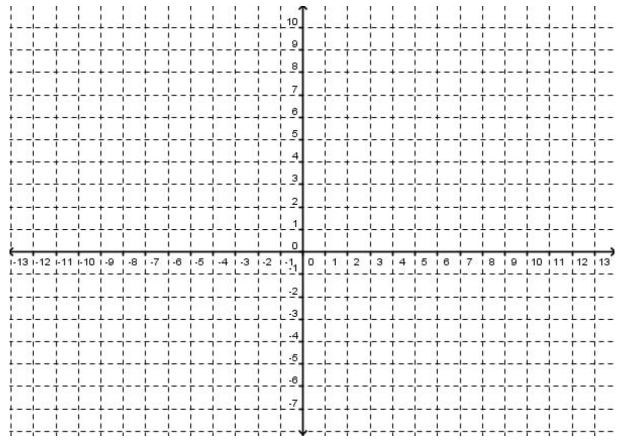
3. Si la ecuación de una circunferencia es: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$, determina su ecuación en forma ordinaria, las coordenadas del centro, la longitud del radio y traza la gráfica.



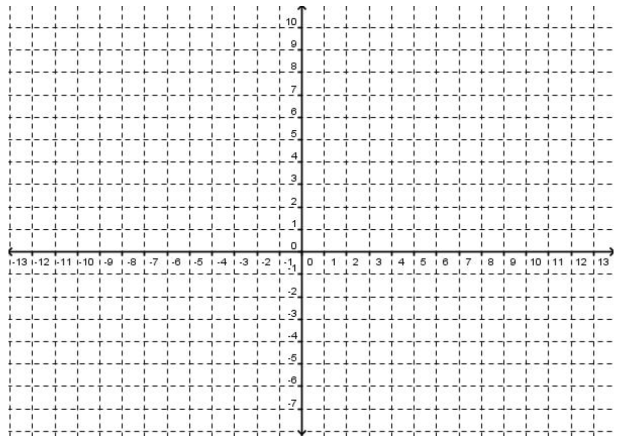
4. Si la ecuación de una circunferencia es: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$, determina su ecuación en forma ordinaria, las coordenadas del centro, la longitud del radio y traza la gráfica.



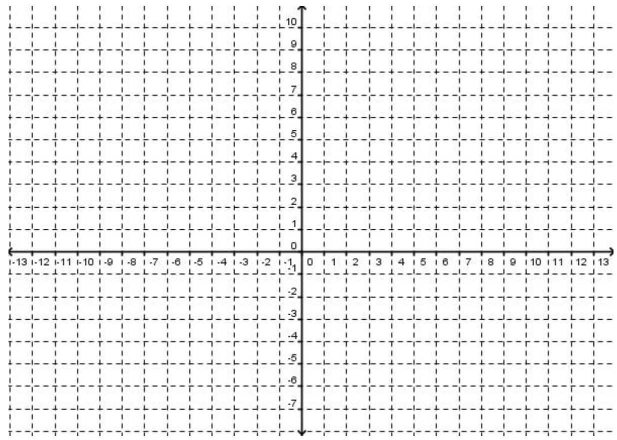
5. Si la ecuación de una circunferencia es: $x^2 + y^2 + 8x - 12y - 12 = 0$, determina su ecuación en forma ordinaria, las coordenadas del centro, la longitud del radio y traza la gráfica.



6. Si la ecuación de una circunferencia es: $2x^2 + 2y^2 - 16x + 18y - 148 = 0$, determina su ecuación en forma ordinaria, las coordenadas del centro, la longitud del radio y traza la gráfica.



7. Si la ecuación de una circunferencia es: $3x^2 + 3y^2 - 8x + 9y - 2 = 0$, determina su ecuación en forma ordinaria, las coordenadas del centro, la longitud del radio y traza la gráfica.



6.12. Sistemas de Ecuaciones No Lineales

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, en cada caso, bosqueja la gráfica y menciona cuantas soluciones tiene el sistema y cuales son:

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \mathrm{y}{=}\mathrm{x}^2+3 \\ \mathrm{x}^2+y^2=3 \end{cases}$$

La ecuación $x^2+y^2=3$ corresponde a una circunferencia ya que si la comparas con tu formulario la ecuación tiene la estructura de $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ donde los valores de h y k son las coordenadas del centro de la circunferencia y r es el valor del radio.

$$\begin{gathered} (x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \\ x^2+y^2=3 \\ (x-0)^2+(y-0)^2=3 \\ \nwarrow \text{centro} \nearrow \end{gathered}$$

En éste caso se obtiene:

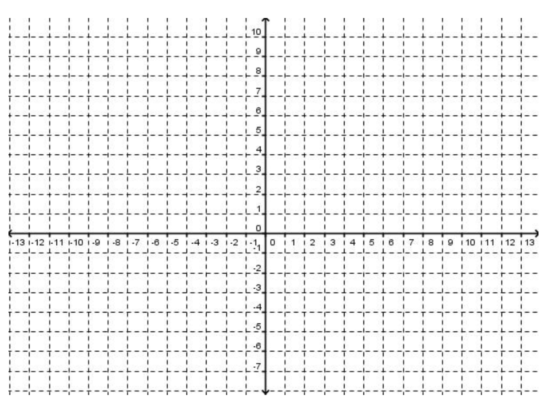
Centro(0,0)
$r^2=3$
$r=\sqrt{3}$

De la parábola $y=x^2+3$ determinamos su ecuación en forma ordinaria
$y-3=x^2$

$y-3=(x-0)^2$

$(x-0)^2=1(y-3)$
Se obtiene el vértice V(0,3) y $4p=1$
$p=\frac{1}{4}$

Al construir la gráfica del sistema, se observan los puntos donde ambas curvas se intersectan.



Al no intersecarse, el sistema no tiene solución.

Para resolver el sistema analíticamente, despejamos en ambas ecuaciones a x^2

$$\begin{cases} \text{y=x}^2 + 3 \text{ - - - - - } x^2 = y - 3 \\ \text{x}^2 + y^2 = 3 \text{ - - - } x^2 = 3 - y^2 \end{cases}$$

Igualando las x^2

$x^2 = x^2$

$y - 3 = 3 - y^2$

$y^2 + y - 6 = 0$

a=1 b=1 c=-6

$y = \frac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(-6)}}{2(1)}$

$y = \frac{-1\pm\sqrt{1-4(-6)}}{2}$

$y = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$

$y = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$

$y = \frac{-1\pm5}{2} \nearrow$ $y_1 = \frac{-1+5}{2}$

$y_1 = \frac{4}{2}$

$y_1 = 2$

$\searrow$ $y_2 = \frac{-1-5}{2}$

$y_2 = \frac{-6}{2}$

$y_2 = -3$

Al sustituir $y = 2$ en la primera ecuación tenemos

$y = x^2 + 3$

$y = 2$

$2 = x^2 + 3$

$2 - 3 = x^2$

$-1 = x^2$

Como no hay un número que elevado al cuadrado me de un número negativo al sustituir $y = 2$ el sistema no tiene solución

Al sustituir $y = -3$ en la primera ecuación tenemos

$y = x^2 + 3$

$y = -3$

$-3 = x^2 + 3$

$-3 - 3 = x^2$

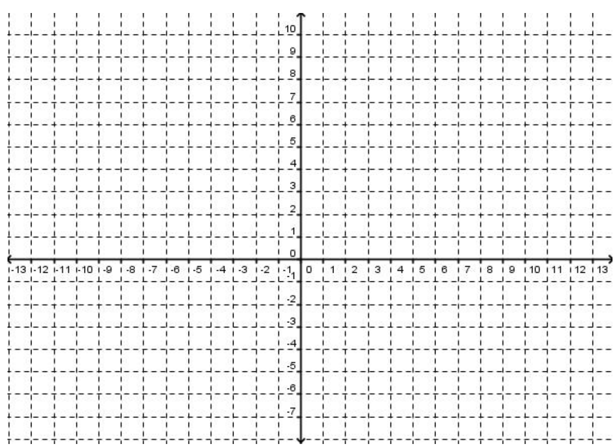
$-6 = x^2$

Como no hay un número que elevado al cuadrado me de un número negativo al sustituir $y = -3$ el sistema tampoco tiene solución

Por eso es que gráficamente las ecuaciones **no** se intersectan. Por lo tanto el sistema **no tiene solución.**

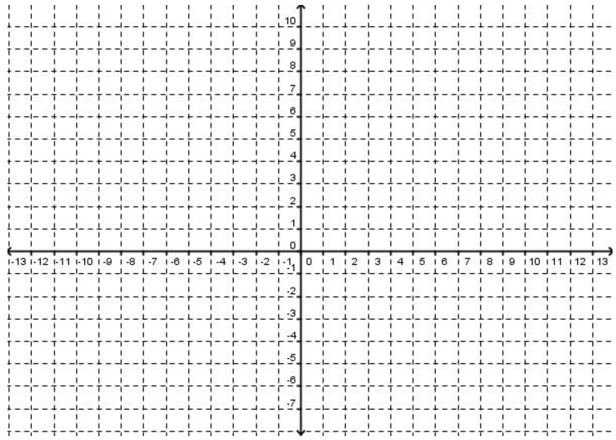
Ejemplo 2:

$$\begin{cases} \text{x}^2 + y^2 = 9 \\ (\text{x}+4)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$



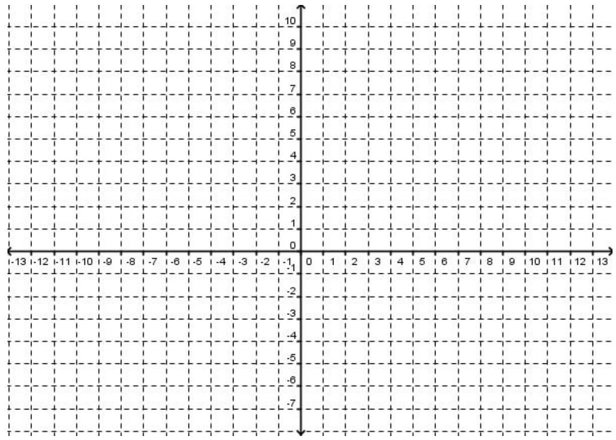
Ejemplo 3:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \text{x-2y=-10} \end{cases}$$



Ejemplo 4:

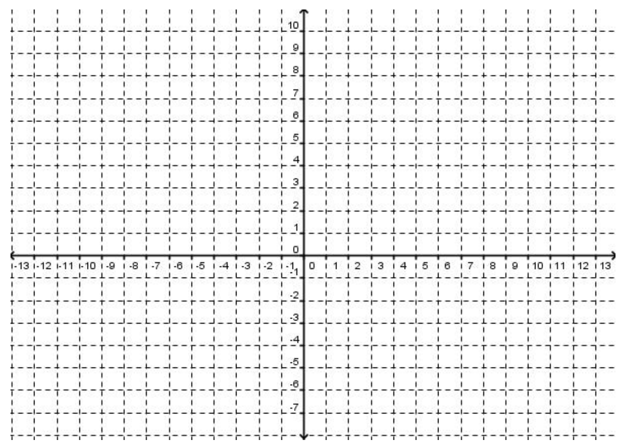
$$\begin{cases} \mathrm{y}=\mathrm{x}^2-3 \\ \mathrm{x}^2+y^2=3 \end{cases}$$



Ejercicio 6.8 Dado los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales, en cada caso, bosqueja la gráfica y menciona cuantas soluciones tiene el sistema y cuales son:

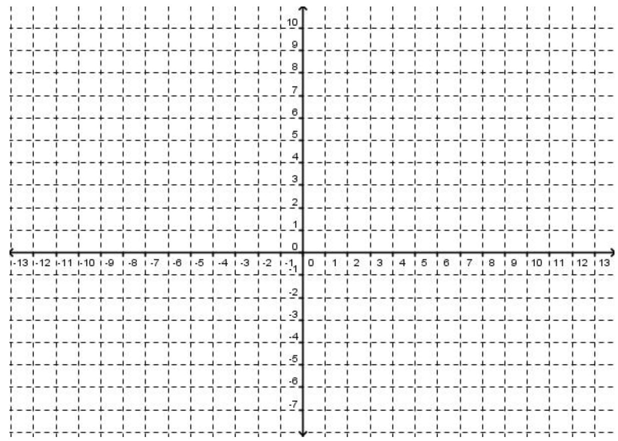
a)

$$\begin{cases} \mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + 3 \\ \mathrm{x}^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$



b)

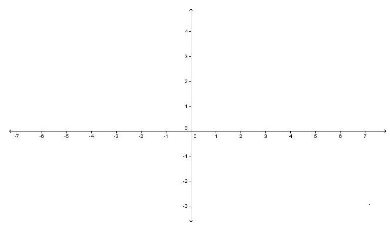
$$\begin{cases} \mathrm{x}^2 + y^2 = 9 \\ (\mathrm{x}\text{-}4)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$



6.13. La Elipse y sus Ecuaciones Cartesianas

Definición: La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. A estos puntos fijos se les llama focos de la elipse.

6.14. Método del Jardinero



La curva trazada se llama elipse, los puntos fijos que se consideran como referencia para trazar la curva se llaman focos y su distancia se denomina distancia focal.

Si se coloca un sistema de ejes coordenados de manera que el eje de las abscisas coincida con la distancia focal y el eje de las ordenadas coincida con el punto medio de la distancia focal se observa que existe simetría de la elipse con respecto al eje X, la porción de curva trazada en la parte superior es simétrica a la parte inferior, así mismo se observa que existe simetría con respecto al eje Y, la porción de la curva del lado derecho es simétrica a la del lado izquierdo.

6.15. Elementos o puntos notables de la Elipse

Vértices: Son los puntos que se ubican en los extremos del eje mayor: V_1 y V_2

Focos: Son los puntos F_1 y F_2.

Eje Mayor: Es el segmento de recta que pasa por los focos cuyos extremos son los puntos V_1 y V_2 y su longitud es $2a$.

Eje menor: Es el segmento de recta que pasa por el centro de la elipse, perpendicular al eje mayor y cuyos extremos son B_1 y B_2. Su longitud es $2b$.

Distancia focal: Es el segmento de recta cuyos extremos son los dos focos y su longitud es $2c$.

Lado recto: Es el segmento de recta perpendicular al eje mayor, que pasa por cada uno de los focos y cuyos extremos son dos puntos de la elipse.

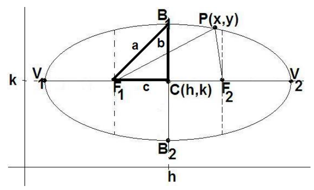
Centro: Es el punto medio del eje mayor y del eje menor. El centro se puede ubicar en el origen o fuera de él en $C(h, k)$.

a= La distancia del centro al vértice

b= La distancia del centro al extremo del eje menor

c= La distancia del centro al foco

Si el centro de la elipse está en el origen y el eje mayor es paralelo a alguno de los ejes por ejemplo con el eje de las abscisas notamos que **b** y **c** son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es **a**, por lo que la relación pitagórica de los parámetros es: $a^2 = b^2 + c^2$.



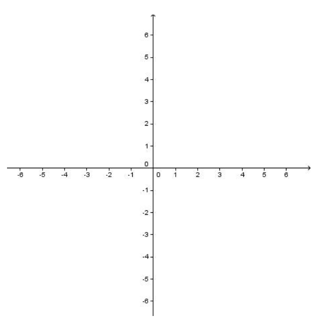
6.16. Excentricidad, Directriz y Lado Recto de la Elipse

Excentricidad: Se define como la razón de la distancia focal con respecto a la longitud del eje mayor. La excentricidad toma valores entre 0 y 1.

$e = \frac{2c}{2a}$

$e = \frac{c}{a}$

Calculo de la excentricidad



Si los vértices son $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$ y los extremos son $B(0,5)$ y $B(0,-5)$.

El centro de la elipse es el punto medio de los vértices en éste caso $C(0,0)$

a=la distancia del centro al vértice.

a=5

b=la distancia del centro al extremo.

b=5

Los parámetros cumplen la relación pitagórica

$a^2 = b^2 + c^2$

$5^2 = 5^2 + c^2$

$25 = 25 + c^2$

$c^2 = 25 - 25$

$c^2 = 0$

$c = \sqrt{0}$

$c = 0$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{0}{5}$

$e = 0$

Comparemos con otros datos el valor de la excentricidad.

$V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ y $B_1(0,4)$, $B_2(0,-4)$ $\quad$ $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ y $B_1(0,3)$, $B_2(0,-3)$

$V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ y $B_1(0,2)$, $B_2(0,-2)$ $\quad$ $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ y $B_1(0,1)$, $B_2(0,-1)$

Como la elipse tiene dos focos tendrá dos **directrices** cuyas ecuaciones cuando el eje mayor está sobre el eje de las abscisas son respectivamente:

$x + \frac{a}{e} = 0$ y $x - \frac{a}{e} = 0$

Si los focos están sobre el eje de las ordenadas, las ecuaciones de las directrices son:

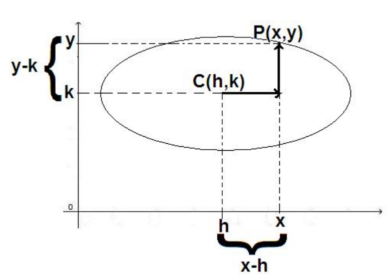
$y + \frac{a}{e} = 0$ y $y - \frac{a}{e} = 0$

Lado Recto: Es equivalente a $LR = \frac{2b^2}{a}$

6.17. Ecuación de la Elipse con centro en C(h,k) y eje mayor paralelo a uno de los ejes coordenados

Al desplazar la gráfica de la elipse en el plano su forma y sus dimensiones no cambian por lo que sus parámetros a, b, c y la suma de las distancias de cualquier punto que se encuentra sobre la elipse a los focos se conservan.

Solo varían las coordenadas de los puntos situados en el plano, si la elipse se desplaza h unidades paralela al eje de las abscisas y k unidades paralela al eje de las ordenadas, el centro tiene coordenadas $C(h,k)$ y todos sus puntos se desplazan esas mismas unidades y en la misma dirección



El valor de la variable x corresponde a la distancia que hay del centro a la abscisa del punto P, y la variable y corresponde a la distancia que hay del centro a la ordenada del punto P, estas distancias corresponden a $x-h$ y $y-k$ respectivamente.

Elipse Horizontal

Si el centro de la elipse es el punto $C(h,k)$ y el eje mayor tiene la dirección del eje de las X, ecuación de la elipse es de la forma:

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

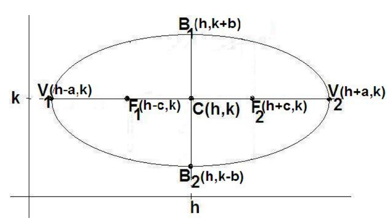
Que corresponde a la ecuación ordinaria de la elipse con centro $C(h,k)$ con eje mayor paralelo al eje X.

Los puntos notables de la elipse horizontal son:

Focos: $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$

Vértices del eje mayor: $V_1(h-a,k)$ y $V_2(h+a,k)$

Extremos del eje menor: $B_1(h,k+b)$ y $B_2(h,k-b)$



Elipse Vertical

Si el centro de la elipse es el punto $C(h,k)$ y el eje mayor tiene la dirección del eje de las Y, la ecuación de la elipse es de la forma:

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

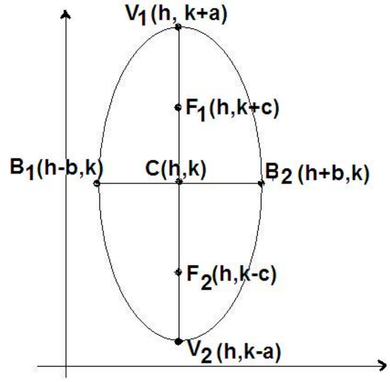
Que corresponde a la ecuación ordinaria de la elipse con centro $C(h,k)$ con eje mayor paralelo al eje Y.

Los puntos notables de la elipse son:

Focos: $F_1(h,k+c)$ y $F_2(h,k-c)$

Vértices del eje mayor: $V_1(h,k+a)$ y $V_2(h,k-a)$

Extremos del eje menor: $B_1(h-b,k)$ y $B_2(h+b,k)$



6.18. Ecuación General de la Elipse

Para obtener la ecuación general de la elipse se parte de la ecuación ordinaria de la elipse considerando que es paralela al eje de las abscisas o bien es paralela al eje de las ordenadas.

Por ejemplo a partir de la ecuación ordinaria de la elipse, con eje mayor paralelo al eje de las abscisas.

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Se multiplica la ecuación por a^2b^2 y se desarrollan las potencias.

$a^2b^2\left(\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\right)$

$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$

$b^2(x^2 - 2hx + h^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$

$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2ky + a^2k^2 = a^2b^2$

$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2 = 0$

Al utilizar un proceso similar para la ecuación ordinaria de la elipse paralela al eje de las ordenadas (eje Y) se obtiene

$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$

Los coeficientes de x^2 y y^2 son siempre positivos. Además ambas expresiones tienen la misma estructura algebraica, es decir, una ecuación de segundo grado en dos variables. Independientemente de si la elipse es paralela al eje de las X o al eje de las Y.

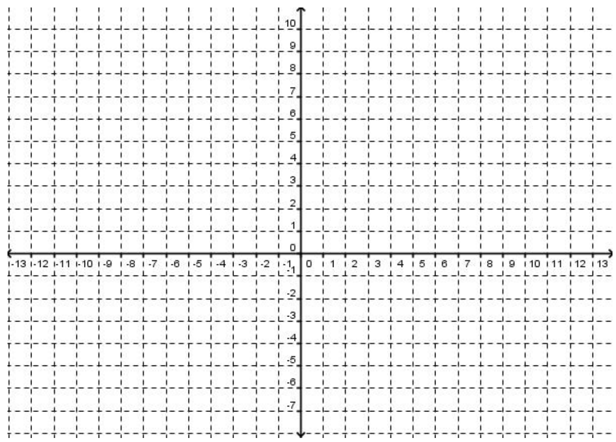
La forma general de la elipse es:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con A pero del mismo signo

Si la elipse tiene eje mayor paralelo al eje de las abscisas $A < C$ y si es paralelo al eje de las ordenadas $A > C$

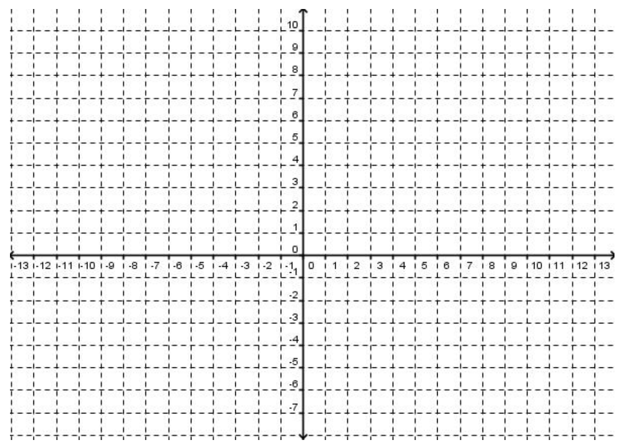
6.19. Determinación de la ecuación general de la elipse dados tres de sus elementos

Ejemplo 1: Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los extremos, centro, foco, lado recto y traza la gráfica de la elipse si tiene vértices en $V_1(6, -2)$, $V_2(-4, -2)$ y un foco está en $F_1(4, -2)$.

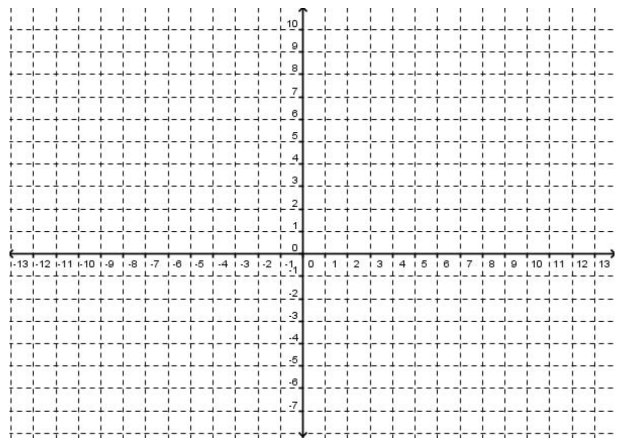


Ejercicio: 6.9

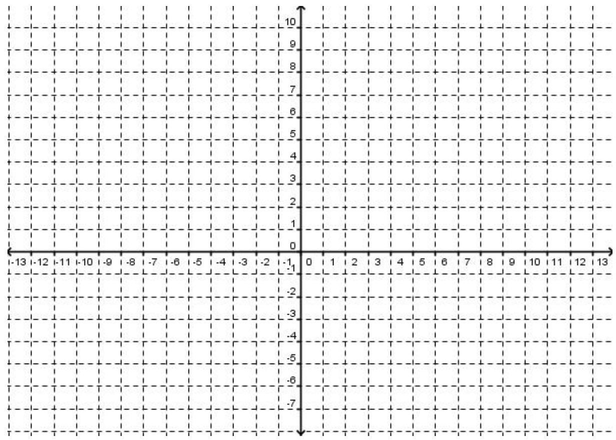
1. Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los focos, centro, lado recto y traza la gráfica de la elipse si tiene vértices en $V_1(1,2)$, $V_2(7,2)$ y sus extremos del eje menor están en $B_1(4,4)$.



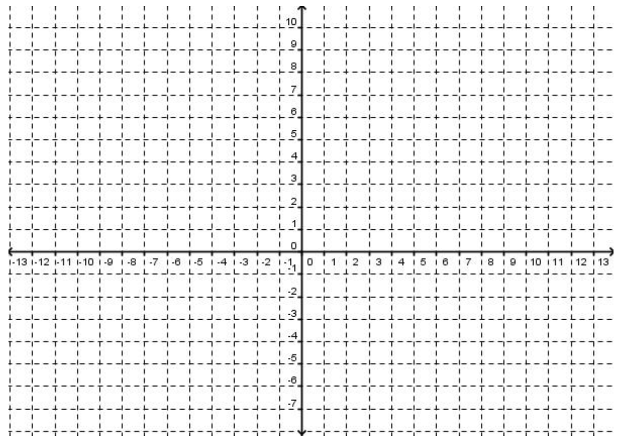
2. Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los focos, centro, lado recto y traza la gráfica de la elipse si tiene vértices en $V_1(-1, 2)$, $V_2(5, 2)$ y sus extremos del eje menor están en $B_1(2, 4)$.



3. Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los vértices, centro, lado recto y traza la gráfica de la elipse si tiene focos en $F_1(3,-1)$, $F_2(3,5)$ y la longitud del eje mayor mide 10 unidades.

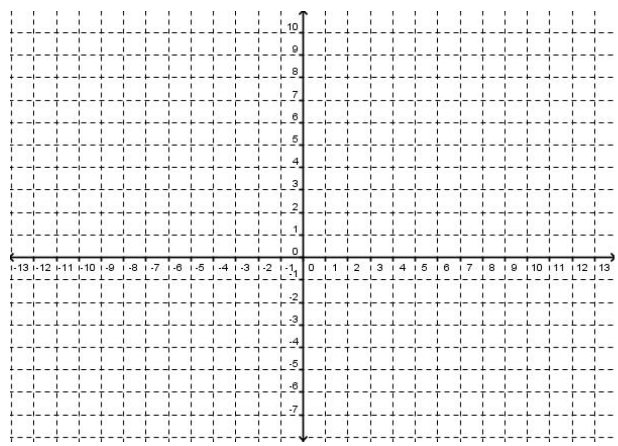


Ejemplo 1: Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los vértices, extremos, centro, lado recto y traza la gráfica de la elipse si tiene focos en $F_1(-4,-1)$, $F_2(2,-1)$ y excentricidad igual a $\frac{3}{5}$.

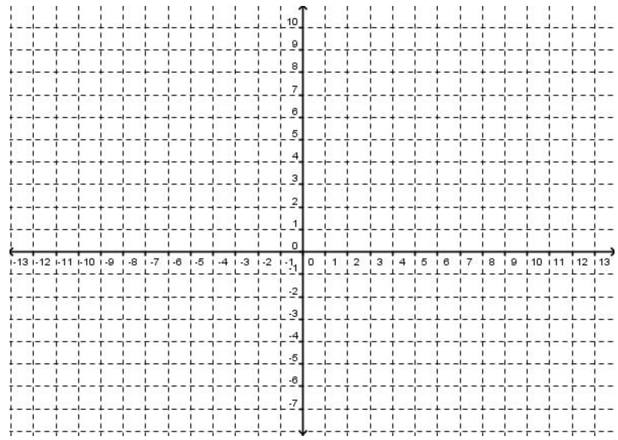


Ejercicio 6.10:

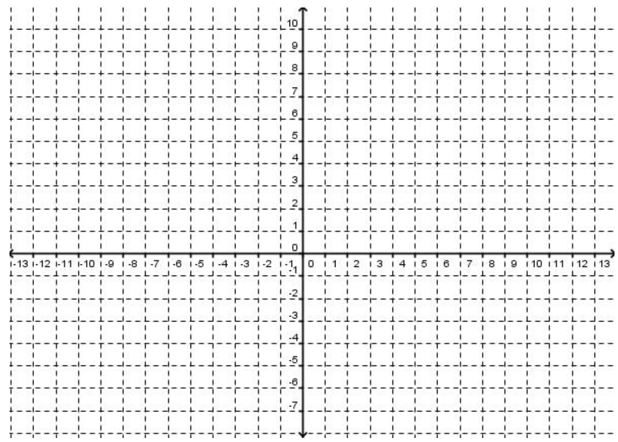
1. Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los vértices, extremos, centro, lado recto y traza la gráfica de la elipse si tiene focos en $F_1(-1,0)$, $F_2(-1,8)$ y excentricidad igual a $\frac{2}{3}$.



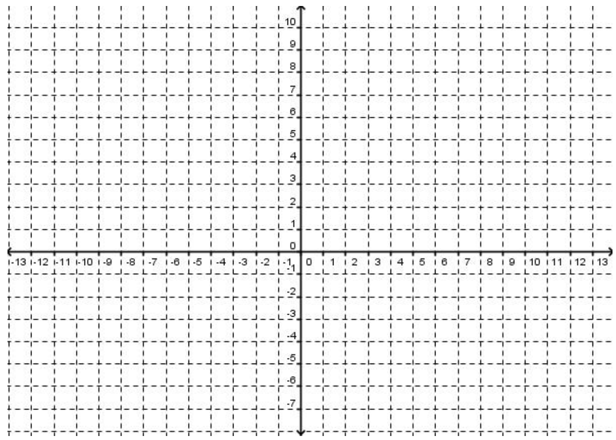
2. Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los focos, extremos, centro , lado recto y traza la gráfica de la elipse. Si tiene vértices en $V_1(0, 2)$, $V_2(0, 6)$ y excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.



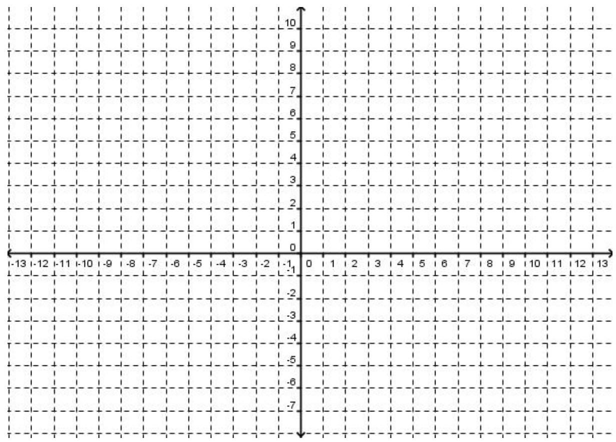
3. Determina los elementos faltantes, traza la gráfica y encuentra la ecuación de la elipse en su forma ordinaria y general de la elipse con centro en $C(6,5)$, longitud del eje mayor 10, y uno de sus focos se encuentra en $F(3,5)$



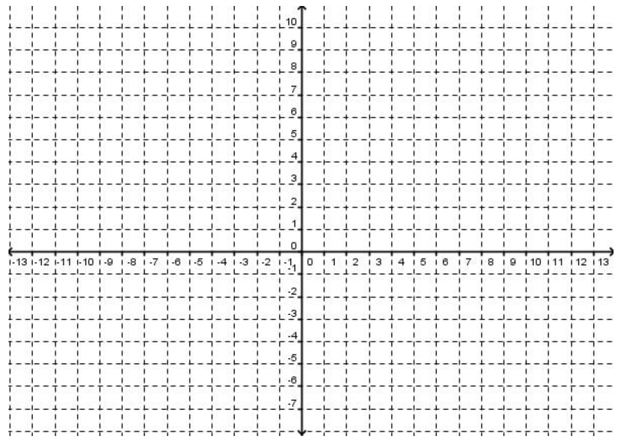
4. Determina los elementos faltantes, traza la gráfica y encuentra la ecuación de la elipse en su forma ordinaria y general de la elipse con centro en $C(2,3)$, vértice en $V_2(2,8)$y uno de sus focos se encuentra en $F_2(2,6)$



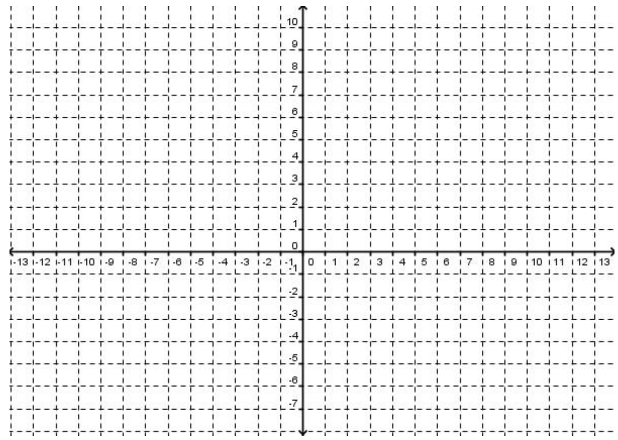
5. Determina los elementos faltantes, traza la gráfica y encuentra la ecuación de la elipse en su forma ordinaria y general de la elipse con centro en $C(0,1)$, vértice en $V_2(5,1)$y uno de sus focos se encuentra en $F_2(3,1)$



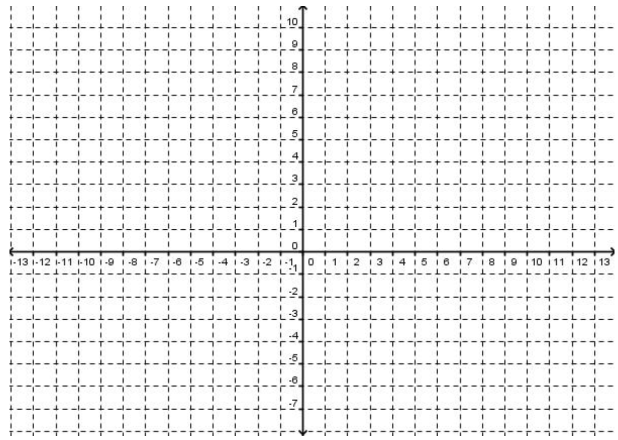
6. Determina los elementos faltantes, traza la gráfica y determina la ecuación de la elipse en su forma ordinaria y general de la elipse con centro en $C(0,0)$, vértice en $V_1(-4,0)$y uno de sus focos se determina en $F_2(2,0)$



7. Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los vértices, extremos, focos, lado recto y traza la gráfica de la elipse si tiene centro en $C(2,3)$, eje mayor igual a 12, paralelo al eje de las abscisas, y eje menor igual a 8 .



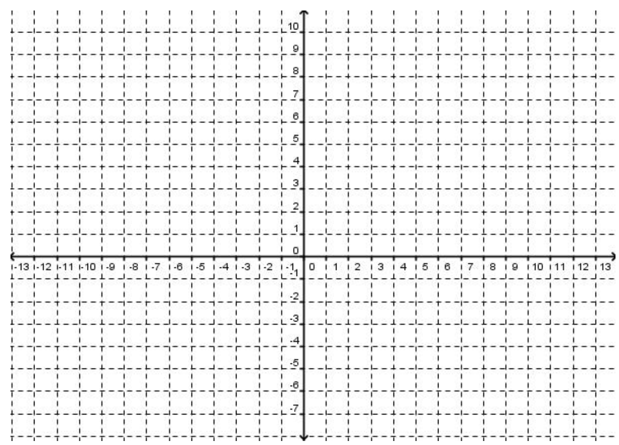
8. Expresa a la elipse en su forma ordinaria y en su forma general. Determina cuales son las coordenadas de los vértices, extremos, focos, lado recto y traza la gráfica de la elipse si tiene centro en $C(-4, 5)$, semieje mayor igual a 9, paralelo al eje de las ordenadas, y semieje menor igual a 7 .



6.20. Determinación de los elementos de la elipse a partir de su ecuación general

Para determinar los elementos es necesario transformar la ecuación general, a su forma ordinaria, para lo cual se utiliza la técnica de completar el trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 1: De la ecuación de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 24x - 90y + 225 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



$4x^2 + 9y^2 - 24x - 90y + 225 = 0$

El terminó independiente se traslada al segundo miembro de la ecuación y se factoriza el cociente cuadrático de cada una de las variables.

$4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0$

$4(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 10y) = -225$

Completamos cada uno de los cuadrados

2x( )=♯x 2y( )=♯y

2x( )=6x 2y( )=10y

( )=$\frac{6x}{2x}$ ( )=$\frac{10y}{2y}$

( )= 3 ( )=5

Se completan los cuadrados y para compensar la alteración de la ecuación, se agregan también estos números en el segundo miembro de la ecuación, pero deben de ir multiplicados por el coeficiente cuadrático correspondiente

$4(x^2 - 6x + (3)^2) + 9(y^2 - 10y + (5)^2) = -225 + 4(3)^2 + 9(5)^2$

Cada trinomio cuadrado perfecto se factoriza como el cuadrado de un binomio

$4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = -225 + 4(9) + 9(25)$

$4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = -225 + 36 + 225$

$4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$

Se dividen ambos miembros entre 36

$\frac{4(x-3)^2}{36} + \frac{9(y-5)^2}{36} = \frac{36}{36}$

Al simplificar se obtiene

$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$

Como el terminó mayor está debajo x , se trata de una elipse horizontal

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Si se compara con la ecuación ordinaria y en forma directa se obtiene:

Centro(3,5)

$a^2 = 9, \qquad b^2 = 4$

$a = 3 \qquad b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2$

$3^2 = 2^2 + c^2$

$9 = 4 + c^2$

$c^2 = 9 - 4$

$c = \sqrt{5}$

El eje mayor mide $2a$ al sustituir tenemos que mide $2(3) = 6$

El eje menor mide $2b$ al sustituir tenemos que mide $2(2) = 4$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

La longitud del lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a}$

$LR = \frac{2(2)^2)}{3}$

$LR = \frac{2(4)}{3}$

$LR = \frac{8}{3}$

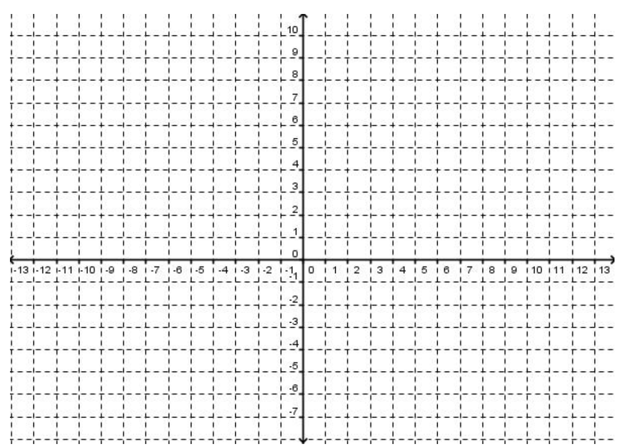
Graficando los puntos tenemos que los vértices son:

Los focos son

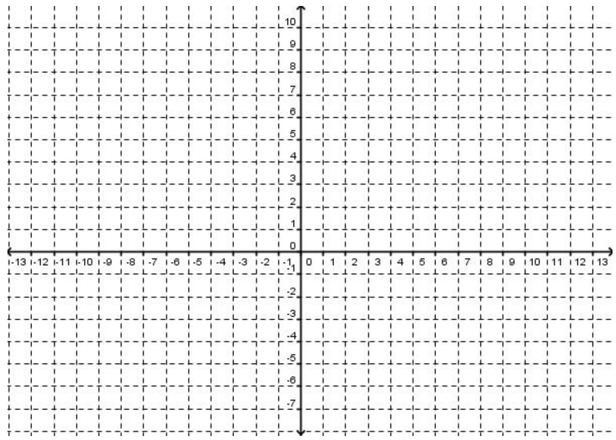
Los extremos son:

Ejercicio 6.11:

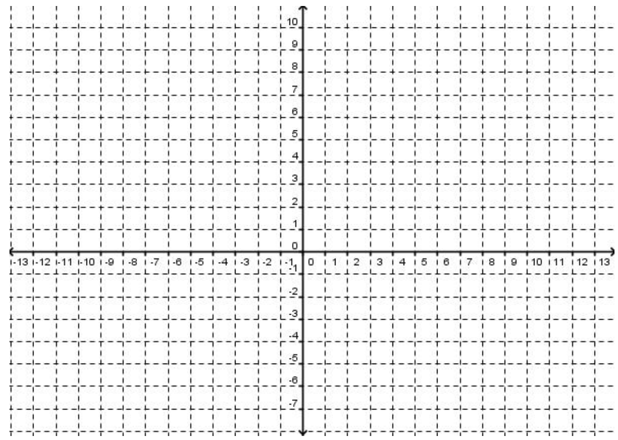
1. De la ecuación de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



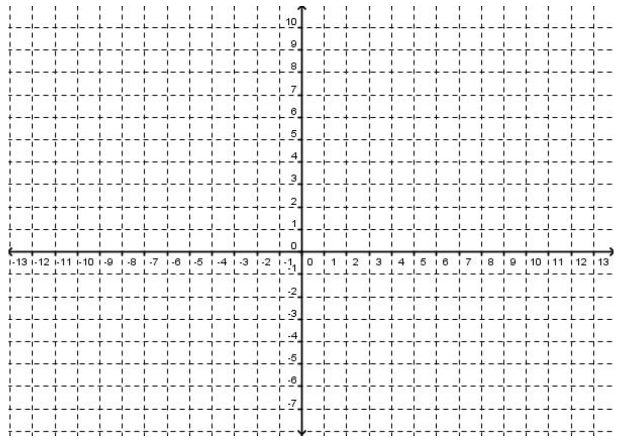
2. De la ecuación de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



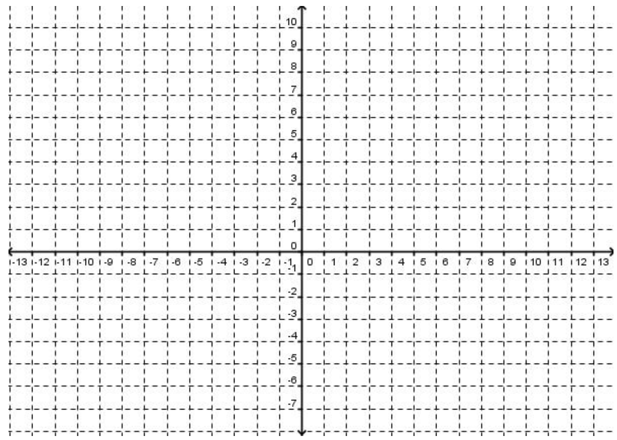
3. De la ecuación de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



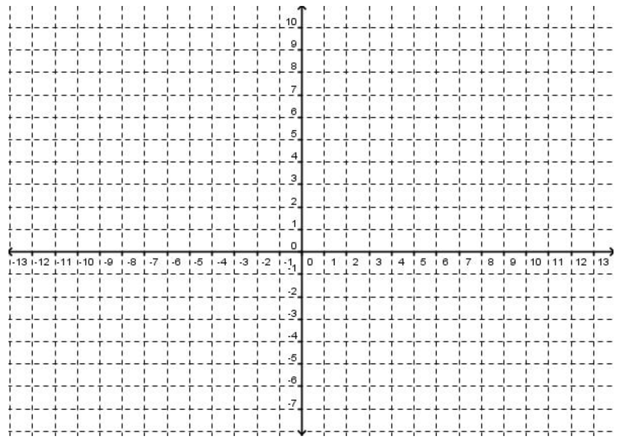
4. De la ecuación de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



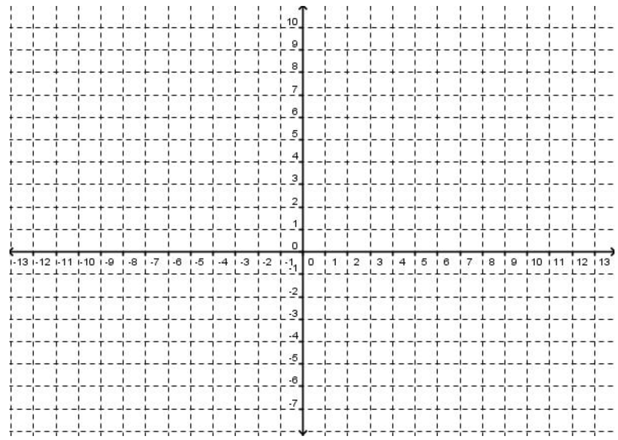
5. De la ecuación de la elipse $9x^2 + 16y^2 - 576 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



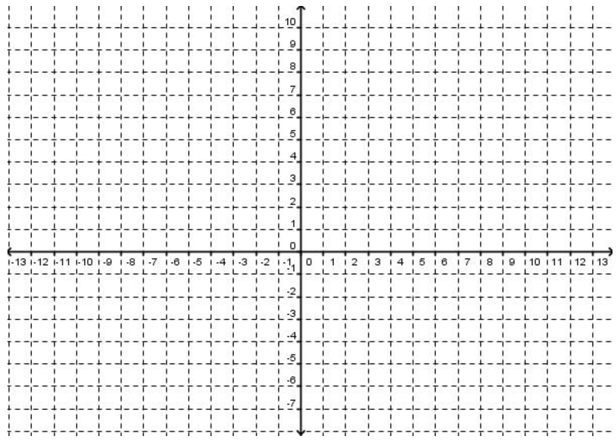
6. De la ecuación de la elipse $49x^2 + 4y^2 - 196 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



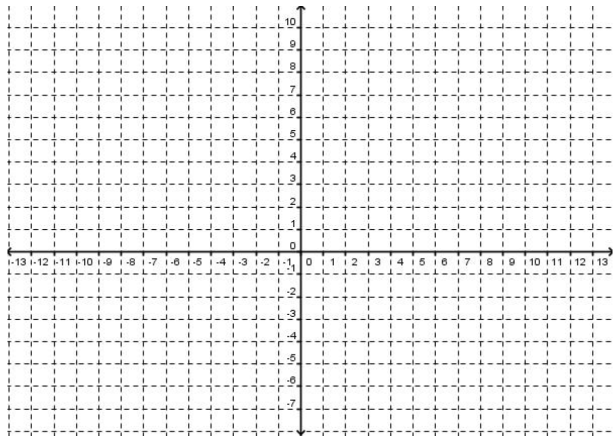
7. De la ecuación de la elipse $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



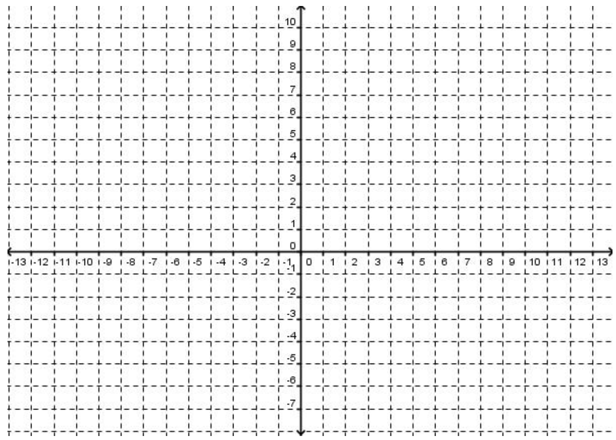
8. De la ecuación de la elipse $3x^2+4y^2-24x+36=0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



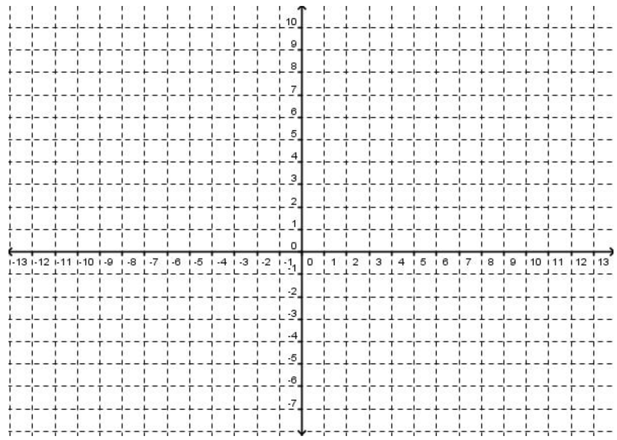
9. De la ecuación de la elipse $2x^2 + 3y^2 - 8x + 24y + 44 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



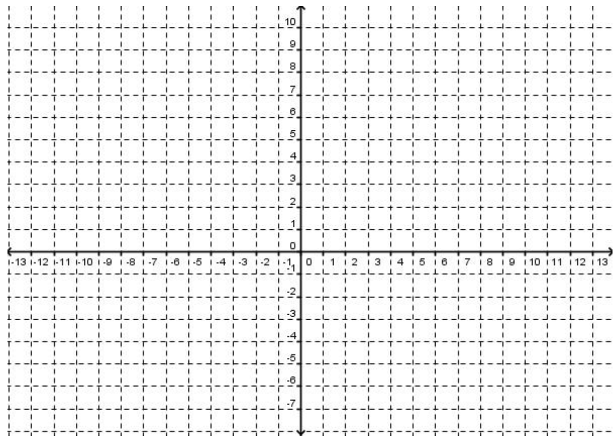
10. De la ecuación de la elipse $3x^2 + 2y^2 - 6x - 3 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



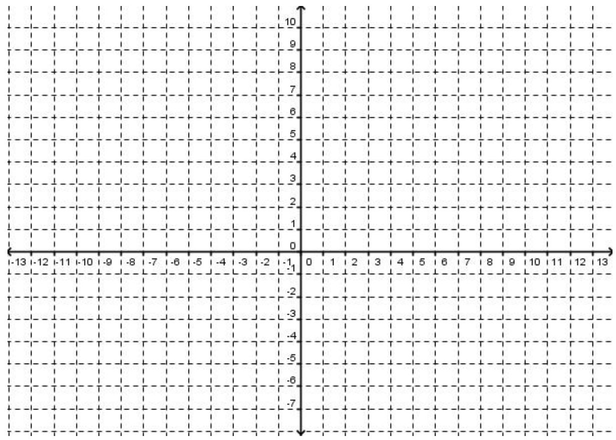
11. De la ecuación de la elipse $3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



12. De la ecuación de la elipse $2x^2 + 3y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



13. De la ecuación de la elipse $4x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$. Determina su forma ordinaria, las coordenadas de los vértices, extremos, focos, centro, lado recto, la excentricidad y traza la gráfica.



6.21. Resolución de problemas en diversos contextos

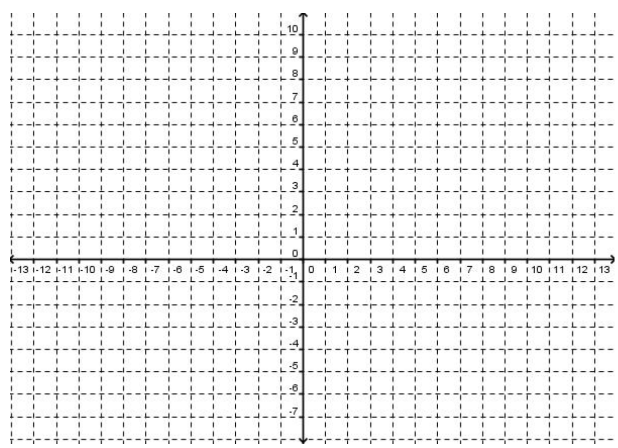
Ejercicio 6.12:

1. En la tabla siguiente aparece la excentricidad de las orbitas planetarias, así como la distancia media del planeta al sol, medida en unidades astronómicas (U.A.)

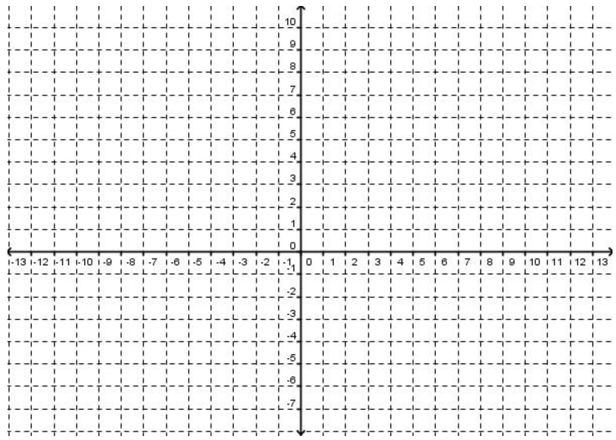
   1 U.A.=Distancia media de la tierra al sol.

Planeta	Excentricidad	Distancia media (U.A.)
Mercurio	0.206	0.387
Venus	0.007	0.723
Tierra	0.017	1
Marte	0.093	1.52
Jupiter	0.048	5.2
Saturno	0.056	9.54
Urano	0.047	19.18
Neptuno	0.009	30.06

   Dibuja las orbitas de Urano y de Neptuno, colocando el sol en el origen de coordenadas.



2. Si la excentricidad de la orbita del cometa Halley es $e = 0.97$, determina la distancia maxima y minima de el al sol.



Bibliografía

[1] Anfossi, A. *Geometria Analítica*, Editorial Progreso. Mexico 1966.

[2] Baldor, A. *Algebra.* Publicaciones Cultural. Decima Reimpresion. México 1993.

[3] Autores: Cantu, H. Paz, H. Reviso: Navarro, J. Comite Academico: Mendoza, G. Cantu, H. Garcia, R. Galicia, M. Paz, H.*Matematicas V Preparatoria Abierta*, SEP, México 1983.

[4] Courant, R. Robbins, H. *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* Fondo de Cultura Económica. México 2002.

[5] Fuller, G. *Geometría Analitica.* Compañia Editorial Continental. México 1971.

[6] Coordinación:García, T. Cornejo, A. Elaboración: Reyes, A. Ruz, F. Pérez, A. Quintanilla, A. Chávez, G. Valencia, M. Salcedo, S. Reyes T. Revision: Rosen, P. *Guía para el profesor de Matemáticas III.* Colegio de Ciencias y Humanidades. Secretaria de Programas Institucionales. Junio 2008

[7] Autores: Guillen, J. Romero, M. Colaboraron: Castro, J. Montuy, E. Islas, G. Franco, M. *Matemáticas I Álgebra Cuaderno de Trabajo para el alumno* Colegio de Ciencias y Humanidades. 2007

[8] Autores: Guillen, J. Romero, M. Colaboraron: Castro, J. Montuy, E. Islas, G. Franco, M. *Matemáticas III Álgebra y Geometría Analìtica, Cuaderno de Trabajo para el estudiante* Colegio de Ciencias y Humanidades. Agosto 2006

[9] Hemmerling, E.*Geometría Elemental*, Limusa Grupo Noriega Editores, México 1992.

[10] Moise, E. Downs, F. Traducido Garcia, M.con colaboración Pasquel, J. Lluis, E. Sociedad Colombiana de Matemátcas *Geometría Moderna.* Addison Wesley Iberoamericana. 1966.

[11] Swokowski, E. Cole, J. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* Internacional Thomson, México, D.F. 2002 i

[12] https://ilustradores-academia22.blogspot.mx/2011/06/?m=0 l