UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
Plantel Sur

M A T E M Á T I C A S - I

Programa de Estudios Actualizado

Cuaderno de Trabajo

Profesora: NORA JUDITH RODRÍGUEZ MARTÍNEZ

Nombre del alumno:

Grupo:

Agosto 2016

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL SUR

TEMARIO

UNIDAD 1 - El significado de los números y sus operaciones básicas.

UNIDAD 2 - Variación directamente proporcional y funciones lineales.

UNIDAD 3 - Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

UNIDAD 4 - Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Fechas de Exámenes

Unidad 1-

Unidad 2-

Unidad 3-

Unidad 4-

Este texto fue elaborado, tomando como base los textos publicados por el Colegio de Ciencias y Humanidades y de otras instituciones, con el fin de apoyar a los alumnos del curso de Matemáticas I, dicho material esta sujeto a las observaciones y correcciones de especialistas en el área.

Índice general

Capítulo 1

UNIDAD 1 - El significado de los números y sus operaciones básicas

1.1. Leyes de los signos

1.1.1. La recta numérica y las leyes de los números

Los números con signo se pueden representar en la forma que conocemos como “Recta Numérica”, dibujando una línea recta, fijando un punto al que le llamaremos origen, que es en realidad el punto de partida, es decir, el cero. Se toma una unidad de medida y a partir de ésta se divide la recta en pedazos o segmentos del mismo tamaño, hacia la derecha, así el primer pedazo es del 0 al 1, el segundo pedazo es del 1 al 2 el tercer pedazo es del 2 al 3 y así vas colocando los demás números a los que llamaremos números naturales o números enteros positivos.

-			o						+
			$\bar{\wedge}$						
			0	1	2	3	4	5	6

Pero hasta aquí esta recta solo tiene números enteros positivos, para representar a los números enteros negativos, tomamos la misma medida que estábamos utilizando para los positivos y dividimos a la recta en la misma forma, ahora hacia la izquierda y tenemos del 0 al -1, del -1 al -2, del -2 al -3 y así continuamos.

De esta manera los números enteros se encuentran ordenados tanto a la derecha con los números enteros positivos como a la izquierda con los números enteros negativos.

-						o						+
						$\bar{\wedge}$						
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Esta representación tiene dos importantes características.

1. Muestra a los números en una fila ordenada.

2. Sugiere la idea de que la recta continua infinitamente y así se pueden tener números enteros positivos muy lejanos del cero y números negativos muy lejanos al cero.

A los **números naturales** se les llama también conjunto de los números enteros positivos. Por tanto, el conjunto de números naturales, que se denota por $\mathbb{N}$ se expresa como:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4...\}$

Los tres puntos suspensivos indican que la lista o enumeración continua indefinidamente; es decir sin tener un número final.

El conjunto de **números negativos** puede describirse como sigue $\{-1, -2, -3, -4...\}$. El conjunto de números cuyos elementos son los enteros positivos, los enteros negativos y cero, se llama **conjunto de los números enteros** se denota por $\mathbb{Z}$ y son:

$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4...\}$

Para poder realizar las operaciones con los números enteros se definen las leyes de los signos, en donde la ley de la suma y resta, sirve para sumar y restar números con signo, y la ley de la multiplicación y división, sirve para multiplicar o dividir a los números con signo.

1.1.2. La ley de la suma y resta

Caso I (Positivo y positivo): Cuando se avanza en una misma dirección, en ambas instrucciones, aumento la distancia recorrida y conservo la dirección que llevaba.

Es decir que si camino en los positivos y después camino otra vez en los positivos término en los positivos.

-						$\rightarrowtail$			$\rightarrowtail$			+
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Sumo los números para obtener la distancia total recorrida, porque es la distancia que recorro con un número, más la distancia que recorro con el otro número, es decir.

Si tengo un número positivo y otro número positivo, el signo del resultado es positivo y para obtener el resultado, los números se suman, podemos escribir lo anterior de la siguiente forma:

$$\text{los números se suman}\left\{\ +y+ = \quad + \text{ es el signo del resultado.}\right.$$

Ejemplo 1: +4+2=?
Después de caminar 4 unidades hacia los positivos "+" y seguido de avanzar 2 unidades hacia los positivos "+", terminamos en el 6 de los positivos "+".

-						$\rightarrowtail$			$\rightarrowtail$			+
						o			+4			+2
						$\overline{\wedge}$	$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowright$		
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
											$\circlearrowleft$	$\circlearrowleft$

Al utilizar la regla anterior tenemos que:

$$\text{los números se suman} \left\{ \; +y+ = \quad + \text{ es el signo del resultado.} \right.$$

Es decir positivo y positivo es positivo, en el ejemplo es: +4+2=+

Para obtener el resultado sumamos los números: 4+2= 6. Por lo tanto el resultado de la operación: +4+2=+6

Caso II (Negativo y negativo): Si camino en dirección hacia los negativos y después camino otra vez en la dirección de los negativos término en los negativos.

-				⟻		⟻						+
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Sumo los números aunque sean negativos, porque ambos números van en la misma dirección y es la distancia que recorro con un número más la distancia que recorro con el otro, y conservo la dirección que llevaba, en este caso hacia los negativos, es decir:

Si tengo un número negativo y otro número negativo, el resultado es negativo y para obtenerlo los números se suman.

Escribimos lo anterior de la siguiente forma:

$$\text{los números se suman} \left\{ \; -y- = \quad - \text{ es el signo del resultado.} \right.$$

Ejemplo 1: -3-4=?
Después de caminar 3 unidades hacia los negativos "-" y seguido de avanzar 4 unidades hacia los negativos "-", terminamos en el 7 de los negativos "-".

-					⟻			⟻								+
		-4				-3		o								
					↶	↶	↶	$\overline{\wedge}$								
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	↻	↻	↻	↻												

Al utilizar la regla anterior tenemos que:

$$\text{los números se suman} \left\{ \; -y- = \quad - \text{ es el signo del resultado.} \right.$$

Es decir negativo y negativo es negativo, en el ejemplo es: -3-4=-

Para obtener el resultado, sumamos los números: 3+4= 7. Por lo tanto el resultado de la operación: -3-4=-7

Caso III (Positivo y negativo): Cuando se avanza en una dirección positiva, la distancia es positiva, pero al momento que se cambia la dirección hacia los números negativos, ya no avanzo sino que me regreso y no conservo la dirección que llevaba.

Es decir que si camino en los positivos y después camino en los negativos término en la parte de la recta hacia donde haya caminado una distancia mayor.

- $\rightarrowtail$ +

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

$\leftarrowtail$

Cuando tengo un **número positivo** y un **número negativo**, el signo del resultado depende del **signo** que tenga el **número mayor**.

Para obtener el valor numérico del resultado se le resta al número mayor el número menor, podemos resumirlo de la siguiente manera.

$$\text{los números se restan} \left\{ \; +y- = \quad \text{el signo del número mayor} \right.$$

Al utilizar la regla anterior para resolver la operación del ejemplo, tenemos:

Ejemplo 1: +3-2=?
La distancia que recorro con el primer número, en este caso es +3 es hacia los positivos, la cantidad que indica el segundo número, en el ejemplo es -2 , el signo que resulta depende solamente de qué número sea el mayor, en este caso el número mayor es 3 y es positivo "+", por lo tanto el resultado es positivo "+".
+3-2=+

Se restan los números y tenemos que 3-2=1. Por lo tanto el resultado de: +3-2=+1

- $\rightarrowtail$ +3 +

o

$\bar{\wedge}$ $\curvearrowright$ $\curvearrowright$ $\curvearrowright$

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

$\circlearrowright$ $\circlearrowright$

-2 $\leftarrowtail$

Caso IV (Negativo y positivo): Si avanzo en dirección de los negativos y después avanzo en dirección de los positivos término en el lado en el que haya recorrido una distancia mayor.

- $\leftarrowtail$ +

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

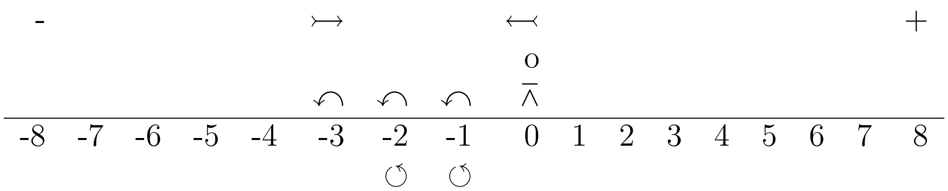
$\rightarrowtail$

Si tengo un número negativo y un número positivo, el signo del resultado depende del signo que tenga el número mayor y para obtener el valor numérico del resultado se le resta al número mayor el número menor, resumiendo lo anterior tenemos lo siguiente.

$$\text{los números se restan} \left\{ \; -y+ = \quad \text{el signo del número mayor} \right.$$

Ejemplo 1: -3+2=
Como la distancia que recorro con el primer número, en este caso es -3, con dirección hacia los negativos, la cantidad que indica el segundo número en el ejemplo es +2, el signo que resulta depende solamente de que número sea el mayor en este caso 3, por lo tanto la distancia mayor la recorrí en la dirección de los números negativos, el signo que se obtiene en el resultado es el negativo "-".
Es decir: -3+2=-

Al restar los números se obtiene que 3-2=1. Por lo tanto el resultado de: -3+2=-1



La ley de la suma y resta la podemos resumir de la siguiente forma:

Ley de la Suma y Resta.

$$\text{se suman los números}\begin{cases} +y+ = & + \\ -y- = & - \end{cases}$$

$$\text{se restan los números}\begin{cases} +y- = & \text{signo del} \\ -y+ = & \text{número mayor} \end{cases}$$

1.2. Ley de la multiplicación y la división

Ley de la Multiplicación

$$\text{se multiplican}\begin{cases} (+)(+) = & + \\ (+)(-) = & - \\ (-)(-) = & + \\ (-)(+) = & - \end{cases}$$

1.2.1. Multiplicando a los números con signo

Para multiplicar dos números con signo, utilizaremos la regla de la multiplicación de la siguiente manera:

Caso I: (Positivo por positivo): Para multiplicar dos números positivos el renglón que corresponde es el siguiente:

$$\text{se multiplican}\{\ (+)(+) = \ +$$

Ejemplo 1: (+3)(+7)=
Al multiplicar dos números positivos tenemos que positivo por positivo, el signo del resultado es positivo, en el ejemplo realizamos la multiplicación de 3 por 7, lo que da como resultado:

(+3) (+7) = + 21

Caso II (Negativo por negativo): Para multiplicar dos números negativos el renglón que corresponde es el siguiente:

$$\text{se multiplican}\left\{\ (-)(-) = \quad +\right.$$

Ejemplo 1: (-5)(-7)=
Al multiplicar un número negativo por otro número negativo, el signo que resulta es positivo, y realizamos la multiplicación de 5 por 7, lo que da como resultado:
(-5) (-7) = + 35

Caso III: (Positivo por negativo): Para multiplicar un número positivo por un número negativo el renglón que corresponde es el siguiente:

$$\text{se multiplican}\left\{\ (+)(-) = \quad -\right.$$

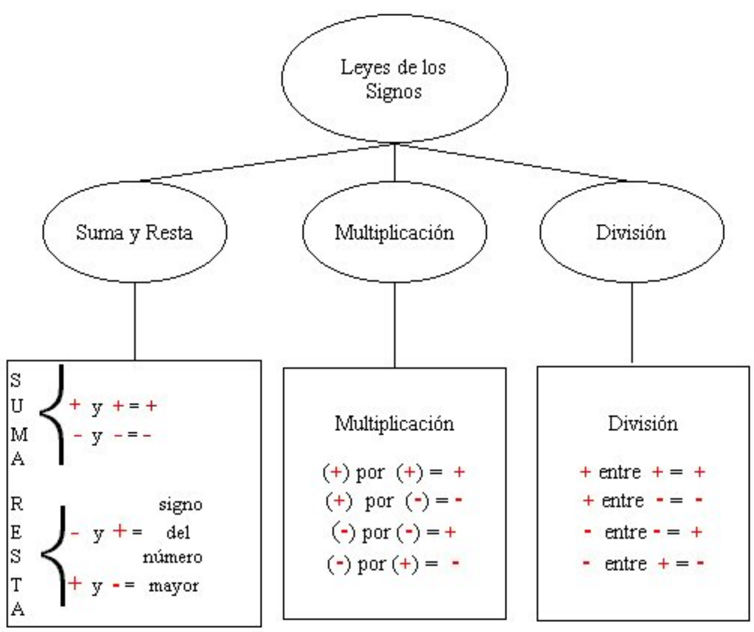
Ejemplo 1: (+8)(-6)=
Si tenemos un número positivo por un número negativo, el signo que resulta es negativo, al realiza la multiplicación de 8 por 6, da como resultado:
(+8) (-6) = - 48

Caso IV (Negativo por positivo): Para multiplicar un número negativo por un número positivo, el renglón que corresponde es el siguiente:

$$\text{se multiplican}\left\{\ (-)(+) = \quad -\right.$$

Ejemplo 1: (-9)(+5)=
Al multiplicar un número negativo por un número positivo, el signo que resulta es negativo, la multiplicación de 9 por 5 da como resultado 45, por lo tanto.
(-9) (+5) = - 45

De esta misma manera podemos dividir a dos números con signo. Para representar las leyes de los signos utilizaremos el siguiente diagrama.



1.3. Prioridad de operaciones

Definición: En una expresión aritmética, que no contenga paréntesis o signos de agrupación, primero se efectúan las multiplicaciones y después las sumas. En caso de que existan paréntesis o signos de agrupación, primero se realizan las operaciones al interior de los mismos y después se aplica la regla. El uso de paréntesis nos permite agrupar términos y evitar errores en los cálculos señalando de manera explícita el orden de las operaciones.

Si en una expresión se encuentran operaciones indicadas y signos de agrupación, tales como { [( )] }, entonces se procede primero a realizar las operaciones señaladas dentro de los paréntesis para luego efectuar las operaciones que se encuentran afuera de los mismos.

Resuelve primero las operaciones señaladas, utiliza como referencia para no cometer errores las leyes de los signos que vienen en el diagrama anterior. Respeta la prioridad de los paréntesis, primero ( ) en segundo lugar [ ], y en tercer lugar { }

Ejemplo 1: $-3-2\{-5[3(\underline{-1+7})-4(\underline{8-6})]+3(\underline{7-9})\}=$

$=-3-2\{-5[\underline{3(+6)}-\underline{4(+2)}]+\underline{3(-2)}\}$

$=-3-2\{-5[\underline{+18-8}]-6\}$

$=-3-2\{\underline{-5[+10]}-6\}$

$=-3-2\{\underline{-50-6}\}$

$=-3-\underline{2\{-56\}}$

$=\underline{-3+112}$

$=+109$

Ejercicios 1.1: Resuelve las siguientes operaciones. Respeta la prioridad de los paréntesis, primero ( ) en segundo lugar [ ], y en tercer lugar { } Señala las operaciones que vas realizando.

a) $(-1)(-3)=$ b) $(-4)(-7)=$ c)$4+2(5)=$

d) $-6(6+8)+(8)-3216=$ e) $3+48-16-357=$ f)$10-5(3-6)+2(8-7)-7=$

g) $-[-(-2)-4(4-6)][3+(7-3)] =$

h) $-2+(3)(4)-(-5)8 =$

i) $(-3-4+8)-(-5+7-6) =$

j)$(-3)+(-7)+(-1)+(4)+(9)+(-15) =$

k) $(-5)(-2)[3+2(1-1)]-7(3+5) =$

l) $-[2-4(4-6)][3+(8-4)] =$

m) $1+3(4-2+1)-[3+2(6-3-4)+1] =$

n) $7+3-3[5(2+15)-3(17-19)+6]-8 =$

ñ) $[(7)(4) + (7 - 5)] - (12 - 6) + (42 \div 6) =$

o) $3 + 2[4 + 2(2 - 3 + 4) - 8] =$

p) $3(4-3+2-5)-[3-5(7-3-3)+1] =$

q) $3+2(5-7+1)-5[(3 - 1 + 2 - 4) - 1] + 1 =$

r) $5-6 - [(6 + 2) - (4 - 0) - 6(1 + 3) - 0] + (-2)(6 - 3) =$

s) $-2[5-2(6-3+1)+3] =$

t) $3 + 5 + 8 + 1 + 3 + 1 + 8 =$

u) $-3 - 5 + (-8) - 1 - (-3) + 1 - 8 =$

v) $[(3+5)-(8-1)]+(3+1)-8=$

w) $2(3+5)-(8-1)+(-1)(3+1)-8=$

Obtén el resultado de las siguientes operaciones, resuelve primero las multiplicaciones y divisiones y en segundo lugar las sumas y las restas.

Ejemplo 1: $\underline{6\div 2}+4-5+\underline{3\times 2}-\underline{8\div 2}=$

$=\underline{3+4}-\underline{5+6}-4$

$=\underline{7+1}-4$

$=\underline{8-4}$

$=4$

Ejercicios 1.2: Obtén el resultado de las siguientes operaciones, resuelve primero las multiplicaciones y divisiones y en segundo lugar las sumas y las restas.

a) $12-3+15\div 3+3\times 2-8=$

b) $5-2+4+5\times 2-4\div 2-1=$

c) $4\times 1-6\div 3+5\times 4-12\div 4=$

d) $10\div 2\times 5-4\times 3\div 6-13=$

e) $4\times 3+2-12\div 4-3\times 3=$

Anota en el espacio entre los paréntesis el número que corresponda para que la igualdad se cumpla.

Ejemplo 1: $7(\quad)[-2+5]=-42$

Resolvemos las operaciones para encontrar el número faltante.

$7(\quad)[\underline{-2+5}] = -42$

$\underline{7}(\quad)\underline{[3]} = -42$

$21(\quad) = -42$

El número que multiplicado por 21 da como resultado -42 es el -2, por lo tanto.

$21(-2) = -42$

$-42 = -42$

La respuesta es: -2 al escribirlo obtenemos$7(-2)[-2+5] = -42$

Ejercicios 1.3: Anota en el cuadro el número que corresponda para que la igualdad se cumpla.

a) $6 + 2(\qquad) = 0$ b) $-3(\qquad)(2) = 18$ c) $2(\qquad) - 2(3) = 0$

d) $4[2 + (\qquad)] = 20$ e) $6[3 + (\qquad)] = -6$

Coloca los signos de operación $+$, $-$, $\div$ y () de tal forma que las siguientes operaciones sean correctas, no debes cambiar los números de lugar. Justifica tu respuesta porque existen varias soluciones.

Ejemplo 1: 3 1 2 $= 1$

Solución 1:	Solución 2:
$(3-1) \div 2 = 1$	$3 - 1(2) = 1$
Justificación:	
$(\underline{3-1}) \div 2 = 1$	$3 - \underline{1(2)} = 1$
$\underline{(2)} \div 2 = 1$	$\underline{3-2} = 1$
$\underline{2 \div 2} = 1$	$1 = 1$
$1 = 1$	

Ejercicios 1.4:

1. Coloca los signos de operación $+$, $-$, $\div$ y () de tal forma que las siguientes operaciones sean correctas, no debes cambiar los números de lugar. Justifica tu respuesta porque existen varias soluciones.

a) 12 4 2 2 =4 b) 4 10 2 3 =36

c) 8 6 4 2 =4 d) 8 6 4 2 =7

e) 2 7 6 3 8 10 =-3

2. Para organizar el festejo del día del niño, un grupo vecinal realiza una colecta. El primer día un comerciante del barrio donó 47 bolsitas con dos chamoys, un paquete de galletas, tres paletitas y un juguete. En ese primer día, con esta donación.

a) ¿Cuántos artículos de cada tipo consiguieron?

b) ¿Cuántos artículos tienen en total?

3. Completa la siguiente tabla calculando el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

a	b	c	$a+(b+c)$	$-b+(-c)$	$-c+(a-b)$	$-(a+c)-(a-c)$	$-[-(a)+b]+b-c$
4	-1	0					
-6	-5	-4					
0	7	-7					
-3	-6	3					
-1	3	-1					

1.4. Potencias

1.4.1. Exponentes de los números

La multiplicación es la abreviación de la suma, los exponentes representan la cantidad de veces que tengo que multiplicar un número como factor, es decir, los exponentes expresan la abreviatura del producto, de esta forma se puede expresar la descomposición de un número de una forma más corta.

Ejemplo 1: $25 = 5 \times 5$

Hay que multiplicar un 5 por otro 5. Esto puedes escribirlo de la siguiente forma:

$5 \text{ x } 5 = 5^2$

El dos significa que: multiplicas el 5 por otro 5 y concuerda con que al escribir 5 x 5, el 5 esté escrito, 2 veces como factor.

Ejemplo 2: $3^4 =$

Escribimos al 3, el número de veces que indique el exponente que en este caso es 4, entonces escribimos 4 veces al 3 y multiplicamos.

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & \text{x} & 3 & \text{x} & 3 & \text{x} & 3 & = & 3^4 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \end{array}$$

Es decir multiplico al 3 cuatro veces como factor. Cuenta cuántos 3 hay escritos y observa que el exponente indica exactamente las veces que se multiplica.

Observa que no es lo mismo 2^5 que 5^2 porque:

$$\begin{array}{llcll} 2^5 & = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 & \quad & 5^2 & = 5 \text{ x } 5 \\ & = 32 & & & = 25 \end{array}$$

Para representar a los números de esta forma, se utiliza un exponente, que es el número de arriba y al número de abajo se le conoce como base, porque es el número que va a estar como factor, el número de veces que diga el exponente.

Elevación de una potencia a un exponente $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Ejemplo 1: Calculemos cuánto vale $(8^4)^3$

Tenemos que $(8^4)^3$ es escribir (8^4) 3 veces:

$(8^4)^3 \quad = (8^4) \times (8^4) \times (8^4)$

Al desarrollar (8^4) es lo mismo que escribir $(8 \times 8 \times 8 \times 8)$, nos quedaría:

$$\begin{array}{lllll} (8^4)^3 & = (8^4) & \times & (8^4) & \times & (8^4) \\ & = \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & = (8 \times 8 \times 8 \times 8) & \times & (8 \times 8 \times 8 \times 8) & \times & (8 \times 8 \times 8 \times 8) \end{array}$$

Que podemos escribir ya sin agrupar de la siguiente manera.

$$\begin{array}{llllll} (8^4)^3 & = (8^4) & \times & (8^4) & \times & (8^4) \\ & = (8 \times 8 \times 8 \times 8) & \times & (8 \times 8 \times 8 \times 8) & \times & (8 \times 8 \times 8 \times 8) \\ & = 8 \times 8 \times 8 \times 8 & \times & 8 \times 8 \times 8 \times 8 & \times & 8 \times 8 \times 8 \times 8 \end{array}$$

Al contar los números 8, tenemos que aparecen 12 veces, los representamos como 8^{12}, nos queda que:

$$\begin{array}{llllll} (8^4)^3 & = (8^4) & \times & (8^4) & \times & (8^4) \\ & = (8 \times 8 \times 8 \times 8) & \times & (8 \times 8 \times 8 \times 8) & \times & (8 \times 8 \times 8 \times 8) \\ & = 8 \times 8 \times 8 \times 8 & \times & 8 \times 8 \times 8 \times 8 & \times & 8 \times 8 \times 8 \times 8 \\ & = 8^{12} & & & & \end{array}$$

Con esto concluimos que $(8^4)^3 = 8^{12}$, donde 12 también se obtiene de multiplicar los exponentes 4 y 3.

En general elevar a un exponente "n" la base (a^m) significa multiplicar "n" veces (a^m) como factor, es decir multiplicar "m" por "n" factores iguales a "a".

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Para verificar que esta propiedad es cierta.

$$(a^m)^n \quad = \underbrace{(a^m)(a^m)...(a^m)}_{n}$$

Tenemos n factores (a^m).

Pero $(a^m) = (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})$.

Tenemos "m" factores multiplicados "n" veces.

$$\begin{array}{ll} (a^m)^n & = \underbrace{(a^m)(a^m)...(a^m)}_{n} \\ & = \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})...(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})}_{n}. \end{array}$$

Si tenemos "m" factores multiplicados "n" veces, es decir, $m \times n$ veces, tenemos $m \times n$ factores, por lo que:

$$(a^m)^n \quad = \underbrace{(a^m)(a^m)...(a^m)}_{n}$$

$$=(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})...(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m}).$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n}$$
$$= a^{m \cdot n}$$

Por lo tanto $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Multiplicación de potencias con misma base. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplo 1: $5^4 \cdot 5^5 = 5^9$

Al desarrollar los valores tenemos que:

$$5^4 \cdot 5^5 \quad =(\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5})$$

Al contar tenemos que son $4+5$ términos, queda como resultado:

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot 5^5 \quad &=(\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5}) \\ &= 5^{4+5} \end{aligned}$$

Que al escribir los términos en una sola operación y contarlos tenemos:

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot 5^5 \quad &=(\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5}) \\ &= 5^{4+5} \\ &= (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{9}) \end{aligned}$$

El resultado es:

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot 5^5 \quad &=(\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5}) \\ &= 5^{4+5} \\ &= (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{9}) \\ &= 5^9 \end{aligned}$$

Para verificar la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$a^m \cdot a^n \quad = (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{n})$$

Tenemos en total al contar $m+n$ términos, ya que la primera multiplicación tiene m veces a como factor y la segunda multiplicación tiene n veces a como factor, tenemos que:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n \quad &= (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{n}) \\ &=a^{m+n} \end{aligned}$$

En general al multiplicar un número a primero m veces y después n veces como factor, se tiene al contar los factores, $m+n$ factores iguales a a, resulta por lo tanto.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Multiplicación de dos potencias con el mismo exponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Conviene para desarrollar los cálculos, aplicar las propiedades de los números.

Ejemplo 1: $6^5 \cdot 2^5 = (6 \cdot 2)^5$

Tenemos que:

$$6^5 \cdot 2^5 = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5}$$

Que al utilizar la propiedad conmutativa tenemos:

$$\begin{aligned} 6^5 \cdot 2^5 &= \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5} \\ &= 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \end{aligned}$$

Al aplicar la propiedad asociativa tenemos:

$$\begin{aligned} 6^5 \cdot 2^5 &= \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5} \\ &= 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \\ &= \underbrace{(6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2)}_{5} \end{aligned}$$

Tenemos $(6 \cdot 2)$ cinco veces como factor, de esto podemos concluir que:

$$\begin{aligned} 6^5 \cdot 2^5 &= \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5} \\ &= 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \\ &= \underbrace{(6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2)}_{5} \\ &= (6 \cdot 2)^5 \end{aligned}$$

En general, al multiplicar "n" veces un número "a" y "n" veces un número "b" se tienen "n" factores iguales a $a \cdot b$ es decir:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Desarrollemos el caso general, es decir:

$$a^n \cdot b^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n})$$

Al aplicar la propiedad conmutativa tenemos que:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n}) \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot ... \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

Que al aplicar la propiedad asociativa tenemos que:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n}) \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot ... \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)}_{n}$$

Como tenemos $(a \cdot b)$ representado n veces como factor queda como resultado que:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n}) \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b ... \cdot a \cdot b \\ &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)}_{n} \\ &= (a \cdot b)^n. \end{aligned}$$

Conclusión: Las propiedades son:

I	$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$
II	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
III	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Al aplicar estas propiedades, se pueden escribir a los exponentes de una forma más conveniente.

Ejemplo 1: El número 20^6 puede ser considerado como $20^{2 \cdot 3}$ en tal caso resulta:

$$\begin{aligned} 20^6 &= 20^{2 \cdot 3} \\ &= (20^2)^3 \\ &= 400^3 \end{aligned}$$

El mismo 20^6 puede ser considerado como 20^{4+2} en tal caso se tiene:

$$\begin{aligned} 20^6 &= 20^{4+2} \\ &= 20^4 \cdot 20^2 \\ &= 160000 \cdot 400 \end{aligned}$$

Todavía 20^6 puede ser considerado como $(2 \cdot 10)^6$. En tal caso tenemos:

$$\begin{aligned} 20^6 &= (2 \cdot 10)^6 \\ &= 2^6 \cdot 10^6 \\ &= 64 \cdot 10^6 \\ &= 64000000 \end{aligned}$$

Es decir que puedo representar a un mismo número de diferentes maneras solamente con utilizar las propiedades de los exponentes.

Ejercicio 1. 5:

1. Resuelve los siguientes ejercicios, respeta la prioridad de los paréntesis y desarrolla el exponente.

a) $[(4 + 3)2]^2 =$ b)$(3 + 45)^2 =$ c)$67 + [4(3 + 5)] + 2(7 - 2)^3 =$

2. Completa la siguiente tabla.

Número dado	Número escrito como potencia de potencia	Número escrito como producto de potencias de igual base	Número escrito como producto de base de igual exponente	Total
15^4	$15^{2\cdot 2} = (15^2)^2$	$15^{2+2} = 15^2 \cdot 15^2$	$(5 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 3^4$	50625
30^6	$= (30^3)^2$	$30^{4+2} =$	$(3 \cdot 10)^6 =$	729000000
	$= (12^2)^4$	$= 12^4 \cdot 12^4$	$= 3^8 \cdot 4^8$	2985984
	$24^{4\cdot 2} =$	$= 24^7 \cdot 24$	$= 6^8 \cdot 4^8$	110075314176
21^9	$= (21^3)^3$	$21^{4+5} =$	$(7 \cdot 3)^9 =$	794280046581

1.5. Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor

En la secundaria 148 la dirección compró 1000 casilleros mismos que fueron otorgados a igual número de estudiantes, todos con su respectiva llave. Pero los casilleros tenían un defecto de fábrica, que las llaves podían abrir uno o más casilleros como se explica a continuación.

Por ejemplo: Con la llave 1, al contar de uno en uno, abres todos los casilleros: 1, 2, 3, 4, 5, ... Con la llave 2, al contar de dos en dos, se abrirían los casilleros: 2, 4, 6, ... y así con las demás llaves.

Y así con las demás llaves. Ahora que ya más o menos sabes cómo abrir diferentes casilleros con una misma llave, es momento de contarte el chisme de lo que pasó en el recreo ese día que entregaron los casilleros.

Cuando sonó la campana del recreo, los niños salieron corriendo de los salones y fueron directo a los casilleros. Entre gritos y risas gritaban el número de llave 1, 2, 3 ,4 así el dueño de ésta, pasaba y modificaba los casilleros que le tocaran, es decir abría o cerraba los casilleros sólo si su llave podía abrirlos. El casillero 1000 está enfrente de la dirección por eso el director sólo vio a los que modificaron este casillero; entonces esperó a que el recreo terminara para ir a los salones a buscar a los que vio para castigarlos. ¿Qué niños tienen llaves que pueden abrir el casillero 1000?

Para saber cómo vamos a encontrar la solución a esta pregunta, primero tomamos un caso con un número más pequeño, por ejemplo una escuela con 20 niños. Representaremos en una tabla lo que ocurre en esta escuela. Si el casillero está abierto escribimos A y si está cerrado, escribimos C. Todos los casilleros están cerrados a lo largo del pasillos y cuando pasa el niño 1 con la llave 1. Al contar de 1 en 1, abre todos los casilleros que puede abrir. La tabla que representa lo que pasa con los casilleros es:

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Primero abrió el casillero 1, después el 2, a continuación el 3, y así sucesivamente, abrió todos los casilleros.

Cuando pasa el niño 2, cierra el casillero 2, el 4, el 8, etc. Y no toca, ni le hace nada a los demás casilleros, por esa razón dejamos en blanco esos espacios en la tabla porque el niño no los modificó, estos quedaron abiertos como estaban.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C		C		C

Si el niño no modifica los casilleros no escribimos nada, ya que no ha cambiado de como estaba, y de esta manera es posible ver de una forma más clara exactamente qué casilleros modificó cada niño ya que aparecen indicados en cada renglón.

Actividad: Completa la tabla siguiente con la información de los demás niños y responde las preguntas.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C		C		C
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				
16																				
17																				
18																				
19																				
20																				

Después de que pasaron 20 niños ¿que casilleros están abiertos?

¿Que casilleros modifico el niño 3?

¿Que casilleros modifico el niño 8?

¿Que niños modificaron el casillero 12?

¿Que niños modificaron el casillero 18?

¿Que niños modificaron el casillero 16?

Múltiplos: Un múltiplo es el número entero que resulta de multiplicar a un número entero por un número natural.

Divisores: Un divisor es el número que divide a otro, un número exacto de veces en los enteros.

Si las llaves que abren un casillero son los divisores del número de casillero. ¿Qué niños tienen llaves que pueden abrir el casillero 1000?

Hace mucho tiempo existió un hombre llamado Eratóstenes nació en Cirene lo que ahora se conoce como Libia en el año 276 AC. Fue astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral y matemático. Falleció en el año 197 AC en Alejandría, Egipto. El cual inventó un método para encontrar unos números especiales.

Podemos ejemplificar su método, en el cuento de los niños y los casilleros,si cambiamos las reglas del problema, qué pasaría si en la escuela en lugar de abrir los casilleros, todos los niños se escondieran dentro de su respectivo casillero para luego salir de uno por uno, cerrar todos los casilleros a los que su llave tuviera acceso y encerrar a sus compañeros, ¿Quienes se quedarían afuera?

Para ver lo que hizo relacionémoslo con el cuento de los casilleros, el niño 1 sale de su casillero y comienza a abrir todos los casilleros y continúa abriéndolos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Al ver los casilleros abiertos, los niños se esconden dentro de ellos y cierran la puerta pero no con llave, para esconderse de sus compañeros pero poder salir cuando les toque, es decir, que aún pueden salir a menos de que alguien los encierre.

Ahora los niños van a salir de uno en uno y sólo van a cerrar los casilleros en los que el número de casillero sea múltiplo de su número de llave.

Si encuentran cerrado con llave algún casillero ya no lo abren, eso quiere decir que el dueño del casillero se quedará encerrado dentro.

Sale el niño 2 y empieza a contar de dos en dos y a cerrar todos los casilleros múltiplos de 2, sin cerrar su propio casillero, al hacer esto, encierra a los niños 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... y ya no podrían salir, además estos niños ya no podrían encerrar a los otros.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		A		C		C		C		C		C		C		C		C		C

El niño 3 también sale de su casillero y empieza a cerrar los casilleros múltiplos de 3, sin cerrar su propio casillero, recuerda que si encuentra un casillero cerrado ya no lo abre.

Actividad: Completa la tabla siguiente con la información de los demás niños y responde las preguntas.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		A		C		C		C		C		C		C		C		C		C
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				
16																				
17																				
18																				
19																				
20																				

¿Que niños no se quedan encerrados?

¿Que niños tienen llave del casillero 19?

¿Que niños tienen llave del casillero 17?

Para tratar de descubrir qué niños quedan fuera utilizando el método de Eratostenes escribimos una tabla con los números de casilleros, podemos escribir todos los números que queramos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98

El niño 1 esta abriendo casilleros, no esta escondido como los otros, por eso no lo escribimos.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98

Cuando el niño 2 salió y empezó a cerrar los casilleros de dos en dos, borramos los números de los niños que encerró.

	2	3		5		7		9		11		13	
15		17		19		21		23		25		27	
29		31		33		35		37		39		41	
43		45		47		49		51		53		55	
57		59		61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79		81		83	
85		87		89		91		93		95		97	

No borramos el número 2, porque el niño salió a cerrar los casilleros que le corresponden al contar de 2 en 2, es decir cerró los casilleros: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20,... mejor conocidos como números pares o múltiplos de 2, pero no cierra su propio casillero y él no está encerrado, por eso lo escribimos.

Cuando el niño 3 salió y empezó a cerrar los casilleros de tres en tres, borramos los números de los niños que encerró, sin cerrar su propio casillero, recuerda que si encuentra un casillero cerrado ya no lo abre ni lo cierra.

	2	3		5		7				11		13	
		17		19				23		25			
29		31				35		37				41	
43				47		49				53		55	
		59		61				65		67			
71		73				77		79				83	
85				89		91				95		97	

No borramos al niño 3 porque nadie lo ha encerrado.

Seguiría el niño 4 pero él ya está encerrado, por eso no aparece en la lista, y como ya está encerrado ya no puede salir, el niño que sigue es el 5. Cuando pasa el niño 5, cierra los casilleros al contar de 5 en 5 sin cerrar su propio casillero, la lista es la siguiente:

	2	3		5		7				11		13	
		17		19				23					
29		31						37				41	
43				47		49				53			
		59		61						67			
71		73				77		79				83	
				89		91						97	

El niño 6 ya está encerrado, el que sigue para cerrar casilleros es el niño 7, recuerda que cierra los casilleros múltiplos de 7 a excepción de su casillero cierra los casilleros 14, 21, 28, 35,..., recuerda que algunos de estos casilleros ya los había cerrado algún otro niño antes que él.

Actividad: Repite el procedimiento que hicimos, tacha los números de los niños que se quedan encerrados y concluye hasta que todos los niños terminen de pasar, si solamente tenemos 112 casilleros, escribe los números que obtengas en una lista y contesta las siguientes preguntas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112

¿Qué niños no se quedan encerrados?:

A los números que resultan de realizar este procedimiento se les conoce como:

El procedimiento que seguiste para encontrarlos se le conoce como la Criba de Eratóstenes.

¿Por qué a los niños que quedan ya no los puede encerrar nadie? Veamos qué niños tienen las llaves que pueden abrir o cerrar un número particular de casillero. Observa la siguiente tabla en donde están los números de casillero en una columna y en la otra los niños tienen llaves que pueden abrirlo o cerrarlo.

Número de Casillero	Niños que tienen las llaves que lo abren o cierran.
1	1
2	1 y 2
3	1 y 3
4	1,2 y 4
5	1 y 5
6	1,2,3 y 6
7	1 y 7
8	1,2,4 y 8
9	1,3 y 9
⋮	⋮

Para abrir o cerrar un casillero, es necesario que el número de la llave divida exactamente al número de dicho casillero, es decir, los niños pueden abrir un determinado casillero si el número de su llave es divisor del número del casillero.

Por ejemplo:

Al casillero 8 lo pueden abrir o cerrar las llaves 1, 2, 4 y 8. El número 8 se puede dividir entre 1, 2, 4 y 8 estos números son los divisores positivos del 8.

En la siguiente tabla es posible observar qué niños pueden abrir o cerrar los casilleros de quienes no quedaron encerrados, por ejemplo, al casillero 2 sólo lo pueden abrir o cerrar las llaves 1 y 2.

Niños que no quedan encerrados	Número de las llaves que pueden abrir el casillero
2	1 y 2
3	1 y 3
5	1 y 5
7	1 y 7
11	1 y 11
13	1 y 13
17	1 y 17
19	1 y 19
23	1 y 23
⋮	⋮

Al comparar nuestra tabla con la Criba de Eratóstenes observamos los mismos números. Los primos.

Es posible ver que para los casilleros cuyo número es un primo, sólo hay 2 llaves que lo pueden abrir o cerrar, la del niño 1, que sólo abre los casilleros y la del dueño del casillero.

Por esta razón, nadie más puede cerrar estos casilleros, así, podemos decir que los casilleros que cumplen que la condición de tener sólo dos llaves, son casilleros cuyo número es primo y cuyo dueño no se encuentra encerrado.

Los números naturales se clasifican en tres tipos: Números Primos, Números Compuestos y la unidad (el uno).

Unidad: Al número 1 se le conoce como la unidad, es el número a partir del cual se forman los demás números, solamente tiene un solo divisor y es el mismo.

Número Primo: Es el número que solo se puede dividir entre 2 números positivos diferentes: **el uno** y el mismo número. Por ejemplo: 2, 3, 5, 7,...

Número Compuesto: A los números que no son primos se les conoce como **Números Compuestos.** Estos números se pueden escribir como descomposición en números primos y además tienen más de dos divisores.

Descomposición en primos: La descomposición de un número en números primos, es escribir a un número, como el producto de dos o más números primos que se llaman **factores**.

Descomposición de un número en factores primos

Ejemplo 1: Descomponer en factores al 16
$16 = 2 \times 8$
$16 = 2 \times 2 \times 4$
$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$16 = 2^4$

Para encontrar los números primos que forman parte de la descomposición de un número compuesto, se necesita dividir al número entre los números primos de tal forma que vamos acumulando la lista de los números (factores) que forman su descomposición.

Escribimos dos columnas separadas por una línea, de un lado escribimos el número y del otro lado, entre qué números primos se divide, es decir, esta lista de números contiene a todos los factores que forman la descomposición del número.

$$\begin{array}{r|l} \text{Número} & \text{Descomposición en primos} \\ & \end{array}$$

Ejemplo 1: Calcular la descomposición en números primos de 60:
Tomamos primero al dos y dividimos al 60 entre 2. La división es exacta y da como resultado 30, por eso el 2 es divisor de 60, lo escribimos en la segunda columna, los números se escriben en forma de listado hacia abajo.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & \quad \longleftarrow \text{el resultado de la división 60} \\ & \qquad\quad \text{entre 2 lo escribimos abajo} \end{array}$$

Verificamos si el 30 también se puede dividir entre 2 y la división es exacta lo que quiere decir que el 2 también es divisor de 30, por esa razón escribimos otro 2 en la columna de la descomposición en primos. Escribimos el resultado de dividir 30 entre 2 abajo del 30.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & \quad \longleftarrow \text{ Resultado de dividir 30 entre 2} \\ & \end{array}$$

El 15 no se puede dividir entre 2, así que se prueba el siguiente primo en este caso 3. Escribimos el resultado de la división abajo del 15.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \quad \longleftarrow \text{ Resultado de dividir 15 entre 3} \\ & \end{array}$$

El 5 solo se puede dividir entre 5, escribimos el resultado de la división abajo.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \quad \longleftarrow \text{Resultado de dividir 5 entre 5} \end{array}$$

Como ya llegamos al número 1 ahí se termina el proceso, entonces la descomposición en primos del 60 consta del producto de los números de la columna de la derecha: 2, 2, 3 y 5

Es decir la descomposición en primos del 60 es:
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Ejercicios 1.6: Calcula la descomposición en números primos. Escribe la descomposición en sus dos formas.

a)144=	b)105=	c)42=	d)18=
144=	105=	42=	18=

$$\begin{array}{r|l} 144 & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & \\ \end{array}$$

e)49=	f)63=	g)224=	h)108=
49=	63=	224=	108=

$$\begin{array}{r|l} 49 & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 224 & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & \\ \end{array}$$

Mínimo Común Múltiplo: El mínimo común múltiplo (m.c.m) de dos (o más) números es el producto de todos sus factores primos (**comunes y no comunes**), elevados al máximo exponente con que aparecen en las descomposiciones de cada número. Se denota como **m.c.m**

Ejemplo 1: Calcula el mínimo común múltiplo de 15 y 24:
Escribimos las listas de múltiplos de ambos números y verificamos cuáles son los múltiplos que ambas listas tienen en común y los subrayamos.

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, $\underline{120}$, 135,150, 165, 180, 195, 210, 225, $\underline{240}$, 255...
Múltiplos de 24: 24, 48, 72, 96, $\underline{120}$, 144, 168, 192,216, $\underline{240}$, 264, 288, 312, 336, 360, 384,....

Los subrayados en este caso el 120, el 240 son múltiplos comunes del 15 y 24, como muchos otros que podríamos encontrar si continuáramos la lista, pero en este caso el 120 es el primero de los múltiplos en común del 15 y el 24, por eso se le conoce como el Mínimo Común Múltiplo de 15 y 24, en los libros lo puedes encontrar como "$m.c.m$"que significa: el más pequeño de los múltiplos en común de los números que se están calculando.

Podríamos escribir que el mínimo común múltiplo entre el 15 y el 24 es el 120 y con el lenguaje matemático, solamente escribir $m.c.m.(15, 24) = 120$

Además de la lista de múltiplos, para encontrar el mínimo común múltiplo, se puede utilizar otro método a partir de la descomposición en primos de los números y se puede calcular al mismo tiempo en un sólo procedimiento.

Colocamos ambos números de un mismo lado de la línea y del otro lado los números primos que forman su descomposición. Dividimos entre 2 a ambos números para verificar si es un divisor de algunos de ellos, de la misma forma que en la descomposición de un número en factores primos. Como sólo podemos dividir al 24 entre 2 y el resultado de la división es 12, el 12 lo escribimos debajo del 24, en el caso del 15, el 2 no es divisor de 15, entonces el 15 lo volvemos a escribir abajo, porque todavía no lo hemos podido dividir entre ningún número primo.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & \quad \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Dividimos al 12 entre 2 nuevamente, lo escribimos en la columna de la descomposición el resultado de la división debajo del 12 y como el 2 no es divisor de 15, repetimos al 15 abajo.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & \quad \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Al 6 es posible dividirlo entre 2, el 2 no es divisor de 15, sólo lo escribimos abajo del 15.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

El 3 es divisor de 3 y de 15, lo colocamos en la lista de la descomposición. Colocamos el resultado de las divisiones abajo del 3 y del 15.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \longleftarrow \\ 1 & 5 & \end{array}$$

El 24 ya se dividió hasta obtener al 1 y el 15 se puede dividir entre 5.El 1 lo volvemos a escribir debajo porque ahí se termina esa columna y abajo del 5 escribimos su resultado.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \longleftarrow \end{array}$$

Para encontrar el mínimo común múltiplo sólo es necesario multiplicar los números que aparecen en la columna de la descomposición, es decir que el mínimo común múltiplo de 15 y 24 es:

$$\begin{aligned} m.c.m.(15,24) &= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x } 5 \\ &= 2^3 \text{ x } 3 \text{ x } 5 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Que es el mismo número que calculamos al escribir las listas de los múltiplos de 15 y 24 que observamos antes.

Ejercicios 1.7:

1. Calcula el mínimo común múltiplo de:

a)mcm(95,114)=

=

=

$$\begin{array}{rr|l} 95 & 114 & \end{array}$$

b)mcm(56,45)=

=

=

$$\begin{array}{rr|l} 56 & 45 & \end{array}$$

c)mcm(26,15)=

=

=

$$\begin{array}{rr|l} 26 & 15 & \end{array}$$

d)mcm(46,86)=

=

=

$$\begin{array}{rr|l} 46 & 86 & \end{array}$$

e)mcm(121,55)=

=

=

$$\begin{array}{rr|l} 121 & 55 & \end{array}$$

f)mcm(248,644,545)=

=

=

$$\begin{array}{rrr|l} 248 & 644 & 545 & \end{array}$$

2. Rosa tiene cubos azules de 55mm de arista y cubos rojos de 45mm de arista. Apilando los cubos en dos columnas, una de cubos azules y otra de rojos, quiere conseguir que las dos columnas tengan la misma altura.

a) ¿Cuántos cubos, como mínimo necesita de cada color?

b) ¿Que altura en milímetros, alcanzaran como mínimo las torres de cubos?

Máximo Común Divisor: El máximo común divisor de dos (o más) números es el producto de sus factores primos comunes, elevados al mínimo exponente con que aparece en las descomposiciones de cada número. Se denota como **M.C.D**

Ejemplo 1: Calcula el máximo común divisor de 64 y 92:

Escribimos las listas de divisores de ambos números y verificamos cuales son los divisores que ambas listas tienen en común y los subrayamos.

Los divisores de 64 :$\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{4}$, 6, 8, 16, 32, 64.

Los divisores de 92: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{4}$, 23, 46, 92.

Los divisores comunes de 64 y 92 son: 1, 2, y 4. El más grande de los divisores comunes es el 4. Es decir, que el máximo común divisor de 64 y 92 es el 4.

El $M.C.D$ de 64 y 92 en símbolos matemáticos se escribe $M.C.D.[64, 92] = 4$.

Podemos calcular el $M.C.D$ a partir de la descomposición en primos de ambos números. En ambos casos podemos dividirlos entre 2 por esa razón lo indicamos.

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2 \\ & & \end{array}$$

Escribimos el resultado de la división debajo del 64 y 92. En ambos números los pudimos dividir entre 2 por esta razón marcamos al dos con ★, porque este 2 está en las descomposiciones de ambos números.

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2\bigstar \\ 32 & 46 & \\ & & \end{array}$$

Continuamos la descomposición de los números, el 32 y el 46 aún es posible dividirlos entre 2. Escribimos el resultado de ambas divisiones. Como el 2 aún forma parte de la descomposición de ambos números lo marcamos con ★

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2\bigstar \\ 32 & 46 & 2\bigstar \\ 16 & 23 & \\ & & \end{array}$$

El 16 aún puede dividirse entre 2 pero el 23 ya no se puede dividir, como sólo divide a uno de los dos números no lo marcamos. Escribimos el resultado de la división, como el 23 no tiene mitad escribimos nuevamente el 23.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\bigstar \\ 32 & 46 & 2\bigstar \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & \end{array}$$

El 8 todavía se puede dividir entre 2. Escribimos el resultado de la división del 8 entre 2 debajo, como el 23 no tiene mitad escribimos nuevamente el 23.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\bigstar \\ 32 & 46 & 2\bigstar \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & \end{array}$$

Aún podemos dividir entre 2 al 4. Y escribimos el resultado abajo.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\bigstar \\ 32 & 46 & 2\bigstar \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ 2 & 23 & \end{array}$$

Dividimos aún entre 2, al número 2. Y escribimos el resultado.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\bigstar \\ 32 & 46 & 2\bigstar \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ 2 & 23 & 2 \\ 1 & 23 & \end{array}$$

El 23 es un número primo, por eso sólo puede dividirse entre el 1 y el 23, entonces dividimos al 23 entre 23.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\bigstar \\ 32 & 46 & 2\bigstar \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ 2 & 23 & 2 \\ 1 & 23 & 23 \end{array}$$

Terminamos la descomposición al escribir los resultados de la división del 23.

$$
\begin{array}{rr|l}
64 & 92 & 2\bigstar \\
32 & 46 & 2\bigstar \\
16 & 23 & 2 \\
8 & 23 & 2 \\
4 & 23 & 2 \\
2 & 23 & 2 \\
1 & 23 & 23 \\
1 & 1 &
\end{array}
$$

Los números que están marcados por la estrella son los factores que dividieron a ambos números, para obtener el máximo común divisor sólo multiplicamos los marcados con una flecha:

$$
\begin{aligned}
m.c.d\ [64, 92] &= 2 \times 2 \\
&= 2^2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

El 4 es el máximo común divisor de 64 y 92: $M.C.D\ [64, 92] = 4$

Ejercicios 1.8:

1. Calcula el máximo común divisor de:

a)M.C.D[64,92]=
=
=

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & \end{array}$$

b)M.C.D[36,69]=
=
=

$$\begin{array}{rr|l} 36 & 69 & \end{array}$$

c)M.C.D[325,90]=
=
=

$$\begin{array}{rr|l} 325 & 90 & \end{array}$$

d)M.C.D[256,58]=
=
=

$$\begin{array}{rr|l} 256 & 58 & \end{array}$$

e)M.C.D[584,888,54]=
=
=

$$\begin{array}{rrr|l} 584 & 888 & 54 & \end{array}$$

f)M.C.D[24,18]=
=
=

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 18 & \end{array}$$

2. María y Jorge tienen 25 canicas blancas, 15 azules y 90 rojas; con ellas, haciéndoles los agujeros necesarios, quieren hacer el mayor número de collares posibles, sin que sobre ninguna canica.

a) ¿Cuántos collares iguales se pueden hacer?

b) ¿Que número de canicas de cada color tendrá cada collar?

3. **Acertijo: Una incógnita de huevos**
Una viejecita llevaba una cesta con huevos, pero cuando un niño la asusto al pasar corriendo, soltó la cesta. La mamá del niño para reponer la perdida, le pregunto cuántos huevos llevaba. La viejita respondió que no recordaba el número exacto, pero si que al contarlos en grupos de 2 sobraba 1, en grupos de 3 sobraban 2, y así sucesivamente, hasta que en grupos de 6 sobraban 5. ¿Cuántos huevos había en la cesta?

1.6. Números Racionales

Definición: El conjunto cuyos elementos son los elementos son los números que pueden representarse por el cociente de dos enteros p y q, donde q no es igual a 0; esto es, los números que pueden representarse simbólicamente como:

$\frac{p}{q}$ donde q no es 0

A este conjunto se le llama conjunto de los **números racionales** y se denota por $\mathbb{Q}$.

Algunos de los números del conjunto $\mathbb{Q}$ son $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{-2}{3}$ y $\frac{-31}{12}$. Todo entero es un número racional, pues cualquier entero puede representarse con el cociente de si mismo y 1; esto es, 8 puede representarse como $\frac{8}{1}$, 0 como $\frac{0}{1}$, y -15 como $\frac{-15}{1}$.

A los números racionales también se les conoce como números fraccionarios o fracciones y pueden ser de dos clases: fracciones comunes y fracciones decimales.

A los números como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ se les llaman fracciones comunes, quebrados o números fraccionarios y en ellos, el que indica el número de partes en que se ha dividido la unidad es el denominador y el que indica cuántas de esas partes se tomaron es el numerador.

$\frac{3}{4} = \frac{numerador}{denominador}$

Las fracciones decimales son los números que expresan una o más partes de la unidad dividida en 10, 100, 1000, 10000, etc. partes iguales.

Clasificación de fracciones:

Fracciones Propias	Fracciones impropias	Fracciones mixtas
numerador<denominador $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$	numerador>denominador $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{7}$	Tiene una parte entera y una fraccionaria $5\ \frac{1}{3}$, $2\ \frac{3}{4}$

Conversión de una fracción impropia a mixta

Ejemplo 1:
Se resuelve la división , el cociente son los enteros, el residuo es el numerador de la parte fraccionaria y el denominador es el mismo.

$$\frac{5}{3} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 1 \\ 3\overline{)5} \\ 2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad 1\frac{2}{3}$$

Conversión de una fracción mixta a impropia
Se multiplican los enteros por el denominador y se le suma el numerador: este resultado es el numerador de la fracción impropia; el denominador es el mismo.

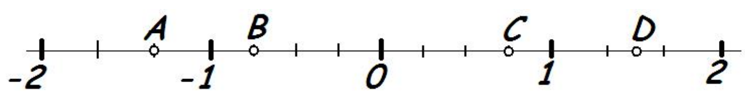
Ejemplo 1:

$1\ \frac{2}{3} \ = \frac{(1)(3)+2}{3}$

$=\frac{3+2}{3}$

$=\frac{5}{3}$

Ejercicio 1.9: Indica la fracción que representan los puntos A, B, C y D en la siguiente recta numérica.



a) A=

b) B=

c) C=

d) D=

1.6.1. Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es convertirla en otra fracción equivalente cuyos términos sean menores.

Para simplificar una fracción se dividen sus dos términos sucesivamente por los factores comunes que tengan.

Ejemplo 1 Reduce a su minima expresión $\frac{1350}{2550}$

$\frac{1350}{2550} = \frac{135}{255}$ Al simplificar entre 10 en ambos términos

$= \frac{45}{85}$ Al simplifica entre 3 en ambos términos

$= \frac{9}{17}$ Al simplificar entre 5 en ambos terminos

Ejercicios 1.10: Simplifica las siguientes fracciones a su minima expresión.

a) $\frac{54}{96} =$ b) $\frac{84}{126} =$ c) $\frac{72}{324} =$

1.6.2. Reducción de fracciones al mínimo común denominador

1. Se simplifican cada una de las fracciones dadas a su minima expresión.

2. Se encuentra el mínimo común múltiplo de los denominadores y éste será el denominador común.

3. Para hallar los numeradores se divide el mínimo común múltiplo entre cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

Ejemplo 1: Reducir al mínimo común denominador $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{2}$.

Calcula el m.c.m(3,5,2) y colócalo como denominador común

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

m.c.m(3,5,2) $= 3 \times 5 \times 2$
$=30$

$\frac{1}{3} = \frac{1(10)}{30}$

$\frac{1}{3} = \frac{10}{30}$

$\frac{2}{5} = \frac{2(6)}{30}$

$\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$

$\frac{3}{2} = \frac{3(15)}{30}$

$\frac{3}{2} = \frac{45}{30}$

Ejercicios 1.11: Reducir al minimo comun denominador las fracciones.

a)$\frac{3}{4} =$ y $\frac{1}{3} =$ b)$\frac{1}{2} =$ y $\frac{3}{4} =$

c)$\frac{1}{2} =$, $\frac{3}{4} =$, $\frac{5}{6} =$ y $\frac{2}{3} =$

d)$\frac{7}{3} =$, $\frac{11}{12} =$, $\frac{15}{18} =$ y $\frac{1}{3} =$

1.6.3. Operaciones con Números Racionales

Suma y Resta de fracciones:

Con el mismo denominador: Se suman o restan (según corresponda) los numeradores y el denominador pasa igual.

Ejemplo 1:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{6}{4} &= \frac{3+1+6}{4} \\
&= \frac{10}{4} \qquad \text{Simplifica entre 2 ambos términos} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Con diferente denominador: Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se coloca como denominador común. Se divide al denominador común entre el denominador de la primera fracción y al resultado se le multiplica por el numerador de la primera fracción. A este número se le suma o resta(según corresponda) el resultado de repetir el procedimiento anterior utilizando la segunda fracción.

Ejemplo 1:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{7} + \frac{4}{9} &= \frac{9(3)+7(4)}{63} \\
&= \frac{27+28}{63} \\
&= \frac{55}{63}
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{r}
\text{Calcula el} \\
\text{m.c.m(7,9)} \\
\text{y colócalo como} \\
\text{denominador}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc|c}
7 & 9 & 3 \\
7 & 3 & 3 \\
7 & 1 & 7 \\
1 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
\text{m.c.m(7,9)} &= 3 \times 3 \times 7 \\
&= 63
\end{aligned}
$$

Ejercicios 1.12: Resuelve las siguientes operaciones con números racionales.

a)$\frac{1}{2}+\frac{5}{9}=$ b)$\frac{9}{5}+\frac{15}{8}=$ c)$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=$

d)$\frac{1}{2}-\frac{5}{9}=$ e)$\frac{13}{7}-\frac{7}{4}=$ f)$\frac{5}{6}-\frac{7}{8}=$

g) $\frac{5}{8}+\frac{4}{7}=$ h) $\frac{6}{8}+\frac{8}{11}=$ i) $\frac{10}{8}+\frac{6}{9}=$

j) $\frac{4}{7}-\frac{5}{9}=$

k) $\frac{5}{7}-\frac{8}{11}=$

l) $\frac{8}{7}-\frac{9}{8}=$

m) $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=$

n) $\frac{4}{5}+\frac{3}{8}=$

ñ) $\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{3}{2}=$

o) $\frac{3}{2}+\frac{7}{5}+\frac{6}{8}=$

p) $\frac{5}{3}+\frac{11}{6}+\frac{3}{4}=$

q) $\frac{13}{3}-\frac{13}{5}+\frac{3}{20}=$

r) $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{3}{4}=$

s) $\frac{3}{7}+\frac{1}{5}+\frac{3}{2}=$

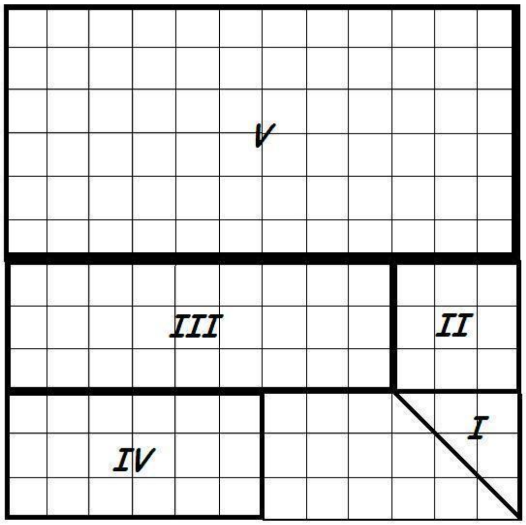
t) $\frac{4}{3}+\frac{7}{6}+\frac{1}{2}=$

u) $\frac{8}{9}-\frac{7}{20}+4=$

v) $\frac{11}{3}+\frac{13}{6}-5=$

w) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+(\frac{-1}{4})=$

Ejercicios 1.13: En la siguiente figura colorea de diferentes colores las regiones I, II, III, IV y V.



1. ¿Que fracción del cuadrado global de la figura dada son la regiones?:

a) I=

b) II=

c) III=

d) IV=

e) V=

2. Calcula la fracción que representa la suma de la áreas en los casos siguientes

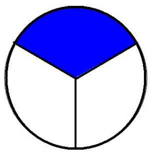
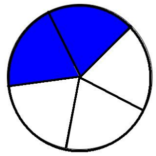
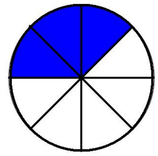
a)I+II=

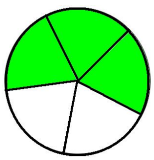
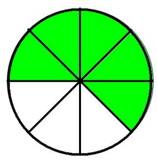
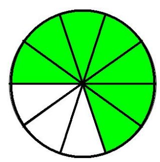
b) I+III+IV=

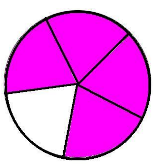
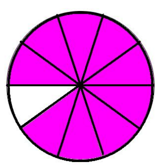
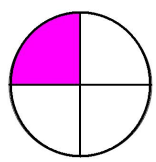
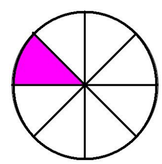
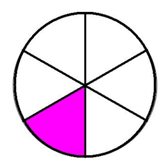
c) II+III+V=

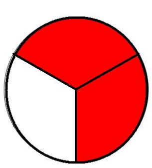
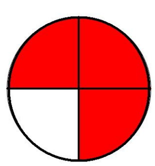
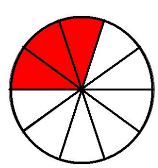
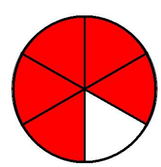
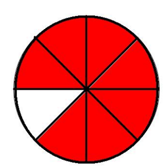
3. ¿Que fracción representa la region no numerada?

4. Resuelve las sumas de los valores representados.

a)  +  +  =

b)  +  +  =

c)  +  +  +  +  =

d)  +  +  +  +  =

Multiplicación de fracciones: Se multiplica en línea, numerador por numerador y denominador por denominador.

Ejemplo 1:

$$\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{(-3)(-2)(-1)}{(4)(3)(5)}$$

$= \frac{-6}{60}$ Simplifica entre 2 en ambos términos

$= \frac{-3}{30}$ Simplifica entre 3 en ambos términos

$= \frac{-1}{10}$

Ejercicios 1.14: Resuelve las siguientes operaciones con números racionales.

a) $(\frac{1}{2})(\frac{9}{5}) =$ b) $(\frac{13}{4})(\frac{7}{4}) =$ c) $(\frac{5}{6})(\frac{7}{8}) =$

d) $(\frac{6}{4})(\frac{5}{9}) =$ e) $(\frac{2}{7})(\frac{8}{11}) =$ f) $(\frac{8}{7})(\frac{5}{8}) =$

g) $(\frac{-9}{5})[(\frac{-3}{9})(\frac{-1}{8})] =$

División de fracciones: Se multiplica al primer numerador por el segundo denominador y se coloca como numerador. Luego al primer denominador por el segundo numerador y se coloca como denominador.

Ejemplo 1:

$\frac{5}{2} \div \frac{3}{8} = \frac{(5)(8)}{(2)(3)}$

$= \frac{40}{6}$ Simplifica entre 2 ambos términos

$= \frac{20}{3}$

Cuando una división esta expresada como fracción de fracciones la forma de resolverla es: Multiplicar los extremos en el numerador y multiplicar los medios en el denominador.

Ejemplo 1:

$\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{(3)(6)}{(4)(5)}$

$= \frac{18}{20}$ Simplifica entre 2 ambos términos

$= \frac{9}{10}$

Simplifica a su mínima expresión realizando las operaciones con racionales.

Ejemplo 1:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\underline{1-\frac{1}{2}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\underline{\frac{1}{2}}}} \qquad \text{Se resuelve } 1-\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= 1+\frac{1}{\underline{1+2}} \qquad \text{Se resuelve } \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{(1)(2)}{(1)(1)} = 2$$

$$= \underline{1+\frac{1}{3}} \qquad \text{Se resuelve } 1+2 = 3$$

$$= \frac{4}{3} \qquad \text{Se resuelve } 1+\frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejercicios 1.15: Resuelve las siguientes operaciones con números racionales.

a) $\frac{1}{2} \div \frac{2}{9} =$

b) $\frac{13}{7} \div \frac{5}{4} =$

c) $\frac{5}{6} \div \frac{6}{8} =$

d) $\frac{-35}{7} =$

e) $\frac{\frac{4}{8}}{\frac{5}{9}} =$

f) $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{8}{11}} =$

g) $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{9}{8}} =$

h) $\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{2}}{1+(\frac{1}{3})(\frac{1}{2})} =$

i) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=$

j) $3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}}=$

k) $1-\frac{2}{1+\frac{3}{2+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}}=$

l) $\frac{[(\frac{2}{5})(\frac{5}{4})]\div\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}(\frac{5}{4}\div\frac{5}{6})}=$

Ejercicios 1.16: Realiza las siguientes operaciones con números racionales.

a) $2(\frac{1}{5})+\{3-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}[-3(-\frac{2}{3})-1+\frac{1}{5}]+4(-\frac{5}{2})\}=$

b)$1-\frac{8}{3}(-\frac{3}{4})-\{2-[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}(-10+\frac{15}{4})-1]\}=$

c)$-\frac{1}{2}+[\frac{1}{9}+\frac{5}{2}-\frac{2}{3}(-\frac{3}{4}-1+3)-\frac{1}{6}]=$

d)$(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+5-3(4\div\frac{3}{5}+1)=$

1.7. Relación de Orden $>,<,=$

Si un número **a** es menor que un número **b**, se simboliza $a<b$. O bien $b>a$, que se lee **b** es mayor que **a**.

Cuando los números enteros se encuentran ordenados tanto a la derecha con los números enteros positivos como a la izquierda con los números enteros negativos.

-						o						+
						$\overline{\wedge}$						
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Si se eligen dos números enteros el menor de los dos es el que se localiza a la izquierda.

Ejemplo 1: -1 y -4

El menor es -4 ya que se localiza a la izquierda de -1, y se simboliza como $-1 > -4$, es decir, -1 es mayor que -4. O bien $-4 < -1$,es decir, -4 es menor que -1.

1.7.1. Ley de la Tricotomía

Definición: Si a, b son números reales se cumple una y solo una de las siguientes propiedades.
i) $a > b$
ii)$a = b$
iii)$a < b$

Escribe la relación de orden que corresponda.

Ejemplo 1:
$\frac{-7}{5}$ $\frac{-2}{3}$ Multiplica los denominadores cruzados

-7(3) -2(5)

-21 $<$ -10 Se comparan el -21 y el -10, en este caso el -10 es mayor que -21.

$\frac{-7}{5}$ $<$ $\frac{-2}{3}$ Se copia el mismo signo

Ejercicio 1.17: Escribir la relación de orden que corresponda.

a) -3 5 b) 8 17 c) $\frac{-7}{5}$ $\frac{-8}{3}$

e)$\frac{7}{8}$ $\frac{8}{7}$ f)$\frac{-3}{4}$ $\frac{7}{5}$ g)$\frac{-5}{4}$ $\frac{-4}{5}$

h)$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{7}$ i)$\frac{-9}{2}$ -3 j)$\frac{-7}{5}$ $\frac{-8}{3}$

k)$\frac{3}{7}$ $\frac{2}{5}$ l)$\frac{-14}{3}$ -2 m)$\frac{-5}{4}$ $\frac{-4}{5}$

n)$\frac{6}{4}$ $\frac{3}{2}$ ñ)$\frac{5}{4}$ $\frac{15}{20}$

Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones.

Ejemplo 1: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{2}$.

1. Primero reducimos al mínimo común denominador las fracciones dadas

$\frac{1}{3} = \frac{1(10)}{30}$

$\frac{1}{3} = \frac{10}{30}$

Calcula el m.c.m(3,5,2) y colócalo como denominador común

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

m.c.m(3,5,2) $= 3 \times 5 \times 2$
$=30$

$\frac{2}{5} = \frac{2(6)}{30}$

$\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$

$\frac{3}{2} = \frac{3(15)}{30}$

$\frac{3}{2} = \frac{45}{30}$

2. Ordenamos los numeradores de mayor a menor:

$\frac{45}{30}$, $\frac{12}{30}$ y $\frac{10}{30}$

Es decir $\frac{3}{2} > \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$

Al acomodar de mayor a menor la lista tenemos:

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}$

Ejemplo 2:

$\frac{-1}{7}, \frac{7}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{5}=$

1. En la lista el único número positivo es $\frac{7}{3}$ por lo tanto es el mayor.

$\frac{-1}{7}, \frac{7}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{5}=\frac{7}{3}$

Se comparan entre si $\frac{-1}{7}$ $\qquad$ $\frac{-3}{4}$

$(-1)(4) \qquad (-3)(7)$

$-4 > -21$

$\frac{-1}{7} > \frac{-3}{4}$

Al acomodar la lista tenemos:

$\frac{-1}{7}, \frac{7}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{5} = \frac{7}{3}, \frac{-1}{7}\ , \frac{-3}{4}$

Se comparan entre si $\frac{-3}{4}$ $\qquad$ $\frac{-2}{5}$

$(-3)(5) \qquad (-2)(4)$

$-15 < -8$

$\frac{-3}{4} < \frac{-2}{5}$

Al acomodar la lista tenemos:

$\frac{-1}{7}, \frac{7}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{5} = \frac{7}{3}, \frac{-1}{7}\ , \frac{-2}{5}, \frac{-3}{4}$

Se comparan entre si $\frac{-1}{7}$ $\qquad$ $\frac{-2}{5}$

$(-1)(5) \qquad (-2)(7)$

$-5 > -14$

$\frac{-1}{7} > \frac{-2}{5}$

Al acomodar la lista tenemos:

$\frac{-1}{7}, \frac{7}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{5} = \frac{7}{3}, \frac{-1}{7}\ , \frac{-2}{5}, \frac{-3}{4}$

Ejercicio 1.18: Acomoda de mayor a menor las listas de números.

a)$\frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{-4}{5}, \frac{-17}{20}, \frac{1}{2} =$

b)$\frac{7}{5}, \frac{-8}{4}, \frac{5}{27}, \frac{75}{18} =$

c)$\frac{-3}{7}, \frac{-8}{25}, \frac{-15}{7}, \frac{-1}{5} =$

d)$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5} =$

e)$\frac{7}{3}, \frac{11}{12}, \frac{5}{18}, \frac{1}{2} =$

f)$\frac{2}{3}, \frac{11}{12}, \frac{5}{18}, \frac{8}{3} =$

Ejercicios 1.19: Resuelve los siguientes problemas

1. Según una receta para flan, éste requiere $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar para la mezcla y $\frac{1}{2}$ de taza para el caramelo ¿Cuánta azúcar se necesita para prepararlo?

2. Una compañía destina cada quincena $\$240,000$ para gastos, $\frac{4}{5}$ a salarios, $\frac{1}{4}$ de lo que queda al mantenimiento de la empresa y el resto, a investigación para su crecimiento. ¿Cuál es el monto destinado a este rubro?

3. Miguel pintó $\frac{3}{8}$ de una barda y Tito $\frac{5}{12}$ de la misma barda. ¿Qué parte de la barda pintaron entre los dos? ¿Qué tanto más pinto Tito que Miguel?

4. En un congreso, $\frac{3}{10}$ de los asistentes eran ingenieros en irrigación, $\frac{1}{4}$ zootecnistas, $\frac{7}{20}$ fitotecnistas y el resto forestales. ¿Que fracción de los asistentes eran ingenieros forestales?

5. Los $\frac{2}{5}$ de los alumnos de una escuela son mujeres. Si $\frac{5}{12}$ de ellas usan lentes, ¿que parte de los alumnos de la escuela son mujeres que usan lentes?

6. De los 75 km que se van a recorrer, la primera hora se recorrieron $\frac{3}{5}$ de dicha distancia y en la segunda hora $\frac{1}{3}$ del resto. ¿Cuántos kilómetros faltan por recorrer?

7. Un hombre camina $4\frac{1}{2}$ kilómetros el lunes, $8\frac{2}{3}$ kilómetros el martes, 10 kilómetros el miércoles y $\frac{5}{8}$ de kilómetro el jueves. ¿Cuánto ha recorrido en los cuatro días?

8. Tenia \$400 y gaste los $\frac{3}{8}$.¿Cuánto me queda?

9. Si me deben una cantidad igual a los $\frac{7}{8}$ de \$960 y me pagan los $\frac{3}{4}$ de lo que me deben, ¿cuánto me deben aun?

10. Un padre deja al morir \$450,000 para repartir entre sus tres hijos. El mayor debe recibir $\frac{2}{9}$ de la herencia; el segundo $\frac{1}{5}$ de la parte del anterior, y el tercero lo restante. ¿Cuánto recibirá cada uno?

1.8. Radicales

Definición: Si n es un entero positivo mayor que 1, y a y b son números reales tales que: $a^n = b$ entonces a es la **raíz n-ésima** de b

Si n es un número entero positivo mayor que 1 ($n > 1$), b un número real, la $\sqrt[n]{b}$ representa la **raíz n-ésima principal** de b, es decir $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$. Entonces

I) Si $b > 0$, $\sqrt[n]{b}$ es la n-ésima raíz positiva de b.

II)Si $b < 0$ y n es impar, $\sqrt[n]{b}$ es la n-ésima raíz negativa de b

III)Si $b = 0$, $\sqrt[n]{b} = 0$.

El símbolo $\sqrt{}$ se llama **signo radical**. La expresión completa $\sqrt[n]{b}$ se denomina **radical**, n es el **índice** y representa el orden del radical, b el **radicando**.

Si n no aparece,se deberá entender que el orden es 2, es decir, $n = 2$ y se escribe $\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt[2]{b}$

1.8.1. Conversiones de los exponentes racionales y radicales

Para m y n enteros positivos ($n > 1$), y b no negativo cuando n es par.

$$\mathrm{b}^{\frac{m}{n}} = \begin{cases} (\mathrm{b}^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b^m} \\ (\mathrm{b}^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{b})^m \end{cases}$$

A menos que se indique lo contrario, todas las variables en el resto del análisis están restringidas de manera que todas las cantidades implicadas son números reales.

1.8.2. Propiedades de los radicales

Para n un número natural más grande que 1, y x y y números positivos reales:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \sqrt[n]{x^n} = x \\ \text{II.} & \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \\ \text{III.} & \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \end{array}$$

1.8.3. Simplificación de radicales

Un radical está en **forma simplificada** si:

1. Ningún radicando contiene un factor a una potencia mayor que o igual al índice radical.

2. Ninguna potencia del radicando y el índice del radical tiene un factor común diferente de 1.

3. Ningún radical aparece en un denominador.

4. Ninguna fracción aparece dentro de un radical.

Ejemplo 1: Simplifica $\sqrt{50}$

$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= \sqrt{25 \cdot 2} \\ &= \sqrt{25}\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Simplifica $\sqrt[8]{256}$

$$\begin{aligned} \sqrt[8]{256} &= \sqrt[4]{\sqrt{256}} \\ &= \sqrt[4]{16} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 1. 20: Expresa los siguientes radicales en forma simplificada.

a) $\sqrt{18} =$

b) $3\sqrt{48} =$

c) $\sqrt{72} =$

d) $\sqrt[3]{648} =$

e) $\sqrt[3]{216} =$

f) $\sqrt[3]{343} =$

g) $\sqrt[3]{128} =$

Reducción de Radicales Semejantes

Las expresiones algebraicas que implican radicales con frecuencia se pueden simplificar sumando y restando los términos que contengan exactamente las mismas expresiones radicales.

Ejercicio 1. 21: Combina tantos terminos como sea posible:

a) $7\sqrt{2} - 15\sqrt{2} =$

b) $\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 30\sqrt{2} - 40\sqrt{2} =$

c) $4\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 19\sqrt{3} =$

d) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{3} =$

e)$2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$

f)$\sqrt{5}-22\sqrt{5}-8\sqrt{5}=$

g)$\frac{1}{4}\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\frac{1}{8}\sqrt{3}=$

h)$5\sqrt{2}-\sqrt[4]{64}+2\sqrt{32}=$

i)$\sqrt[3]{54}+\sqrt{32}-\sqrt[3]{16}=$

j)$\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}=$

k)$\sqrt{32}-(\sqrt{8}-\sqrt{2})=$

1.8.4. Producto de radicales

Se consideran varios tipos de productos especiales que implican radicales. La propiedad distributiva de los números reales desempeña un papel central en el enfoque de estos problemas.

Ejercicio 1. 22: Combina tantos terminos como sea posible:

a) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{4} =$

b) $6\sqrt{12} \cdot 4\sqrt{75} =$

c) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} =$

d) $\sqrt{4^3} \cdot \sqrt[5]{2} =$

e) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{16} =$

f) $\sqrt{50}\sqrt{98}$

1.8.5. División de radicales

Ejercicio 1. 23: Combina tantos terminos como sea posible:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} =$

b) $\dfrac{\sqrt{192}}{\sqrt{3}} =$

c) $\sqrt{\dfrac{9}{16}} =$

d) $\dfrac{\sqrt[6]{2916}}{\sqrt[6]{4}} =$

e) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{98}} =$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{576}} =$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}} =$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{108}} =$

Simplificación de radicales

Se procede esencialmente de la misma manera que cuando se combinan términos semejantes en polinomios, agrupando términos semejantes, tomando como base el radical que tienen en común para poder clasificarlos. La propiedad distributiva de los números reales desempeña un papel central en este proceso.

Ejemplo 1: Combina tantos términos como sea posible:

$$3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 7\sqrt{2} \quad = \underbrace{3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}_{=7\sqrt{3}} \quad \underbrace{-2\sqrt{2} - 7\sqrt{2}}_{-9\sqrt{2}}$$

Ejercicio 1. 24:

a) $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}=$

b) $3\sqrt{2}-5\sqrt{5}+\sqrt{32}+\sqrt{20}=$

c) $\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}=$

d) $\sqrt{80}-2\sqrt{252}+3\sqrt{405}-3\sqrt{500}=$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{1}{6}\sqrt{72}=$

f) $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}=$

g) $\frac{1}{7}\sqrt{147}-\frac{1}{5}\sqrt{700}+\frac{1}{10}\sqrt{28}+\frac{1}{3}\sqrt{2187}=$

h) $\sqrt[3]{40}-\sqrt{100}+\sqrt[3]{135}=$

i)$\sqrt{108}-\sqrt{75}+\sqrt{72}-\sqrt{32}=$

j)$4\sqrt{20}+5\sqrt{12}-\sqrt{125}-3\sqrt{48}=$

k)$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}-(-\sqrt{18}+\sqrt{8})=$

l)$\sqrt[3]{54}+\sqrt{32}-\sqrt[3]{16}=$

1.9. Porcentajes

Ejemplo 1: Si en una bodega hay 1,200,000 en mercancías, si el 25 % es de azúcar, 20 % cafe y el resto en víveres. ¿Que cantidad tengo asignada en cada producto?

$25\,\% = 0.25$

$(1200,000)(0.25) = 300,000$

Azúcar $= \$300,000$

$20\,\% = 0.20$

$(1200,000)(0.20) = 240,000$
Café=$\$240,000$
Resto de Víveres.

Azúcar=	300,000
Café=	+240,000
	540,000

$$\begin{array}{r} 1,200,000 \\ -\ 540,000 \\ \hline 660,000 \end{array}$$

El resto de víveres =$\$660,000$

Ejercicios 1.25: Resuelve los siguientes problemas

1. En un pueblo de 2,500 habitantes hubo elecciones locales y participaron tres candidatos: Leonardo Pérez, Jesús López y Jaime Hernández. Solamente voto el 47 % del electorado. Pérez obtuvo el 17.2 % de la votación, López el 33 % y el resto Hernández. Obtener:

a) El número de los que votaron y el de los que no votaron.

b) El número de votos que obtuvo Hernández.

c) El número de votos que obtuvo López.

d) El número de votos que obtuvo Pérez.

2. Si Tomas se compro un traje con 38 % de descuento y el precio de etiqueta es de $3,573.12 ¿Cuánto le va a costar el traje ya con el descuento?

3. Si el precio de la etiqueta de un CD es de $245 y tiene el 35 % de descuento.¿Cuánto pagaras en cajas por el CD?

4. El precio de una lavadora que incluye el IVA del 15 % cuesta \$4800. ¿Cuál es el precio real, sin el IVA?

5. ¿Cuánto es el 35 % de 700?

6. El 5 % de 720 es:

7. Un artículo que cuesta \$750 tiene el 20 % de descuento ¿Cuánto cuesta?

8. En 5 años la población de una comunidad creció de $200,000$ a $257,000$ habitantes. ¿Cual fue el porcentaje de incremento?

9. En el mes de septiembre el Sr. Ríos vendió \$9,700. Si recibe el 15 % de comisión.
a) ¿Cual fue su comisión en ese mes?.
b) ¿Cuánto recibió la compañía por las ventas del Sr. Ríos?

10. Los costos semanales de un negocio son de \$28,700. Si el propietario desea obtener una ganancia del 30 % de los ingresos que percibe.
a) ¿Cuales deben ser semanalmente los ingresos totales del negocio?
b) ¿Cuánto obtiene de ganancia semanal?

Capítulo 2

UNIDAD 2 - VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES

Definición: Se llama **variable dependiente** a un cantidad que depende de otra. Y se denomina **variable independiente** a las cantidades de las cuales depende la variable dependiente.

Por lo general se representa la variable independiente con la letra **x** y a la variable dependiente con la letra **y**.

La variable dependiente tiene como condición fundamental que varia de manera constante de acuerdo al valor de la variable independiente. Esta relación entre variables recibe el nombre de **variación directamente proporcional** y su modelo general es:

$$\begin{array}{ccc} \text{variable} & & \text{variable} \\ \text{dependiente} & & \text{independiente} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{y} & = \text{k} & \text{x} \\ & \uparrow & \\ & \text{constante} & \\ & \text{proporcionalidad} & \end{array}$$

A la **k**, se le denomina **constante de proporcionalidad**

k= $\frac{y}{x}$

k= $\frac{Var.Dependiente}{Var.Independiente}$

2.1. Existencia de variación proporcional entre dos variables.

Para determinar si existe variación directamente proporcional, es necesario identificar la constante de proporcionalidad y con ella completar el modelo algebraico.

Ejemplo 1: Determina si los valores de la siguiente tabla cumplen con el modelo de variación proporcional directa.

x	y
3	6
5	10
7	14
9	18
11	22

Para determinar que cumple el modelo de variación proporcional cada renglón debe regirse por:

$$y = k \cdot x$$

Obteniendo al sustituir los valores de x y y la misma constante de proporcionalidad. En este caso tenemos:

$y = k \cdot x$
$6 = k \cdot 3$
$10 = k \cdot 5$
$14 = k \cdot 7$
$18 = k \cdot 9$
$22 = k \cdot 11$

Despejamos a k n cada uno de los casos y tenemos:
$k = \frac{y}{x}$
$k = \frac{6}{3} \rightarrow k = 2$
$k = \frac{10}{5} \rightarrow k = 2$
$k = \frac{14}{7} \rightarrow k = 2$
$k = \frac{18}{9} \rightarrow k = 2$
$k = \frac{22}{11} \rightarrow k = 2$

Como el valor de k es el mismo en cada uno de los casos, podemos afirmar que existe una variación directamente proporcional y que el modelo que le corresponde al sustituir k, que en este caso es $k = 2$, por lo tanto el modelo que se obtiene es:

$y = k \cdot x$
$y = 2x$

Ejercicio 2.1: En las siguiente tablas indica si existe variación proporcional directa entre las variables, si es así indica cual es la constante de proporcionalidad y escribe la expresión que representa el modelo.

a) k=

y=

x	y
2	9
3	13.5
4	18
5	22.5
6	27
7	31.5

b) k=

y=

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

c) k=

y=

x	y
2	3
3	4.5
4	6
5	7.5

d) k=

y=

x	y
2	3.2
4	6.44
6	9.72
7	11.41
8	12.8

e) k=

y=

x	y
1	1.75
3	5.25
5	8.75
9	15.75
10	17.5

2.2. Relación Proporcional Directa

Ejemplo 1: Escribe la expresión que corresponda si ambas variables son directamente proporcionales.
a) Elabora la tabla

b) La variable independiente es:

c) La variable dependiente es:

d) El valor de k es

e) Expresión

f) Construye la gráfica

T	d
0	0
2	2
4	
6	
8	
10	
12	

Variable Independiente= T

Variable Dependiente= d

k= $\frac{VariableDependiente}{Variableindependiente}$

k= $\frac{d}{T}$

Expresión: d=k ·T
Despejamos a k del segundo renglón, al sustituirlo en el modelo.

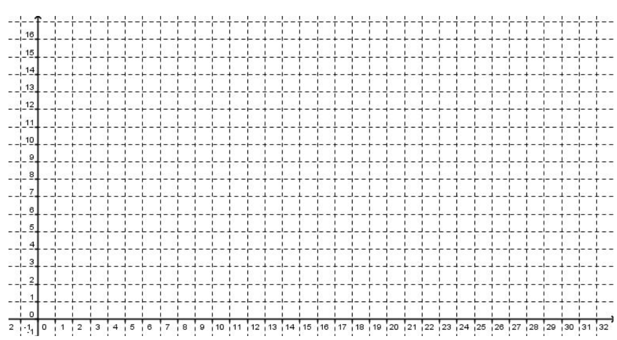
d=k ·T
2=k ·2
k= $\frac{2}{2}$
k=1

La expresión que corresponde al modelo al sustituir k es:
d=k ·T
d=1 ·T
d=T

Utilizamos el modelo para completar la tabla y tenemos:

T	d
0	0
2	2
4	4
6	6
8	8
10	10
12	12

Con esos valores se traza la grafica



Ejercicio 2.2: De las tablas siguientes completalas de tal manera que la relación entre las variables sea de proporcionalidad directa y completa lo que se te solicita.

1. Escribe la expresión que corresponda si ambas variables son directamente proporcionales.

a) Elabora la tabla

b) La variable independiente es:

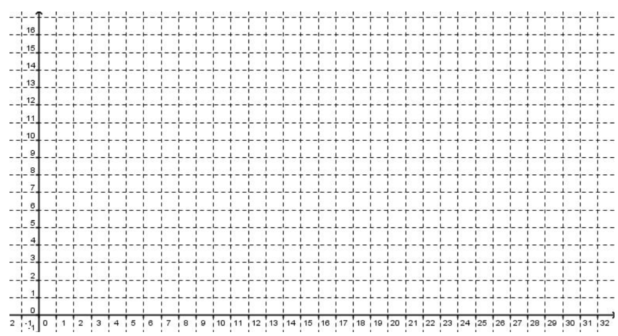
c) La variable dependiente es:

d) El valor de k es

e) Expresión

f) Construye la gráfica

m	E
.1	1
.3	
.5	5
.7	
.9	9
1	
1.1	



2. Escribe la expresión que corresponda si ambas variables son directamente proporcionales.

a) Elabora la tabla

b) La variable independiente es:

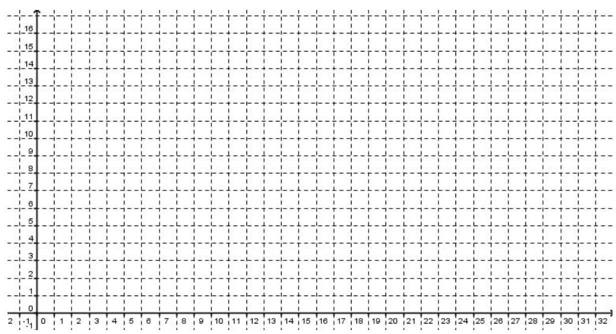
c) La variable dependiente es:

d) El valor de k es

e) Expresión

f) Construye la gráfica

x	y
2	7
3	10.5
4	
5	
7	
9	
25	87.5



3. Escribe la expresión que corresponda si ambas variables son directamente proporcionales.

a) Elabora la tabla

b) La variable independiente es:

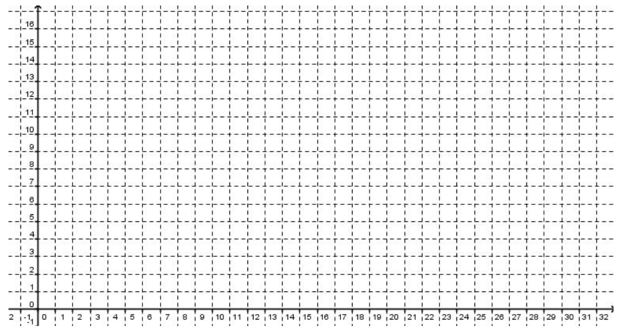
c) La variable dependiente es:

d) El valor de k es

e) Expresión

f) Construye la gráfica

x	y
1	
2	
3	
4	10.4
10	
20	
50	130



Ejemplo 1: En la proporción siguiente determina el valor faltante.

$\frac{36}{70} = \frac{1890}{x}$

Para encontrar el valor faltante es necesario despejar a la variable x

$36(x) = 1890(70)$

$x = \frac{1890(70)}{36}$

$x = \frac{132300}{36}$

$x = 3675$

Ejercicios 2.3: En las proporciones siguientes determine el valor faltante.

a) $\frac{15}{3} = \frac{25}{x}$

b) $\frac{16}{2} = \frac{64}{x}$

c) $\frac{7}{14} = \frac{x}{70}$

d) $\frac{29}{71} = \frac{3915}{x}$

e) $\frac{x}{19} = \frac{1824}{1996}$

f) En la proporción $\dfrac{3}{n} = \dfrac{n}{27}$el valor de n es:

g) En la proporción $\dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{b}$ el término desconocido vale:

h) En la proporción $\dfrac{12}{3} = \dfrac{28}{x}$,determina el valor de x.

2.3. Problemas de Variación Proporcional Directa

Ejemplo 1:

Un obrero gana \$5 por hora. Hallar la gráfica de salario en función del tiempo.

Variable Intependiente= tiempo (t)

Variable Dependiente = salario (s)

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta y = y_2 - y_1$

Pendiente m=$\frac{\delta y}{\delta x}$

k=

t	0	1	x_1 2	x_2 3	4	5	6
s	0	5	10 y_1	15 y_2	20	25	30

$$\begin{array}{ccc} \text{VD} & & \text{VI} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{y} & =\text{k} & \text{x} \\ \\ 5 & = & \text{k}(1) \\ \\ \frac{5}{1} & = & \text{k} \\ \\ \text{k} & = & 5 \end{array}$$

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = 3 - 2$

$\Delta x = 1$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta y = 15 - 10$

$\Delta y = 5$

Pendiente m=$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{1}$

m=5

Cuánto va a cobrar el obrero después de 8 horas y 37 minutos.

1 hora= 60 minutos

8 horas + 37 minutos =

480 minutos + 37 minutos = 517 minutos

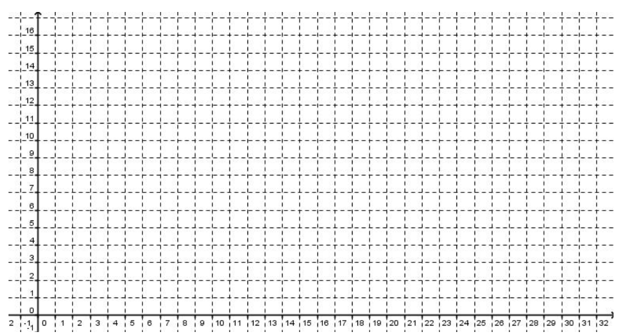
$\frac{60}{5} = \frac{517}{x}$

$60x = 517(5)$

$x = \frac{517(5)}{60}$

$x = 43.08$

Con los valores de la tabla construye la grafica



Ejemplo 2:

Un tanque que va a 40 km por hora, sale de un punto O a las 7:00 am. Construir una gráfica que permita hallar a que distancia se encuentra del punto de partida en cualquier momento y a que hora llegara al punto P situado a 140 km de O.

t	x_1 0	1	2	x_2 3	?	4
d	0 y_1	40	80	120 y_2	140	160

Variable Independiente= tiempo (t)

Variable Dependiente = distancia (d)

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = 3 - 0$

$\Delta x = 3$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta y = 120 - 0$

$\Delta y = 120$

m=$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

m=$\frac{120}{3}$

m=40

Expresión:

$$\begin{array}{ccc} \text{y} & =\text{k} & \text{x} \\ \\ \text{VD} & =\text{k} & \text{VI} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{d} & =40 & \text{t} \end{array}$$

$\frac{1}{40} = \frac{x}{140}$

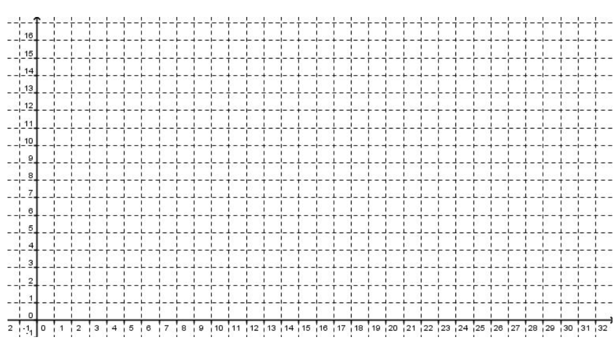
$1(140) = x(40)$

$x = \frac{1(140)}{40}$

$x = 3.5$

R: Llega al punto P después de 3.5 horas de salir a las 10:30 am.

Con los valores de la tabla construye la gráfica



Ejercicios 2.4: Resuelve los siguientes problemas

1. Sabiendo que 5m de tela cuestan \$6. Hallar gráficamente cuánto cuestan 8m, 9m 12m y cuántos metros se pueden comprar con \$20.

    a) Elabora la tabla

    b) La variable independiente es:

    c) La variable dependiente es:

    d) Determina el valor de $\triangle x =$

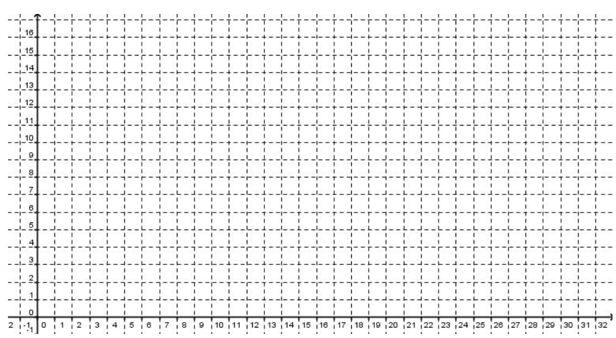
    e) Determina el valor de $\triangle y =$

    f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

    g) Determina el valor de la pendiente

    h) Indica la expresión que le corresponde.

    i) Construye la gráfica



2. Una persona borda 75 gr. de hilo por cada metro cuadrado de bordado. ¿Cuántos gramos de hilo necesita para bordar $2m^2$, $5m^2$, $8m^2$

   a) Elabora la tabla
   b) La variable independiente es:

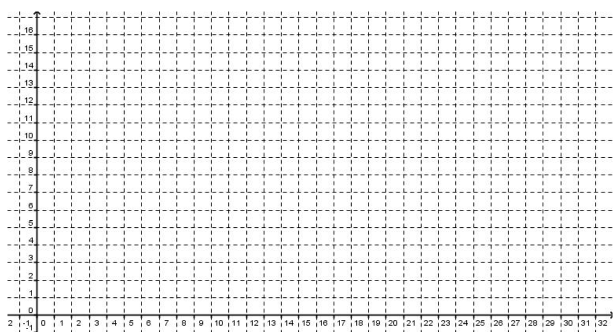
   c) La variable dependiente es:

   d) Determina el valor de $\triangle x =$

   e) Determina el valor de $\triangle y =$

   f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

   g) Determina el valor de la pendiente
   h) Indica la expresión que le corresponde.
   i) Construye la gráfica



3. Un metro de tela cuesta \$3.50 ¿Cuánto pagaras por: 2m, 3m,4m, 4.5m, 5m, 5.5m, 6m?

a) Elabora la tabla

b) La variable independiente es:

c) La variable dependiente es:

d) Determina el valor de $\triangle x =$

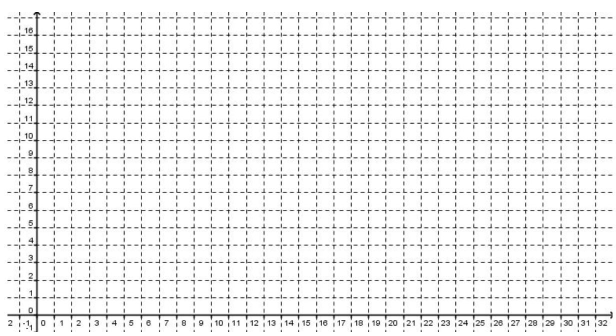
e) Determina el valor de $\triangle y =$

f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

g) Determina el valor de la pendiente

h) Indica la expresión que le corresponde.

i) Construye la gráfica



4. En determinado momento la longitud de una sombra es directamente proporcional a la altura del objeto que la produce. Si un edificio de 14m de altura proyecta una sombra de 1.2m de largo. ¿Cual es la altura de un poste cuya sombra es de 0.35m?

   a) Elabora la tabla

   b) La variable independiente es:

   c) La variable dependiente es

   d) Determina el valor de $\triangle x =$

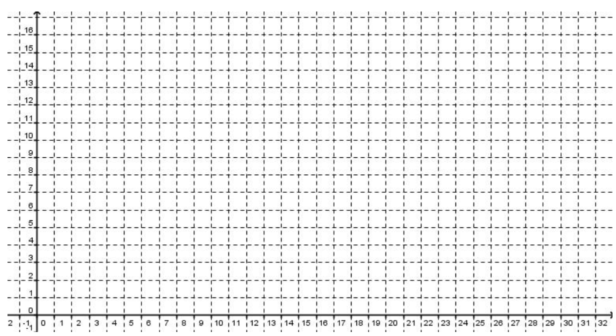
   e) Determina el valor de $\triangle y =$

   f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

   g) Determina el valor de la pendiente

   h) Indica la expresión que le corresponde.

   i) Construye la gráfica



5. Un avión en condiciones normales de vuelo, gasta 8 toneladas de combustible volando una distancia de $200km$, ¿cuantas toneladas gastaría volando en las mismas condiciones si recorriera una distancia de $1750km$

   a) Elabora la tabla

   b) La variable independiente es:

   c) La variable dependiente es:

   d) Determina el valor de $\triangle x =$

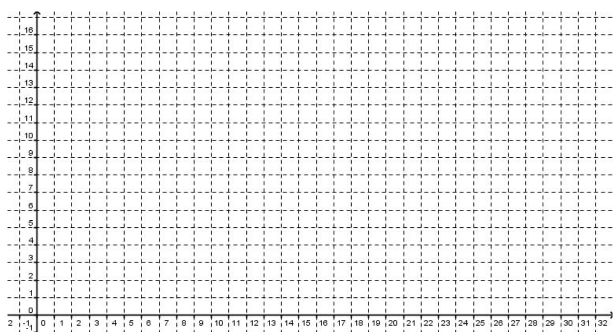
   e) Determina el valor de $\triangle y =$

   f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

   g) Determina el valor de la pendiente

   h) Indica la expresión que le corresponde.

   i) Construye la gráfica



6. El corazón de un hombre adulto, en condiciones normales, bombea 5 litros de sangre por minuto, ¿en que tiempo bombeara 72 litros de sangre?

    a) Elabora la tabla

    b) La variable independiente es:

    c) La variable dependiente es:

    d) Determina el valor de $\triangle x =$

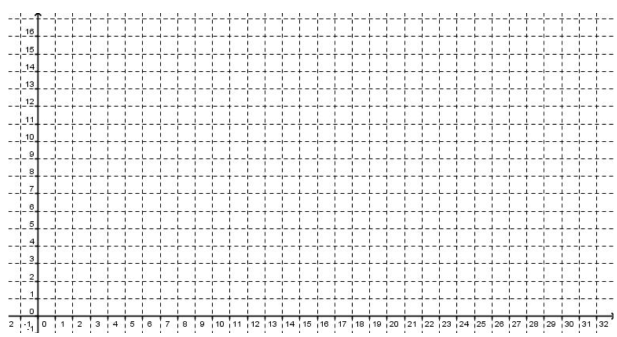
    e) Determina el valor de $\triangle y =$

    f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

    g) Determina el valor de la pendiente

    h) Indica la expresión que le corresponde.

    i) Construye la gráfica



7. Para pintar $1m^2$ de una pared se requieren $100ml$ de pintura ¿que cantidad de pintura se requiere para pintar 8, 10.4, 15, $23.25m^2$?.

   a) Elabora la tabla

   b) La variable independiente es:

   c) La variable dependiente es:

   d) Determina el valor de $\triangle x =$

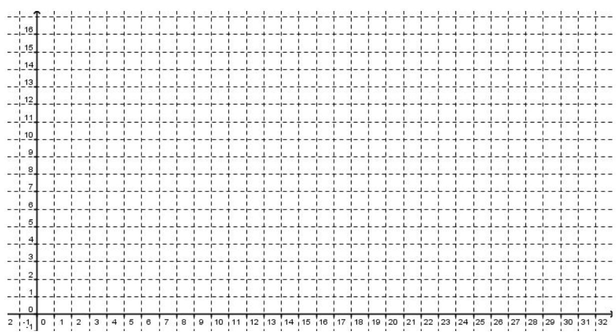
   e) Determina el valor de $\triangle y =$

   f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

   g) Determina el valor de la función

   h) Indica si es directamente proporcional o no.

   i) Construye la gráfica



8. Si un automóvil tiene una velocidad constante de $85.35km$ por hora, ¿que distancia habrá recorrido después de 5, 7.6, 8.2 horas?

    a) Elabora la tabla

    b) La variable independiente es:

    c) La variable dependiente es:

    d) Determina el valor de $\triangle x =$

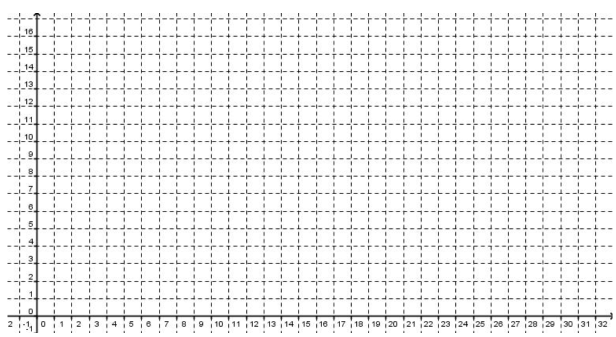
    e) Determina el valor de $\triangle y =$

    f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

    g) Determina el valor de la función

    h) Indica si es directamente proporcional o no.

    i) Construye la gráfica



9. Si por un litro de gasolina magna se paga la cantidad de \$17.72, cuánto pagaras por 55 litros, 80 litros, y 120 litros. ¿Cuántos litros de gasolina obtienes por \$200 ?

a) Variable independiente =

b) Variable dependiente=

c) Elabora la tabla

d) Determina el valor de $\triangle x =$

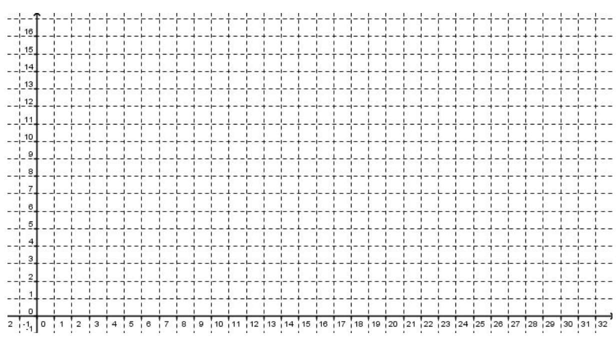
e) Determina el valor de $\triangle y =$

f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

g) Determina la ordenada al origen

h) Determina la expresión que representa el problema

i) Traza la grafica



2.4. Función lineal en dos variables

El modelo que representa una función lineal en dos variables es:

$y = mx + b$

Con y como variable dependiente y x como variable independiente.

Donde m representa a la pendiente de la recta, que es la la razón entre el incremento de la variable dependiente y la variable independiente.

Pendiente = m = $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

Además b representa a la ordenada al origen, que es el punto donde la línea recta corta al eje de las ordenadas " y".

Ejemplo 1:

Una agencia de renta de automóviles cobra \$3.50 por cada kilómetro recorrido más \$200 por la renta del automóvil. Encuentra el modelo algebraico que represente el cobro por kilómetros recorridos. ¿Cuánto pagaron las personas que recorrieron 40km, 50km, 120km,130km y 200km?

a) Elabora la tabla

b) La variable independiente es:

c) La variable dependiente es:

d) Determina el valor de $\triangle x =$

e) Determina el valor de $\triangle y =$

f) Determina el valor de la pendiente m= $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ =

g) Determina el valor de la ordenada al origen $b =$

h) Determina la expresión que representa la función

i) Construye la gráfica

Identificamos las variables del problema

Variable Independiente = distancia (d)

Variable Dependiente = Precio (P)

Para elaborar la tabla definimos los valores de 10 en 10, empezando en el cero hasta el 50 y colocamos los valores 120,130 y 200 para despejarlos y completar con ello las preguntas.

d	0	10	20	30	40	50	120	130	200
P									

Al rentar el automóvil como deposito inicial se deben pagar \$ 200 , es decir que a los 0km pago \$200

Al pago inicial le agregamos el costo por kilómetro recorrido, para eso es necesario que despejemos cuánto pagaríamos por recorrer 10km, para completar la tabla de 10 en 10.

Resolvemos la regla:

$\frac{1}{3.5} = \frac{10}{x}$

$1(x) = 10(3.5)$

$x = 35$

Lo que significa que por cada 10km se deben pagar \$35 más al valor anterior, por lo que tabla seria la siguiente

d	0	10	20	30	40	50	120	130	200
P	200	235	270	305	340	375			

Completamos los demás valores despejando las expresiones que les correspondan

Para x=120

$\frac{1}{3.5} = \frac{120}{x}$

$1(x) = 120(3.5)$

$x = 420$

Para x= 130

$\frac{1}{3.5} = \frac{130}{x}$

$1(x) = 130(3.5)$

$x = 455$

Para x=200

$\frac{1}{3.5} = \frac{200}{x}$

$1(x) = 200(3.5)$

$x = 700$

La tabla completa es:

d	0	10	x_1 20	x_2 30	40	50	120	130	200
P	200	235	270 y_1	305 y_2	340	375	620	655	900

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = 30 - 20$

$\Delta x = 10$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta y = 305 - 270$

$\Delta y = 35$

Pendiente m=$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{35}{10}$

$m = 3.5$

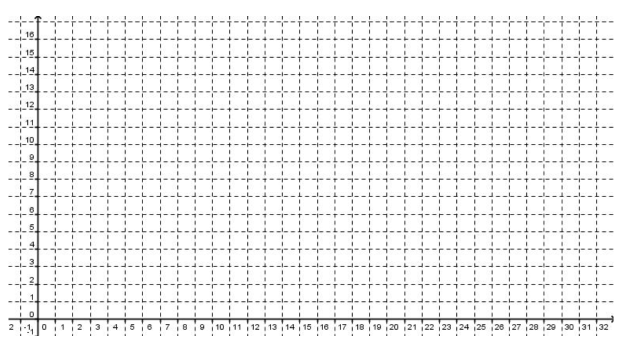
Para determinar el valor de b, observamos que en la tabla el valor de la función cuando llevo 0 km es \$200, así que b=200

La expresión debe cumplir ser del modelo: $y = mx + b$

Al sustituir la variable independiente por d, la variable dependiente por P, m con 3.5 y la b la reemplazamos con 200

La expresión que le corresponde es P=3.5d+200

Al construir la gráfica se obtiene:



Ejercicio 2.5 En los siguientes problemas realiza lo que se te pide.

1. El salario de un vendedor de vajillas es de \$350 a la semana, más una comisión de \$50 por cada vajilla que vende. El sueldo del vendedor se integra con el salario más la comisión. Determina:

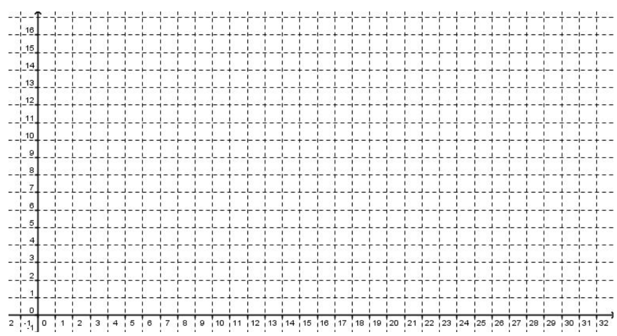
a) El modelo algebraico que representa la cantidad que recibe de sueldo por x vajillas vendidas a la semana.

b) Cuánto le pagaran si vende en una semana: 1, 2, 3, 4, 5, 10 vajillas.

c) Construye la gráfica que representa la situación

d) La pendiente es:

e) El valor de la ordenada al origen es:



2. El viaje directo en avión de la ciudad de México a Madrid España se realiza en 10 horas de vuelo con un consumo de 4500 litros de turbosina por hora. Antes de partir el avión se carga con 46000 litros de este combustible.

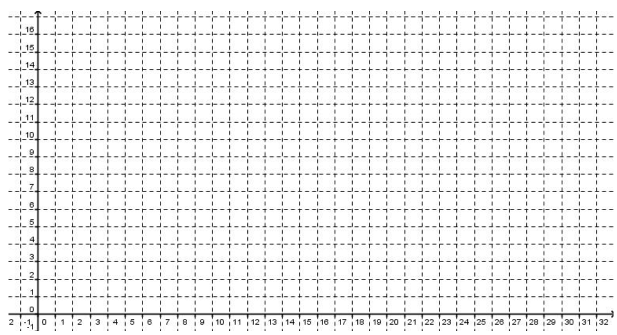
a) Escribe el modelo matemático que representa la cantidad de combustible que queda en el avión después de volar x horas.

b) Elabora la tabla

c) Construye una gráfica que represente los datos de la tabla.

d) Determina la pendiente de la recta.

e) Determina el valor de la ordenada al origen.



3. Si al tomar un taxi pagas \$8.74 de banderazo y \$1.07 por cada minuto que dure el recorrido. ¿Cuánto pagaras si el recorrido dura 15 minutos, 28 minutos, 40 minutos?, ¿Si pagaste al descender \$36 cuánto tiempo duro el viaje ?

a) Variable independiente =

b) Variable dependiente=

c) Elabora la tabla

d) Determina el valor de $\triangle x =$

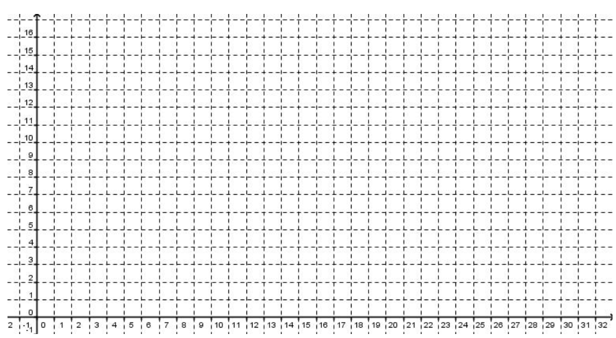
e) Determina el valor de $\triangle y =$

f) Determina el valor de $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} =$

g) Determina la ordenada al origen

h) Determina la expresión que representa el problema

i) Traza la grafica



2.5. Análisis de los parámetros m y b en el comportamiento de la gráfica en el mismo plano.

Un método que permite graficar rectas de una manera simple, se basa en el postulado geométrico de la recta que dice:

"Por dos puntos pasa una recta y solo una"
Es decir, si se conocen dos puntos que pertenecen a la recta, es posible trazar una recta.

Ejemplo 1: Gráfica en el mismo plano.

$y = 2x + 3$
$y = 2x$
$y = 2x - 5$

Tabulamos valores en este caso -2, -1, 0, 1, 2, en cada recta de la siguiente forma:

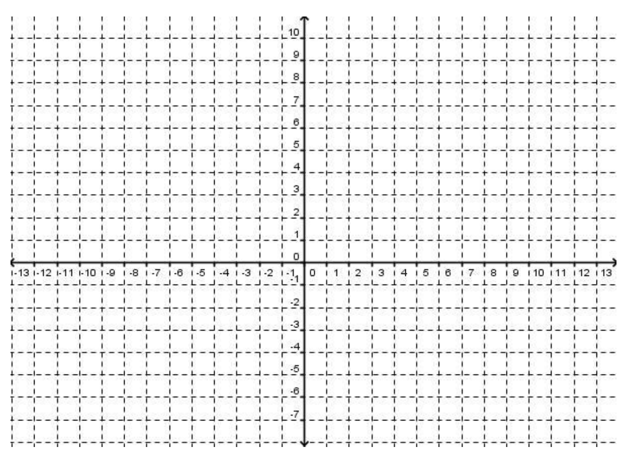
x	$y = 2x + 3$
-2	$2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$
-1	$2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$
0	$2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$
1	$2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$
2	$2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$

.

x	$y = 2x$
-2	$2(-2) = -4$
-1	$2(-1) = -2$
0	$2(0) = 0$
1	$2(1) = 2$
2	$2(2) = 4$

Graficamos las rectas, cada una de diferente color.

x	$y = 2x - 5$

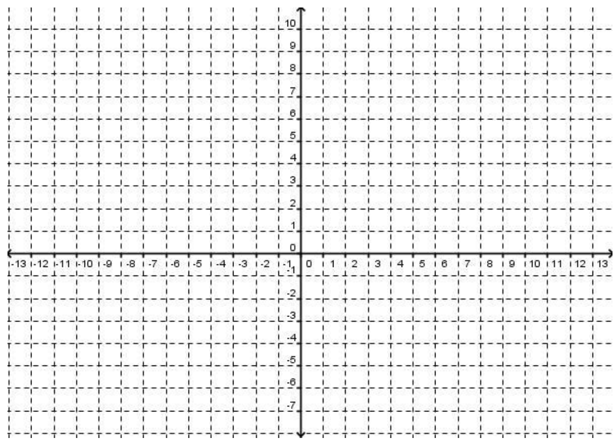


Ejercicio 2.6: Trazar las gráficas de las siguientes rectas en el mismo plano, indica cual es la pendiente $m =$ y la ordenada al origen $b =$ de cada una de las rectas

a)$y = 3x$

$y = 3x + 1$

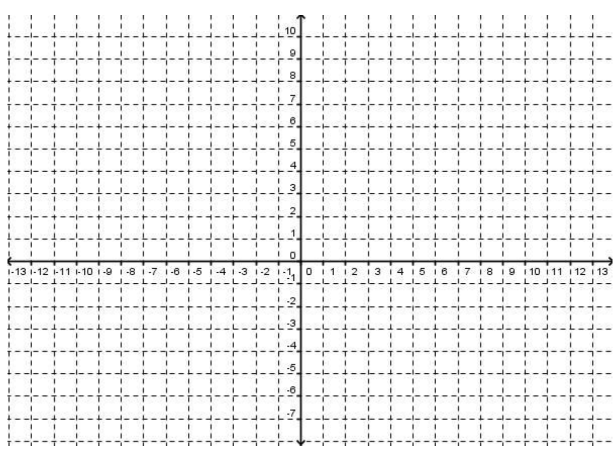
$y = 3x - 5$



b)$y = 5x$

$y = 5x + 7$

$y = 5x - 3$

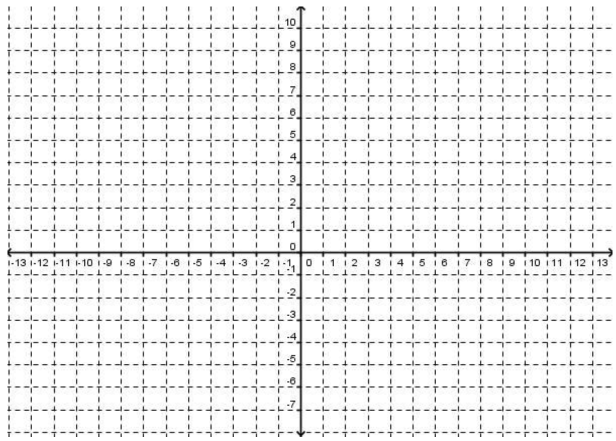


c)$y = \frac{2}{3}x$-1

$y = \frac{2}{3}x + 5$

$y = \frac{2}{3}x - 3$

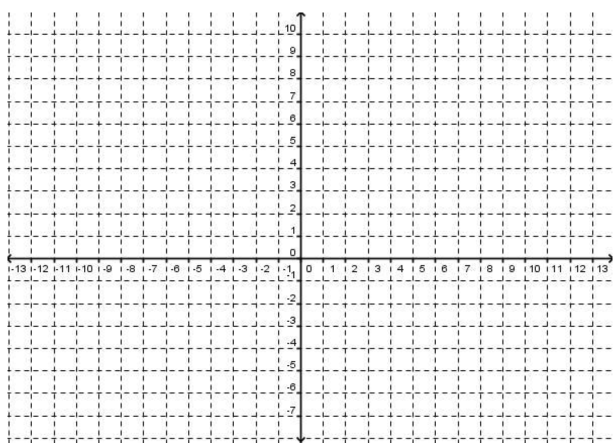
$y = \frac{2}{3}x$



d)$y = \frac{1}{4}x$

$y = \frac{1}{4}x + 3$

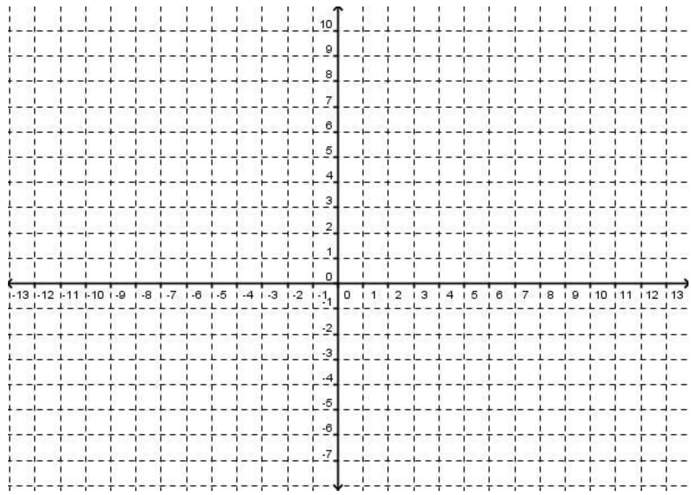
$y = \frac{1}{4}x - 3$



e)$y = \frac{5}{3}x$

$y = \frac{5}{3}x - 2$

$y = \frac{5}{3}x + 3$



Ejercicio 2.7 Completa la siguiente tabla.

Ecuación	Pendiente	Ordenada al origen
$y = 5x - 3$		
$y = 4x + 5$		
$y = 3x + 5$		
$y = 2x + 3$		
$y = 3x + 2$		
$y = \frac{7}{5}x + 2$		
$y = \frac{2}{7}x - 5$		
$y = \frac{3}{5}x + 2$		
$y = \frac{2}{3}x - 5$		
$y = \frac{5}{4}x + 2$		
$y = \frac{2}{3}x + 1$		
$y = x$		
$y = -\frac{1}{5}x - 4$		
$y = -4x - \frac{1}{5}$		
$y = -\frac{1}{3}x - 5$		
$y = -4x - \frac{1}{3}$		
$y = -\frac{1}{3}x - 4$		
$y = 5$		

2.6. Verificación de la pertenencia de puntos en una recta

Para comprobar si un punto pertenece a una recta se sustituye el valor de x del punto dado en la función para comprobar que se obtiene el valor de y del mismo punto

Ejemplo 1: Verifica si $A(-1,-8)$ pertenece a la recta $y = 5x - 3$

Sustituimos $x = -1$ en:

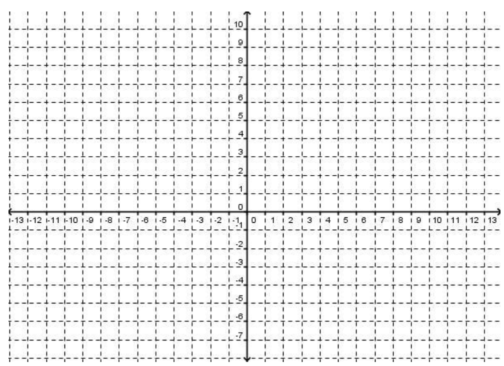
$y = 5x - 3$

$y = 5(-1) - 3$

$y = -5 - 3$

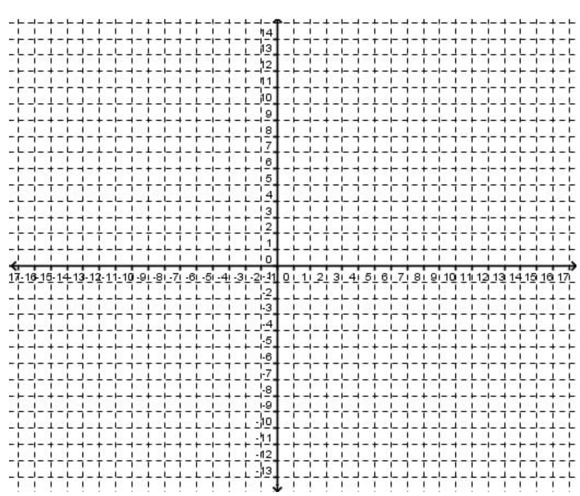
$y = -8$

Que es el mismo valor que el de la coordenada de y en el punto, por lo tanto el punto A si pertenece a la recta.

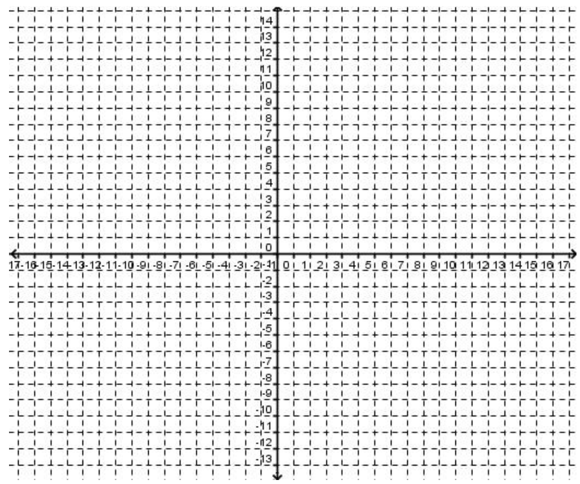


Ejercicios 2.8: En cada inciso indica si pertenece o no el punto a la recta dada y traza la gráfica.

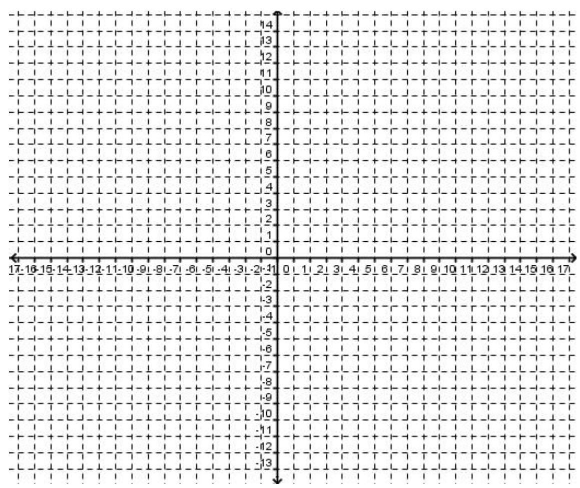
a) Verifica si $B(3,2)$ pertenece a la recta $y = -2x + 7$



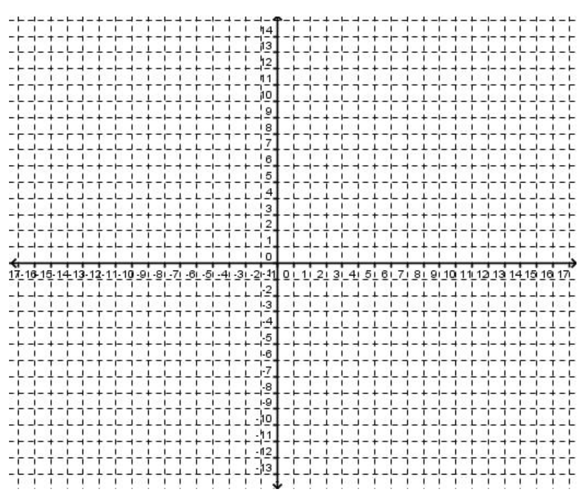
b) Verifica si $A(-2,-3)$ pertenece a la recta $y = 4x + 5$



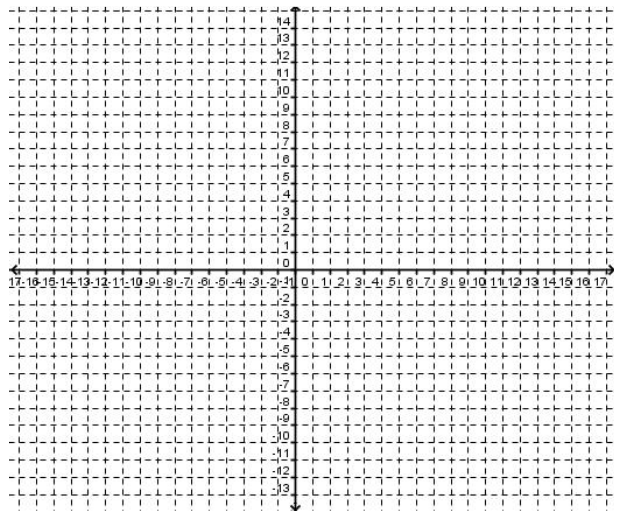
c) Verifica si $P(-1,5)$ pertenece a la recta $y = -3x - 8$



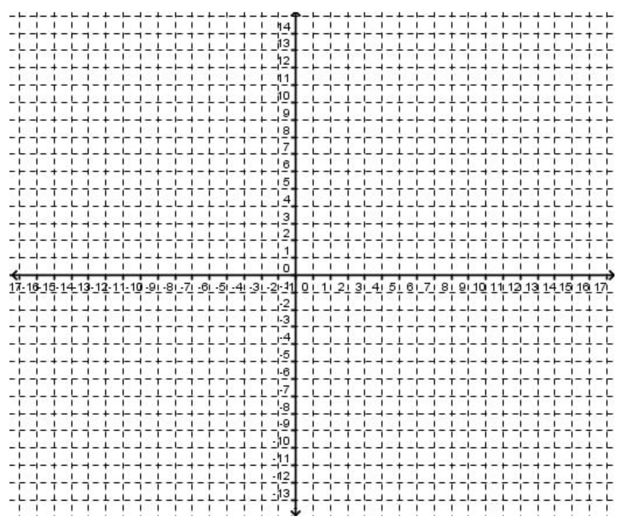
d) Verifica si $C(4,1)$ pertenece a la recta $y = \frac{3}{4}x - 2$



e) Verifica si $Q(2,3)$ pertenece a la recta $y = -5x + 6$



f) Verifica si $T(5,-5)$ pertenece a la recta $y = -\frac{6}{5}x + 1$



Capítulo 3

Unidad 3 - Ecuaciones de primer grado con una incognita

3.1. Solución de ecuaciones lineales

Definición: Una ecuación algebraica es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. A la expresión que esta a la izquierda del signo igual, se le denomina primer término de la ecuación y a la que parece a la derecha se le llama segundo término de la ecuación.

En las ecuaciones algebraicas existen cantidades conocidas y cantidades desconocidas o incógnitas. Las ecuaciones se clasifican de acuerdo al mayor exponente que tengan las incógnitas y del número de incógnitas que aparezcan en la ecuación, por ejemplo:

a)$5x - 7 = 3x + 11$ ecuación de primer grado con una incógnita o ecuación lineal.

b)$2x^2 + 12 = 7x$ ecuación de segundo grado con una incógnita.

c) $x - 3y = 7$ ecuación de primer grado con dos incógnitas.

d)$3x^3 - 4x^2 + 2x - 5 = 0$ ecuación de tercer grado con una incógnita.

Existen ecuaciones en las que cualquier valor que les asigne a las incógnitas se cumplirá que ambos miembros sean iguales. Por ejemplo:

a) $5x + 7 = \frac{15x+21}{3}$

b) $4(x - y) = 4x - 4y$

La ecuación es una igualdad en la cual ambos miembros son iguales solamente para ciertos valores particulares de las incógnitas.

Se dice que resolver una ecuación, es encontrar los valores que satisfacen la igualdad, a estos valores se les llama soluciones o raíces de la ecuación. Resolver ecuaciones lineales con una incógnita, consiste en determinar el valor de ola variable o incógnita.

Para obtener la solución de las ecuaciones se aplican las siguientes propiedades de las igualdades:

a) Si se suma o se resta la misma cantidad a ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.

b) Si ambos miembros de una igualdad se multiplican o se dividen por la misma constante, que no sea cero, la igualdad persiste.

Forma $ax = b$

Ejemplo 1:

$2x = 8$

Se dividen ambos miembros entre 2

$\frac{2}{2}x = \frac{8}{2}$

Simplificando tenemos

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

Comprobación:

$2x = 8$

$2(4) = 8$

$8 = 8$

Forma $ax + b = c$

Ejemplo 1:

$7x + 5 = 2$

Sumamos el inverso aditivo de 5 en ambos miembros

$7x + 5 - 5 = 2 - 5$

Simplificando tenemos

$7x = 2 - 5$

$7x = -3$

Dividimos ambos términos entre 7

$\frac{7}{7}x = \frac{-3}{7}$

Simplificamos

$x = \frac{-3}{7}$

Comprobación:

Ejercicios 3.1 Resuelve las siguientes ecuaciones y realiza la comprobación

a) $x + 8 = 4$

b) $x - 4 = 5$

c) $x + 7 = 6$

d) $x - 3 = 6$

e) $x + 2 = 7$

f) $t - 8 = 0$

g) $12 - w = -5$

h)$b + 23 = 51$

i) $-12 + y = -12$

j)$8x = 80$

k)$-5z = -75$

l)$48 = -6a$

m)$2x + 6 = 8$

n)$20 - 4t = -16$

ñ)$6x + 3 = 10$

o) $3x + 5 = -4$

p) $2x + 3 = 7$

q) $5x - 3 = 4$

r) $5x - 2 = 8$

Forma ax+bx+c=d

Ejemplo 1:

$8x - 5x + 15 = -3$

Sumando el inverso aditivo de 15 tenemos:

$8x - 5x + 15 - 15 = -3 - 15$

$8x - 5x = -3 - 15$

Simplificando

$3x = -18$

Dividimos ambos términos entre 3

$\frac{3}{3}x = \frac{-18}{3}$

$x = -6$

Comprobación:

Ejercicio 3.2 Resuelve las siguiente ecuaciones y realiza la comprobación
a) $3x + 12 = x$

b)$13b - 22 = 2b$

c)$-5a - 24 = 3a$

d)$4y - 35 = -3y$

e)$3c = 64 - 5c$

f)$6a + 17 = 2a - 3$

g) $x - 5 = 2x + 7$

h) $4x + 10 = 1 - 2x$

Forma a(x+b)=c(x+d)

Ejemplo 1:

$5(x + 3) = 2(x + 1)$

Comprobación:

Ejemplo 2:

$4(5x + 3) - (x - 7) = 6$

Al aplicar la propiedad distributiva tenemos:

$20x + 12 - x + 7 = 6$

Sumando el inverso aditivo de 12 y 7 en ambos términos.

$20x + 12 - 12 - x + 7 - 7 = 6 - 12 - 7$

Simplificando

$20x - x = 6 - 12 - 7$

$19x = -13$

Dividimos ambos términos entre 19

$\frac{19}{19}x = \frac{-13}{19}$

$x = \frac{-13}{19}$

Comprobación:

Ejercicio 3.3 Resuelve las siguientes ecuaciones y realiza la comprobación.

a) $(a - 14) - 3 = -28$

b)$42 = 8 - (t - 20)$

c) $3x - (2x + 5) = 0$

d) $3(x-1)+5=0$

e)$4(2y+8)=5(3y-2)$

f)$3(3x-11)+7=2(3x-19)-x$

g) $3(x+4)=6(x-1)$

h) $2(x+5) = 6(x-2)$

i)$(-3x+5) - (8-4x) = 16$

j)$6s - (2s-11) = 47$

k)$4x + 1 + 8 - (x+6) = 9$

l)$8y + 7 - 4y = -9$

m) $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$

n) $4x - 7(6x + 2) = 4(5x - 1)$

ñ) $5(x - 1) + 16(2x + 3) = 3(2x - 7) - x$

o) $4(x-2) = 3(x+4) - 2$

p) $3x - (2x-1) = 7x - (3-5x) + (-x+24)$

3.2. Ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios, con una incógnita

Definición: Una ecuación tiene coeficientes fraccionarios cuando alguno de sus términos o todos tienen denominadores.

Por ejemplo: $\frac{x}{2} = 3x - \frac{3}{4}$

Para resolverlas es necesario convertir a la ecuación fraccionaria en una ecuación equivalente entera, es decir, sin denominadores.

Para suprimir los denominadores en una ecuación se multiplican todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores que es equivalente a dividir el mínimo común múltiplo de los denominadores entre cada denominador y multiplicar cada cociente por el numerador respectivo.

Ejemplo 1:

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = 7$

Determinamos el mínimo común múltiplo de 3 y 5, el cual es 15, así que multiplicamos todos los términos por 15.

$(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = 7)15$

Dividiendo 15 entre 3 y multiplicando por su denominador en este caso 1 y después dividiendo al 15 entre 5 y multiplicando por el denominador en este caso 2; finalmente multiplicando también al 7 por 15 tenemos:

$5x + 6 = 105$

$5x = 105 - 6$

$5x = 99$

$x = \frac{99}{5}$

Comprobación:

Ejercicios 3.4 Resuelve las siguientes ecuaciones y realiza la comprobacion

a) $\frac{x}{5} + 2 = 12$

b) $\frac{x}{2} + \frac{3}{2} = 7$

$c)\ c - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$

$d)\ -\frac{4}{7} - z = \frac{3}{7}$

$e)\ \frac{1}{10}x + \frac{7}{5} = \frac{22}{5}$

$f)\ -15 - \frac{3}{5}b = 3$

$g)\ \frac{4}{3}x - 2 = \frac{5}{4}x$

$h)\ \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = 0$

$i)\ \frac{5}{6}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{7}{6}$

$j)\ 3b - 11 = \frac{4}{7}b + 9$

$k)$ $\frac{5}{8}c + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}c$

$l)$ $\frac{1}{5}x + \frac{3}{10}x = 5$

$m)$ $\frac{3}{2}x - \frac{4}{5}x = 2$

$n)$ $\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}x = 3$

ñ) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} = \frac{3}{2}$

o) $\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{5}{4}$

p) $\frac{5}{3}x + \frac{3}{2} = \frac{x}{7}$

Ejemplo 1:

$\frac{3}{5}(x-7) + \frac{7}{4}(x+3) = 0$

Multiplicamos por el mínimo común múltiplo de 5 y 4 en este caso 20

$20(\frac{3}{5}(x-7) + \frac{7}{4}(x+3) = 0)$

$12(x-7) + 35(x+3) = 0$

$12x - 84 + 35x + 105 = 0$

$12x + 35x = -105 + 84$

$47x = -21$

$x = \frac{-21}{47}$

Comprobación:

Ejercicios 3.5 Resuelve las siguientes ecuaciones y realiza la comprobacion

a) $\frac{5}{8}(3x-4)+\frac{7}{5}=\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{7}(2x+1)-\frac{3}{5}(x-2)=1$

$c)$ $\frac{3}{4}(x-1)+\frac{1}{3}(x+4)=-5$

$d)$ $\frac{5}{8}(3x-4)-\frac{2}{5}(x-3)=7$

$e)$ $-\frac{14}{5}a+8=\frac{1}{5}(6a-20)$

Ejemplo 1:

$\frac{x-4}{8} - \frac{5-2x}{3} = 1$

Calculamos el mínimo común múltiplo de 8 y 3, el cual es 24, así que multiplicamos toda la ecuación por 24.

$(\frac{x-4}{8} - \frac{5-2x}{3} = 1)24$

$3(x-4) - 8(5-2x) = 24$

$3x - 12 - 40 + 16x = 24$

$3x + 16x = 24 + 12 + 40$

$19x = 76$

$x = \frac{76}{19}$

$x = 4$

Comprobación:

Ejercicios 3.6 Resuelve las siguientes ecuaciones y realiza la comprobacion

a) $\frac{3x-5}{5} = \frac{8x-7}{2}$

$b)$ $\frac{5x-3}{7} = \frac{2x+4}{3}$

$c)$ $\frac{3x-7}{4} = 9x$

$d)$ $\frac{7x-2}{6} = \frac{9x+10}{3}$

$e)$ $\frac{3x-5}{5} = \frac{8x-7}{2}$

$f)$ $\frac{x-4}{8} - \frac{5-2x}{3} = 1$

$g)$ $\frac{x-5}{2} - \frac{7x+3}{4} = 8$

$h)\ \frac{7x-2}{5} = \frac{3x+2}{3}$

$i)\ \frac{5x-3}{7} = \frac{2x+4}{3}$

$j)\ \frac{x+4}{3} + \frac{2x-3}{4} = 7$

$k)$ $\frac{x-4}{4} + \frac{x-12}{6} = \frac{x}{3}$

Ejemplo 1:

$\frac{x+10}{x-2} = \frac{x+5}{x+4}$

Al determinar el mínimo común múltiplo de $(x-2)$ y $(x+4)$ es el producto de ambos $(x-2)(x+4)$ y estos se multiplican por ambos miembros de la igualdad

$(x-2)(x+4)\frac{x+10}{x-2} = (x-2)(x+4)\frac{x+5}{x+4}$

Al simplificar tenemos

$(x+10)(x+4) = (x+5)(x-2)$

Desarrollando los productos

$x^2 + 4x + 10x + 40 = x^2 - 2x + 5x - 10$

$x^2 + 4x + 10x - x^2 + 2x - 5x = -10 - 40$

$11x = -50$

$x = \frac{-50}{11}$

Comprobación:

Ejercicio 3.7 Resuelve las siguientes ecuaciones y realiza la comprobación.

a) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{x-5}{x-3}$

b) $\frac{x+4}{x-3} = \frac{x-5}{x+1}$

c) $\frac{4x-7}{2x+1} = \frac{2x-6}{x+3}$

d) $\frac{5x+8}{3x+4} = \frac{5x+2}{3x-4}$

e) $\frac{2x+7}{5x+2} = \frac{2x-1}{5x-4}$

BINGO: Elige números del 1 al 15 y sin repetir números, colócalos en las celdas del tablero, resuelve las ecuaciones que se te indiquen y recuerda gritar BINGO cuando completes tu tablero.

3.3. Uso del lenguaje algebraico

A continuación se verán problemas que están planteándose un lenguaje común y se transformaran a un lenguaje algebraico. Se debe aclarar que no existe un procedimiento que se aplique siempre para realizar esta transformación.

Sin embargo las siguientes sugerencias te ayudaran para facilitar la transformación:

a) Lee detenidamente el problema, con el fin de analizar la información dada y entender que es lo que se desea obtener.

b) Identifica los datos (cantidades conocidas) y la o las incógnitas (cantidades desconocidas), así como las relaciones entre los datos y las incógnitas,

c)Separa cada una de las partes del problema, y a cada una de las incógnitas se pueden nombrar con las letras, comúnmente se emplean (u,w,x,y,z).

d) En relación a las condiciones del problema se expresa la igualdad correspondiente, que es el modelo matemático requerido, a este modelo matemático se les conoce como ecuación de primer grado con una incógnita.

Ejemplo 1: La suma de tres números consecutivos es 45, encuentra los números.

Tomamos x, $x+1$, $x+2$ como los número consecutivos del problema.

Al sumar los números el resultado debe ser 45, el planteamiento que corresponde al problema es:

$x+x+1+x+2=45$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$x+x+x=45-1-2$

$3x=42$

$x=\frac{42}{3}$

$x=14$

Como los números consecutivos son x, x+1 y x+2 al sustituir x=14 tenemos:

$x=14$

$x+1=14+1=15$

$x+2=14+2=16$

Los números consecutivos que resuelven el problema son: 14, 15 y 16

Comprobación:
$14 + 15 + 16 = 45$

$45 = 45$

Ejercicio 3.8 Resuelve los siguientes problemas y realiza la comprobacion

1. La suma de dos números enteros consecutivos es 13. Encuentra los números.

2. Encuentra dos números enteros consecutivos cuya suma sea 307.

3. La suma de tres números enteros consecutivos es 75. Encuentra los números

4. Tres números enteros consecutivos suman 204. Hallar los números.

5. Tres números enteros consecutivos suman 186. Hallar los números.

6. Tres números enteros consecutivos suman sea 39. Hallar los números.

Ejemplo 1: La edad de María es el triple de la de Rosa. Si ambas edades suman 48 años que edad tiene cada una.

Representamos con literales a cada una, en este caso:

$Maria = M$ y $Rosa = R$

La edad de María es el triple de la de Rosa, significa que María tiene tres veces la edad de Rosa, lo representamos con:

$M = 3R$

Si ambas edades suman 48 años, lo que significa es que debemos sumar las edades y el resultado debe ser 48.

$M + R = 48$

Al sustituir M en la ecuación anterior, para tener solo una incógnita tenemos

$3R + R = 48$

$4R = 48$

$R = \frac{48}{4}$

$R = 12$

Lo que quiere decir que Rosa tiene 12 años. Para obtener la edad de María sustituimos R en:

$M = 3R$

$M = 3(12)$

$M = 36$

La edad de Rosa es 12 años y la de María 36.

Comprobación:

$M + R = 48$

$36 + 12 = 48$

$48 = 48$

Ejercicio 3.9 Resuelve los siguientes problemas y realiza la comprobacion

1. Eduardo trabajo 9 horas más que Diego. Si entre los dos trabajaron 35 horas. ¿Cuantas horas trabajo cada uno?

2. La edad de un padre excede en cuatro años al triple de su hijo, si la suma de las edades es 48 años. ¿Cual es la edad de cada uno?

3. María tiene el doble de años que Pedro, más 3. Si la edad de María menos la edad de Pedro es igual a 10. ¿Cuántos años tiene cada uno?

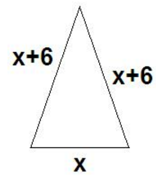
4. Pilar tiene $\frac{2}{3}$ de la edad de Lupe. Si la suma de sus edades es 30.¿Que edad tiene cada una?

5. Un grupo de 60 alumnos esta separado en dos grupos. El grupo que toma clases de artes plásticas es 4 veces el tamaño del que toma clases de música. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

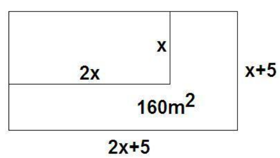
6. La edad de Nicolás es $\frac{1}{3}$ de la edad de Juan. Si la suma de las edades de ambos es 32.¿Que edad tiene cada uno?

7. Ana tiene el triple de la edad de Juan, Roberto tiene 10 años menos que Juan. La suma de las edades de los tres es 70 años. ¿Que edad tiene cada uno?

8. En un triángulo isósceles cada uno de los lados iguales mide 6cm más que la base. El perímetro del triángulo mide 48cm. Encuentra la longitud de cada lado del triángulo.



Ejemplo 1: Una de las dimensiones de una sala rectangular es el doble de la otra. Si cada dimensión se aumenta en 5m el área se aumentara en $160m^2$. Hallar las dimensiones de la sala.



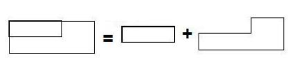
Al asignar una variable al ancho del rectángulo es x y como el largo es el doble del ancho es $2x$

Ancho=x y Largo=$2x$

Al aumentar 5m a cada lado

Ancho=$x+5$ y Largo=$2x+5$

Al calcular el área del rectángulo tenemos



$(2x+5)(x+5) = x(2x) + 160$

Desarrollando los productos

$2x^2 + 10x + 5x + 25 = 2x^2 + 160$

$2x^2 + 10x + 5x - 2x^2 = 160 - 25$

$15x = 135$

$x = \frac{135}{15}$

$x = 9$

Al sustituir x en las medidas de ancho y largo tenemos

$$\begin{aligned} \text{Ancho} &= x \\ \text{Ancho} &= 9\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Largo} &= 2x \\ &= 2(9) \\ \text{Largo} &= 18\text{m} \end{aligned}$$

Comprobación:

$(x + 5)(2x + 5) = x(2x) + 160$

$(9 + 5)(2(9) + 5) = 9(2(9)) + 160$

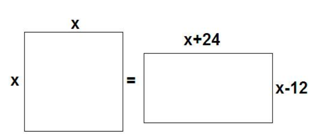
$(14)(18 + 5) = 9(18) + 160$

$(14)(23) = 162 + 160$

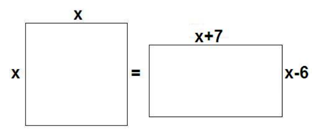
$322 = 322$

Ejercicio 3.10 Resuelve los siguientes problemas y realiza la comprobación

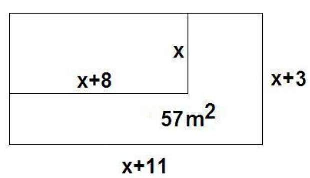
1. La longitud de un rectángulo excede en 24 m al lado del cuadrado equivalente al rectángulo y su ancho es 12m menos que el lado de dicho cuadrado. Hallar las dimensiones del rectángulo.



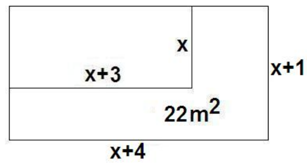
2. La longitud de un rectángulo es 7m mayor y su ancho 6m menor que el lado del cuadrado equivalente al rectángulo. Hallar las dimensiones del rectángulo.



3. La longitud de un rectángulo excede al ancho en $8m$. Si cada dimensión se aumenta en $3m$, el área se aumentaría en $57m^2$. Hallar las dimensiones del rectángulo original.



4. La longitud de un rectángulo excede al ancho en 3m. Si cada dimensión se aumenta en 1m la superficie se aumenta $22m^2$. Hallar las dimensiones del rectángulo.



Ejemplo 2: En cuatro días un hombre recorrió 120km. Si cada día recorrió 1/3 de lo que recorrió el día anterior. ¿Cuántos km recorrió en cada día?

Primer día + Segundo día + Tercer día + Cuarto día =120

Primer día $= x$

Segundo día $= \frac{1}{3}x$

Tercer día $= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)$

Cuarto día $= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)\Big)$

$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)\Big) = 120$

$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x = 120$

Para eliminar los denominadores multiplicamos por el mínimo común múltiplo de 3, 9 y 27, en este caso 27.

$27\Big(x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x = 120\Big)$

$27x + 9x + 3x + x = 3240$

$40x = 3240$

$x = \frac{3240}{40}$

$x = 81$ km

Al sustituir en los días del recorrido, para saber cuántos kilómetros recorrió en cada uno tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Primer día} &= x \\
\text{Primer día} &= 81 \text{ km} \\
\\
\text{Segundo día} &= \tfrac{1}{3}x \\
&= \tfrac{1}{3}(81) \\
&= \tfrac{81}{3} \\
\text{Segundo día} &= 27 \text{ km} \\
\\
\text{Tercer día} &= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}x\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}(81)\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{81}{3}\right) \\
&= \tfrac{81}{9} \\
\text{Tercer día} &= 9 \text{ km} \\
\\
\text{Cuarto día} &= \tfrac{1}{3}\Bigg(\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}x\right)\Bigg) \\
&= \tfrac{1}{3}\Bigg(\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}(81)\right)\Bigg) \\
&= \tfrac{1}{3}\Bigg(\tfrac{1}{3}(27)\Bigg) \\
&= \tfrac{1}{3}\Bigg(9\Bigg) \\
\text{Cuarto día} &= 3 \text{ km}
\end{aligned}$$

Comprobación:

$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{3}\Bigg(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)\Bigg) = 120$

$81 + \frac{1}{3}(81) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(81)\right) + \frac{1}{3}\Bigg(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(81)\right)\Bigg) = 120$

$81 + \frac{81}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{81}{3}\right) + \frac{1}{3}\Bigg(\frac{1}{3}\left(\frac{81}{3}\right)\Bigg) = 120$

$81 + 27 + \frac{81}{9} + \frac{1}{3}\Bigg(\frac{81}{9}\Bigg) = 120$

$81 + 27 + 9 + \frac{81}{27} = 120$

$81 + 27 + 9 + 3 = 120$

$120 = 120$

Ejercicios 3.11 Resuelve los siguientes problemas y realiza la comprobación

1. En tres días un hombre gano $1850 si cada día gano 3/4 de lo que gano el día anterior.¿Cuanto gano cada día?

2. En cuatro semanas un avión recorrió 4641km. Si cada semana recorrió 11/10 de lo que recorrió la semana anterior.¿Cuántos km recorrió en cada semana?

3. Una Herencia de $ 330500 se ha repartido entre 5 personas. La segunda recibe la mitad de lo que recibe la primera, la tercera es 1/4 de lo que recibe la segunda, la cuarta 1/5 de lo que recibe la tercera y la quinta 1/10 de lo que recibe la cuarta.¿Cuanto recibe cada persona?

4. Un hombre viajo $9362km$ en barco tren y avión. Por tren recorrió $\dfrac{4}{9}$ de lo que recorrió en barco y en avión $\dfrac{5}{8}$ de lo que recorrió en tren. ¿Cuántos kilómetros recorrió en cada transporte?

Ejemplo 1:Tenia cierta cantidad de dinero gaste \$20 y preste $\frac{2}{3}$ de lo que me quedaba. Si ahora tengo \$ 100. ¿Cuanto tenia al principio?

El planteamiento del problema es:

Lo que tenia al principio= x

Si preste \$20 me quedo $x - 20$

El prestar $\frac{2}{3}$ de lo que me quedaba= $\frac{2}{3}(x - 20)$

La ecuación que resuelve el problema es:

lo que tenia al principio -\$20-$\frac{2}{3}$ (lo que me quedaba)=100

$x - 20 - \frac{2}{3}(x - 20) = 100$

Para eliminar el denominador se multiplica toda la ecuación por 3

$3(x - 20 - \frac{2}{3}(x - 20) = 100)$

$3x - 60 - 2(x - 20) = 300$

$3x - 60 - 2x + 40 = 300$

$3x - 2x = 300 + 60 - 40$

$x = \$320$

Lo que tenia al principio son \$ 320

Comprobación:

$x - 20 - \frac{2}{3}(x - 20) = 100$

$320 - 20 - \frac{2}{3}(320 - 20) = 100$

$320 - 20 - \frac{2}{3}(300) = 100$

$320 - 20 - \frac{600}{3} = 100$

$320 - 20 - 200 = 100$

$100 = 100$

Ejercicios 3.12 Resuelve los siguientes problemas y realiza la comprobación.

1. Tenia cierta suma de dinero. Si gaste \$300 en libros y los 3/4 de lo que quedaba lo gaste en ropa. Si me quedan \$300¿Cuanto tenia al principio?

2. Después de gastar la mitad de lo que tenia y de prestar la mitad de lo que me quedo tengo \$21 . ¿Cuanto tenia al principio?

3. Camino al mercado una vendedora de aguacates vende $\frac{3}{7}$ de su mercancía; ya en el mercado, vende $\frac{5}{8}$ de lo que le quedaba, y al regresar a la casa lleva 12 aguacates. ¿Con cuántos aguacates salió de la casa?

4. La suma de la tercera parte de un número y la cuarta parte un número, equivale al duplo del número disminuido en 17. Hallar el número.

5. Hallar el número que disminuido en sus $\frac{3}{8}$ partes equivale a su duplo disminuido en 11.

6. Que número hay que restarle al 22 para que la diferencia equivalga a la mitad de 22 aumentada en las $\frac{6}{5}$ partes del número que se resta.

Ejemplo 1: ¿Cuántos litros de agua deben agregarse a 4 litros de una solución salina al 12 % y agua para obtener la solución al 8 %de sal?.

Podemos ayudarnos del siguiente planteamiento para establecer la ecuación

cantidad original	cantidad agregada	cantidad final
4 litros	x litros	x+4 litros
12 % de sal	0 % de sal	8 % de sal

La ecuación es:

$12\,\%(4) + 0\,\%(x) = 8\,\%(x+4)$

Al convertir el porcentaje en fracciones tenemos

$\frac{12}{100}(4) + \frac{0}{100}x = \frac{8}{100}(x+4)$

Multiplicando por 100 para eliminar el denominador

$100\big(\frac{12}{100}(4) + \frac{0}{100}x = \frac{8}{100}(x+4)\big)$

$12(4) + 0(x) = 8(x+4)$

$48 + 0 = 8x + 32$

$8x = 48 - 32$

$8x = 16$

$x = \frac{16}{8}$

$x = 2$

Deben agregarse 2 litros de agua.

Comprobación:

$12\,\%(4) + 0\,\%(x) = 8\,\%(x+4)$

$12\,\%(4) + 0\,\%(2) = 8\,\%(2+4)$

$0.12(4) + 0(2) = 0.08(6)$

$0.48 + 0 = 0.48$

$0.48 = 0.48$

Ejercicios 3.13 Resuelve los siguientes problemas y realiza la comprobación,

1. ¿Cuántos litros de agua deben agregarse a 4 litros de limonada al $6\,\%$ de jugo de limón y agua para producir una solución al $4\,\%$ de jugo de limón?

2. Cuántos galones de agua deben agregarse a 2 galones de una solución salina al $10\,\%$ y agua para producir una solución al $4\,\%$

3. Cuántos litros de una solución de ácido al 30 % deben agregarse a 10 litros de igual solución al 16 % para producir una al 20 %

4. Ramiro mezcla 6kg de una aleación de plata al 30 % con 14kg de la misma aleación. ¿Cual es el porcentaje de plata en la segunda aleación si la mezcla es de 65 % de plata?

5. Se mezcla una aleación de cobre al 48 % con otra al 72 % para producir una aleación de cobre al 57 %. Si hay 20kg más de aleación al 48 % que de la aleación al 72 % ¿Cuántos kg hay en la mezcla total?

6. Un químico mezcla 480g de una solución de yodo al 4 % con 400gr de una solución, al 15 % de la misma sustancia.¿Cual es el porcentaje de yodo en la mezcla?

Ejemplo 1: Hace 3 años, Juanito tenia un sexto de la edad de su papá, y dentro de 11 años, tendrá dos quintos de la correspondiente edad de su papá. ¿Cuales son sus edades actuales?

Representaremos como J la edad de Juanito y P la edad de su papá

	Hace 3 años	Hoy	Dentro de 11 años
Juanito	$J-3=\frac{1}{6}(P-3)$	J	$J+11=\frac{2}{5}(P+11)$
Papá	$P-3$	P	$P+11$

Se obtienen dos ecuaciones $J-3=\frac{1}{6}(P-3)$ y $J+11=\frac{2}{5}(P+11)$

Despejando J de la primera

$J-3=\frac{1}{6}(P-3)$

$J=\frac{1}{6}(P-3)+3$

Al sustituir J en la segunda ecuación se obtiene

$J+11=\frac{2}{5}(P+11)$

$\frac{1}{6}(P-3)+3+11=\frac{2}{5}(P+11)$

Multiplicando por el mínimo común múltiplo de 6 y 5 para eliminar los denominadores, en este caso 30 tenemos

$30\big(\frac{1}{6}(P-3)+3+11=\frac{2}{5}(P+11)\big)$

$5(P-3)+90+330=12(P+11)$

$5P-15+90+330=12P+132$

$5P - 12P = 132 + 15 - 90 - 330$

$-7P = -273$

$P = \frac{-273}{-7}$

$P = 39$

El papá tiene 39 años, sustituimos el valor en la ecuación donde despejamos J.

$J = \frac{1}{6}(P - 3) + 3$

$J = \frac{1}{6}(39 - 3) + 3$

$J = \frac{1}{6}(36) + 3$

$J = \frac{36}{6} + 3$

$J = 6 + 3$

$J = 9$

Juanito tiene 9 años

Comprobación:

$J + 11 = \frac{2}{5}(P + 11)$

$9 + 11 = \frac{2}{5}(39 + 11)$

$9 + 11 = \frac{2}{5}(50)$

$20 = \frac{100}{5}$

$20 = 20$

Ejercicios 3.14 Resuelve los siguientes problemas y realiza la comprobación.

1. David tiene el triple de la edad de Martín, pero dentro de 5 años tendrá el doble. ¿Que edad tiene cada uno?

2. La edad actual de Ricardo es el doble que la de su hijo. Hace 15 años la edad de Ricardo era el triple de la edad de su hijo. Encuentra la edad de Ricardo y la de su hijo.

3. La edad actual de Arturo es la mitad de la de Humberto, y hace 10 años al edad de Arturo era $\frac{3}{7}$ de la edad de Humberto. Hallar las edades actuales.

4. Hace 10 años la edad de Edgar era $\frac{3}{5}$ de la edad que tendrá dentro de 20 años. Hallar la edad actual de Edgar.

Ejemplo 1: Pedro pensó en un número que multiplico por 2, al resultado le sumo 5 para después dividir entre 5, restar 1, multiplicar por 8 y finalmente sumarle 7. El resultado que se obtuvo fue el número 39. ¿Cual es el número que Pedro pensó?

Podemos expresar el problema a partir del lenguaje matemático paso a paso como se muestra en la siguiente tabla:

Lenguaje Común	Lenguaje algebraico
Pedro pensó un número	x
El cual multiplico por 2	$2x$
A cuyo resultado le sumo 5	$2x+5$
Para después dividir entre 5	$\frac{2x+5}{5}$
Restarle 1	$\frac{2x+5}{5}-1$
Multiplicar por 8	$8\big(\frac{2x+5}{5}-1\big)$
Sumarle 7	$8\big(\frac{2x+5}{5}-1\big)+7$
Obteniendo como resultado el número 39	$8\big(\frac{2x+5}{5}-1\big)+7=39$

La ecuación a resolver es $8\big(\frac{2x+5}{5}-1\big)+7=39$

Multiplicando por 8 como se indica en la ecuación tenemos

$8(\frac{2x+5}{5})-8+7=39$

Multiplicamos por 5 para eliminar el denominador

$5\big(8(\frac{2x+5}{5})-8+7=39\big)$

$8(2x+5)-40+35=195$

Desarrollando la multiplicación

$16x+40-40+35=195$

$16x = 195 - 40 + 40 - 35$

$16x = 160$

$x = \frac{160}{16}$

$x = 10$

Ejercicios 3.15 Plantea y resuelve el siguiente problema y realiza la comprobación.

1. Juan pensó un número que multiplico por 4, al resultado le sumo 7, para después dividirlo por 3, sumar el número que pensó, multiplicar por 4 y finalmente restar 6 y obtendrás como resultado el número 78.¿Cual es el número que pensó Juan?

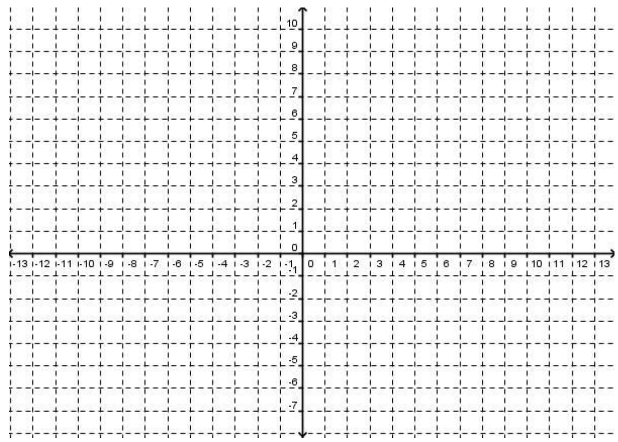
3.4. Solución gráfica de una ecuación lineal

A continuación se relaciona a las ecuaciones de la forma $ax + b = 0$ como casos particulares de la función lineal $y = ax + b$

Ejemplo 1: Dada la función y= 3x +12 hacer una representación gráfica e indicar gráficamente cual es la solución a la ecuación 3x+12=0

Al realizar la tabulación tenemos que:

x	$y = 3x + 12$



Gráficamente se verifica que la solución de la ecuación es x=-4

Al resolver la de manera algebraica tenemos:

$3x + 12 = 0$

$3x = -12$

$x = \frac{-12}{3}$

$x = -4$

Se pueden dar otros valores a la y por ejemplo $y = 3$, se obtiene la siguiente ecuacion

$3x + 12 = 3$

$3x = 3 - 12$

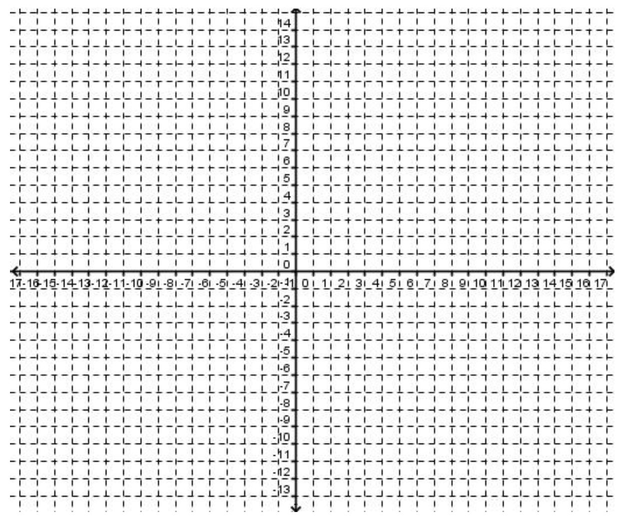
$x = \frac{-9}{3}$

$x = -3$

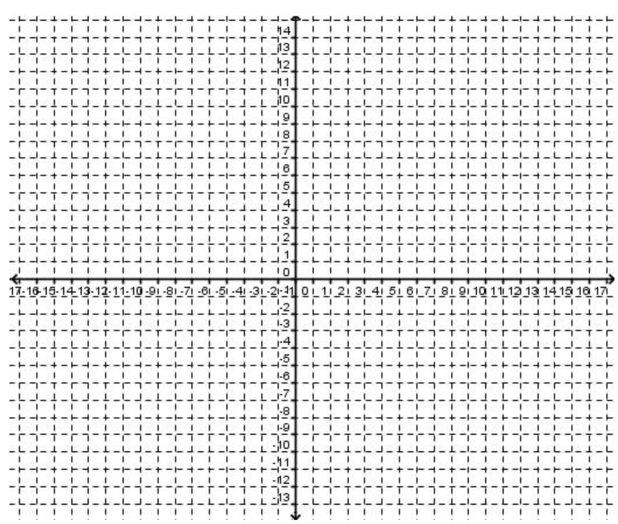
Observa que el punto (-3,3) pertenece a la recta, por lo tanto se concluye que las ecuaciones lineales son casos particulares de las ecuaciones lineales son casos particulares de la función lineal cuando se le asignan valores a la variable y.

Ejercicio 3.16 Elabora la gráfica de cada una de las siguientes funciones e indica la solución de las ecuaciones que se obtiene al sustituir $y = 0$

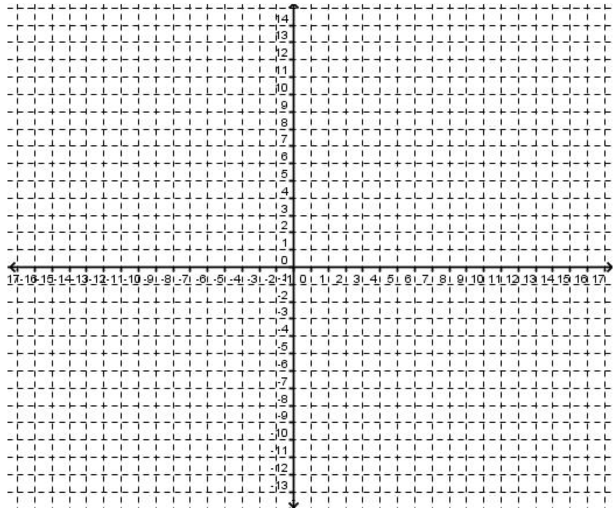
1. $y = 3x - 9$



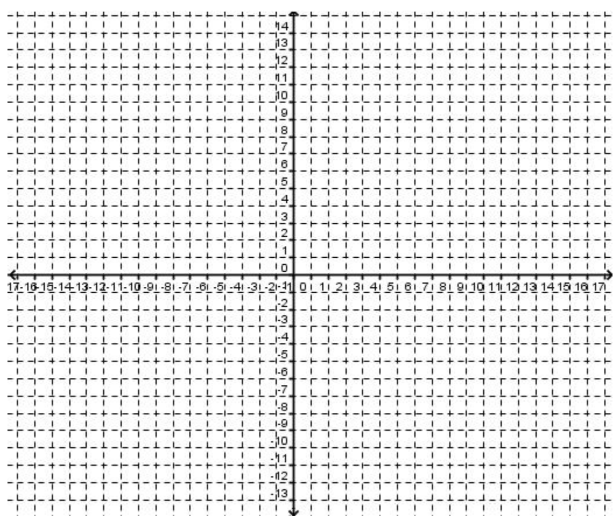
2. $y = 2x + 10$



3. $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$



4. $y = -4x - 11$



Capítulo 4

UNIDAD 4 - SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1. Ecuaciones Simultaneas 2×2

Definición: Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son **simultaneas** cuando se satisfacen para iguales valores de las incógnitas.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{x+y=5} \\ \text{x-y=1} \end{cases}$$

Las ecuaciones son simultaneas porque $x = 3$, $y = 2$ satisfacen ambas ecuaciones.

4.2. Ecuaciones Equivalentes

Definición: Las **ecuaciones equivalentes** son las que se obtienen una de la otra.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{x+y=4} \\ \text{2x+2y=8} \end{cases}$$

Las ecuaciones son equivalentes porque dividiendo entre 2 la segunda ecuación se obtiene la primera.

Las ecuaciones **equivalentes** tienen **infinidad** de soluciones comunes.

Las ecuaciones independientes son las que no se obtienen una de la otra. Cuando las ecuaciones **independientes** tienen **una sola solución** común son simultaneas.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{x+y=5} \\ \text{x-y=1} \end{cases}$$

Las ecuaciones son independientes porque no se obtienen una de la otra y son simultaneas porque el único par de valores que satisface ambas ecuaciones es $x = 3$, $y = 2$.

Las ecuaciones **incompatibles** son ecuaciones independientes que **no tienen solución** común.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{x+2y=10} \\ \text{2x+4y=5} \end{cases}$$

Las ecuaciones son incompatibles porque no hay ningún par de valores de x y y que cumpla ambas ecuaciones.

4.3. Sistemas de Ecuaciones

Definición: Un sistema de ecuaciones es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{2x+3y=13} \\ \text{4x-y=5} \end{cases}$$

El anterior es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

La **solución** de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. La solución del sistema anterior es $x = 2$, $y = 3$.

Un sistema de ecuaciones es **posible o compatible** cuando tiene solución y es **imposible o incompatible** cuando no tiene solución.

Un sistema compatible es **independiente** cuando tiene una sola solución y **dependiente** cuando tiene infinidad de soluciones

Para resolver un sistema de ecuaciones simultaneas es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas una sola ecuación con una incógnita. Esta operación se llama eliminación. Los métodos de eliminación más usuales son: Método de Igualación, Método de Sustitución, Método Gráfico y el Método de Reducción también llamado de Suma- Resta.

4.4. Método de Reducción o de Suma - Resta

Este método implica la transformación de los sistemas de ecuaciones en otros sistemas equivalentes más simples (ejecutados de las operaciones indicadas) hasta que se obtenga un sistema cuya solución sea obvia.

Los **sistemas equivalentes**de ecuaciones son aquellos que tienen exactamente el mismo conjunto solución. El teorema siguiente da una lista de las operaciones que producen sistemas equivalentes.

Teorema de sistemas equivalentes: Dado un sistema de ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente si:

1. Intercambiamos dos ecuaciones.

2. Se multiplica una ecuación por una constante no nula (k). Multiplicando por k cada término en ambos lados de la ecuación.

3. Se suma a una ecuación dada un múltiplo de la otra ecuación. Sumando los términos correspondientes de cada ecuación.

La idea en el método de suma- resta, es multiplicar una de las ecuaciones por una constante distinta de cero, de tal modo que uno de los términos quede como inverso aditivo o simétrico de un término de la otra ecuación, para que al sumar las ecuaciones término a término se elimine una incógnita.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{x+y=5} \\ \text{3x-5y=-1} \end{cases}$$

Para resolver el sistema es necesario multiplicar los coeficientes de **x** cruzando los valores como se indica

$$\begin{cases} \text{3(x+y=5)} \\ \text{1(3x-5y=-1)} \end{cases}$$

Cambiarle el signo a alguno de ellos en este caso al 3

$\searrow$ cambio signo

$$\begin{cases} \text{-3(x+y=5)} \\ \text{1(3x-5y=-1)} \end{cases}$$

Al multiplicar cada término se obtiene

$$\begin{cases} \text{-3x-3y=-15} \\ \text{3x-5y=-1} \end{cases}$$

Al resolver la suma de términos semejantes tenemos

$$\begin{array}{rrr} -3x & -3y = & -15 \\ 3x & -5y = & -1 \\ \hline & -8y = & -16 \end{array}$$

Despejando a y se obtiene:

$-8y = -16$

$y = \frac{-16}{-8}$

Simplificando el resultado

$y = 2$

El valor se sustituye en alguna de las dos ecuaciones originales en este caso en la primera

$x + y = 5$

$x + (2) = 5$

Se despeja el valor de x y se obtiene

$x = 5 - 2$

$x = 3$

La solución del sistema de ecuaciones es $x = 3$, $y = 2$.

Comprobación:

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 5w+3z=-30 \\ 4w-5z=13 \end{cases}$$

Ejercicios 4.1: Resuelve las siguientes ecuaciones por el método suma - resta y realiza la comprobación.

a)

$$\begin{cases} 5x-y=1 \\ 5x+y=1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-2y=-9 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x+4y=-6 \\ 2x-y=7 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} \text{x+y=5} \\ \text{3x-5y=-1} \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} \text{r-s=3} \\ \text{r+2s=18} \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} \text{-2c-d=-84} \\ \text{c+d=42} \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} \text{3a+6b=-3} \\ \text{3a+8b=7} \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} \text{x+y=-2} \\ \text{x+3y=12} \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} \text{-6c+7d=-17} \\ \text{8c-12d=20} \end{cases}$$

j)

$$\begin{cases} \text{5a-4b=8} \\ \text{3a+b=15} \end{cases}$$

k)

$$\begin{cases} \text{3s+2r=42} \\ \text{3s-4r=24} \end{cases}$$

l)

$$\begin{cases} 2w+z=-11 \\ 11w-2z=-38 \end{cases}$$

m)

$$\begin{cases} 4a-6b=-8 \\ -a+3b=-4 \end{cases}$$

n)

$$\begin{cases} 5t\text{-}3w=24 \\ \text{-}4t+3w=\text{-}15 \end{cases}$$

ñ)

$$\begin{cases} 2x\text{-}y=19 \\ \text{-}x+2y=\text{-}5 \end{cases}$$

4.5. Método de Igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones e igualarlas; esto dará como resultado una ecuación de primer grado con una incógnita, cuyo valor se determina fácilmente; al sustituir el valor encontrado, en cualquiera de las ecuaciones del sistema se obtiene el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{4x+3y=22} & Ec.1 \\ \text{2x+5y=18} & Ec.2 \end{cases}$$

Al despejar y en ambas ecuaciones tenemos

$4x + 3y = 22$ $\qquad$ $2x + 5y = 18$

$3y = -4x + 22$ $\qquad$ $5y = -2x + 18$

$y = \frac{-4x+22}{3}$ $\qquad$ $y = \frac{-2x+18}{5}$

Al igualar entre si los dos valores de y tenemos.

$y = y$

$\frac{-4x+22}{3} = \frac{-2x+18}{5}$

Al resolver la ecuación se obtiene.

$15\left(\frac{-4x+22}{3} = \frac{-2x+18}{5}\right)$

$5(-4x + 22) = 3(-2x + 18)$

$-20x + 110 = -6x + 54$

$-20x + 6x = 54 - 110$

$-14x = -56$

$x = \frac{-56}{-14}$

$x = 4$

Al sustituir el valor de $x = 4$ en la ecuación 1 tenemos

$4x + 3y = 22$ Ec. 1

$4(4) + 3y = 22$

$16 + 3y = 22$

$3y = 22 - 16$

$3y = 6$

$y = \frac{6}{3}$

$y = 2$

La solución del sistema es $x = 4$ y $y = 2$

Comprobación:

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} \text{2x+y=1} \\ \text{3x-2y=-9} \end{cases}$$

Ejercicios 4.2: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación y realiza la comprobación.

a)

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} a+6b=11 \\ 5a-15b=10 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} -3c+5d=21 \\ c-d=-5 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} 6x+2y=14 \\ -2x+y=7 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 2t+u=3 \\ t+2u=3 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} 2w+2z=10 \\ 2w-z=4 \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} 2x-2y=14 \\ x+y=1 \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} \text{3c+3d=15} \\ \text{2c-2d=14} \end{cases}$$

j)

$$\begin{cases} \text{8w-15y=-56} \\ \text{w+y=-7} \end{cases}$$

k)

$$\begin{cases} \text{t-u=-1} \\ \text{-3t+4u=-2} \end{cases}$$

l)

$$\begin{cases} \text{5x+y=10} \\ \text{6x-2y=-4} \end{cases}$$

4.6. Método de Sustitución

Para determinar el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por sustitución, se procede en el orden siguiente:

1. Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones.

2. Se sustituye la expresión obtenida en el paso 1 en la otra ecuación para hallar una ecuación lineal en una incógnita.

3. Se resuelve la ecuación lineal resultante en una incógnita para encontrar el valor de esa incógnita.

4. Se sustituye la solución obtenida en el paso 3 en la ecuación resultante en el paso 1 para determinar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{4x+3y=10} & Ec.1 \\ \text{2x+5y=12} & Ec.2 \end{cases}$$

De la ecuación 1 despejamos a y

$4x + 3y = 10$

$3y = -4x + 10$

$y = \frac{-4x+10}{3}$

Se sustituye la $y = \frac{-4x+10}{3}$ en la ecuación 2.

$2x + 5y = 12$

$2x + 5\left(\frac{-4x+10}{3}\right) = 12$

$3\left(2x + 5\left(\frac{-4x+10}{3}\right) = 12\right)$

$6x + 5(-4x + 10) = 36$

$6x - 20x + 50 = 36$

$6x - 20x = 36 - 50$

$-14x = -14$

$x = \frac{-14}{-14}$

$x = 1$

Al sustituir $x = 1$ en $y = \frac{-4x+10}{3}$ tenemos

$y = \frac{-4(1)+10}{3}$

$y = \frac{-4+10}{3}$

$y = \frac{6}{3}$

$y = 2$

La solución del sistema es $x = 1$ y $y = 2$

Comprobación:

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} \text{14t+5u=35} \\ \text{-17t-3u=22} \end{cases}$$

Ejercicios 4.3: Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución y realiza la comprobación.

a)

$$\begin{cases} 3x+4y=-6 \\ 2x-y=7 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+2y=-17 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \text{3x-2y=-17} \\ \text{x+2y=5} \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} \text{2w+3z=5} \\ \text{3w+2z=5} \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} 5a-2b=-23 \\ -8a+3b=18 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 5x-3y=-2 \\ 9x-5y=4 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} \text{6a+b=0} \\ \text{-11a-2b=-14} \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} \text{21x-14y=7} \\ \text{4x+3y=-44} \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} 32r+12t=-12 \\ 6r+5t=17 \end{cases}$$

j)

$$\begin{cases} 49x+10y=2 \\ -31x-5y=12 \end{cases}$$

k)

$$\begin{cases} \text{-10a+11b=2} \\ \text{5a-4b=2} \end{cases}$$

l)

$$\begin{cases} \text{9a-8b=-6} \\ \text{23a+11b=79} \end{cases}$$

4.7. Método gráfico

Los elementos del conjunto solución de una ecuación lineal $Ax + By + c = 0$ constituyen una cantidad infinita de parejas ordenadas (x, y) que pueden representarse gráficamente con una línea recta.

Cuando se dibujan las gráficas de dos ecuaciones lineales en dos variables en un sistema de coordenadas cartesianas se tiene que:

1. Las dos rectas coinciden. Las ecuaciones tienen la misma gráfica y toda solución de una ecuación es solución de la otra. **Existe un número infinito de soluciones.**

2. Las rectas no se intersectan; en tal caso se llaman rectas **paralelas** y no existe un punto que satisfaga las dos ecuaciones. El sistema **no tiene solución.**

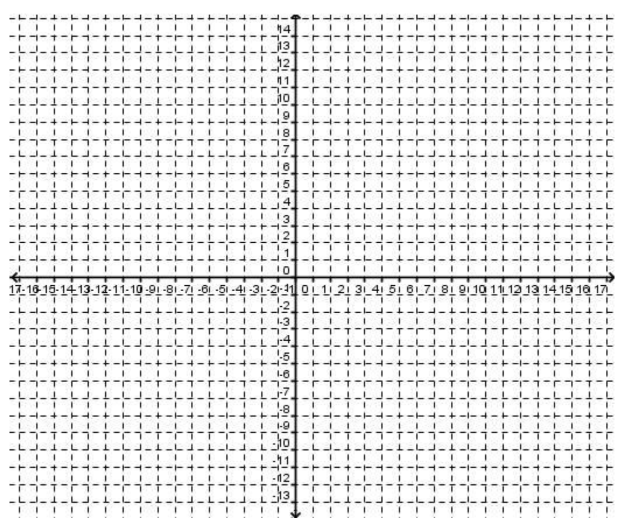
3. Las rectas tienen un solo punto de intersección, y este es **la única solución** del sistema.

Un sistema de ecuaciones es **consistente (o compatible)** cuando tiene al menos una solución, e **inconsistente (o incompatible)** cuando no tiene ninguna.

Un sistema de ecuaciones es **dependiente** cuando tiene una infinidad de soluciones, e **independiente** cuando solo tiene una.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \text{10x-3y=36} \\ \text{2x+5y=-4} \end{cases}$$

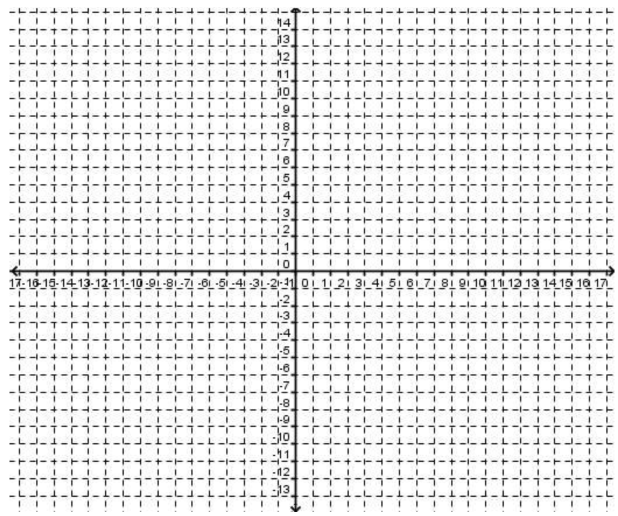


Gráficamente la solución del sistema es el punto $(3, -2)$ por lo tanto $x = 3$ y $y = -2$.

El sistema es consistente (o compatible) e independiente.

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} \text{x+2y=7} \\ \text{2x-y=-1} \end{cases}$$

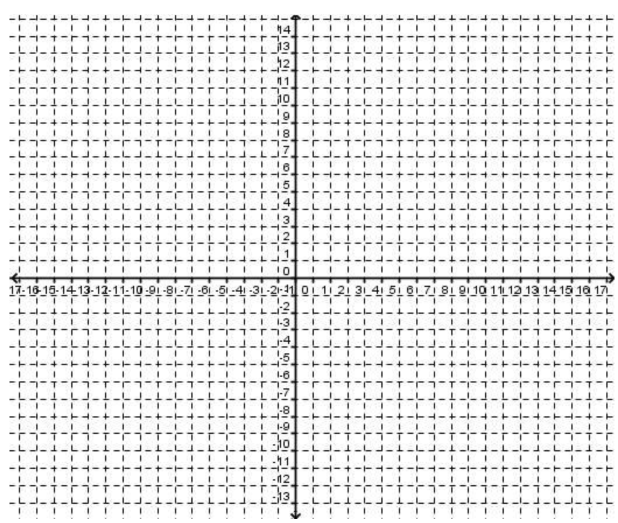


Gráficamente la solución del sistema es el punto $(1,3)$ por lo tanto $x=1$ y $y=3$.

El sistema es consistente (o compatible) e independiente.

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} \text{x+y=3} \\ \text{x+y=5} \end{cases}$$

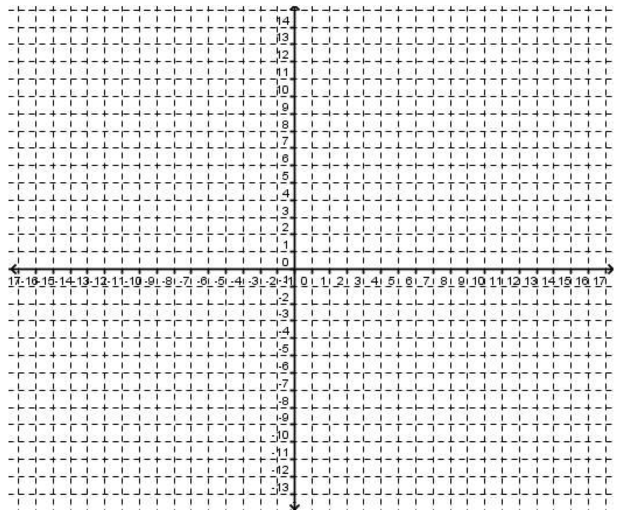


Gráficamente las rectas son paralelas, el sistema no tiene solución.

El sistema es inconsistente (o incompatible).

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} \text{-x+y=2} \\ \text{-3x+3y=6} \end{cases}$$



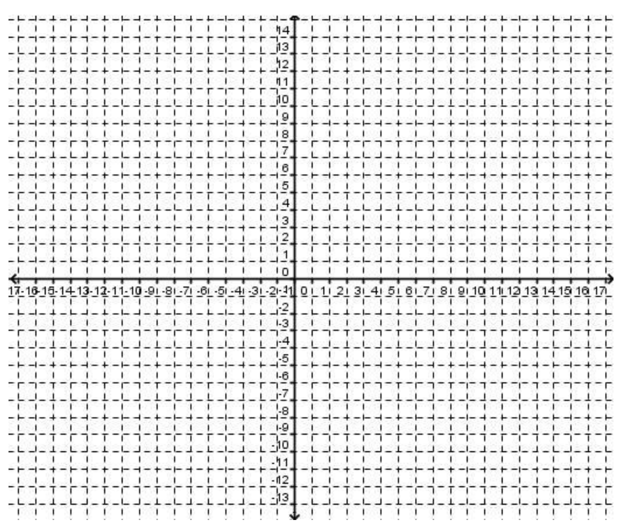
Gráficamente las rectas coinciden por lo tanto existe un número infinito de soluciones.

El sistema es dependiente.

Ejercicio 4.4: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método gráfico. Indica si el sistema es consistente(o compatible), inconsistente (o incompatible), dependiente o independiente.

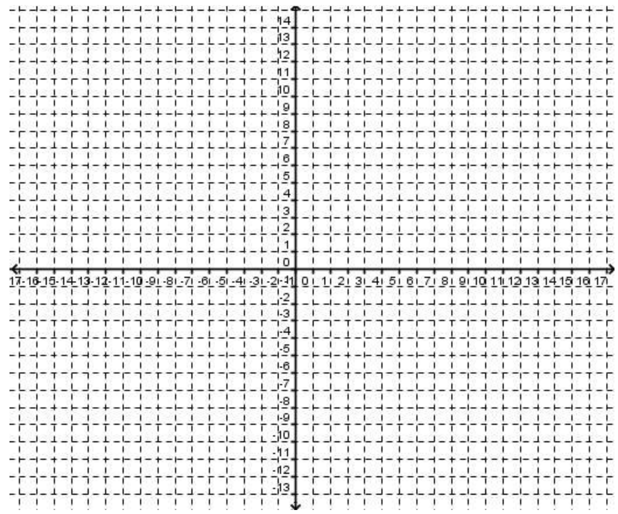
a)

$$\begin{cases} \text{x+y=9} \\ \text{2x-y=12} \end{cases}$$



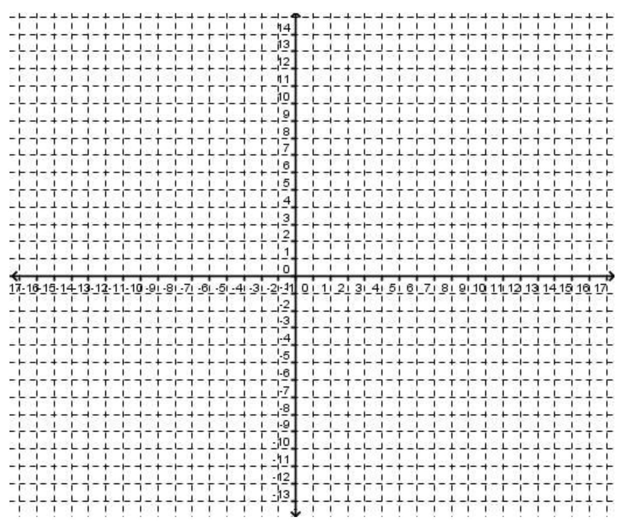
b)

$$\begin{cases} 4x-2y=-16 \\ 4x+2y=8 \end{cases}$$



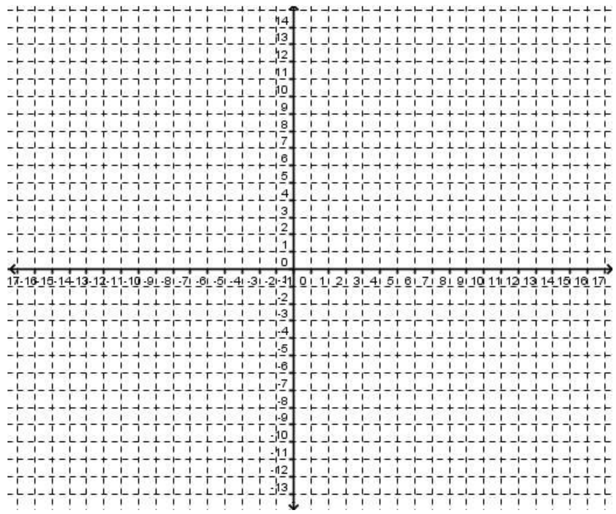
c)

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$



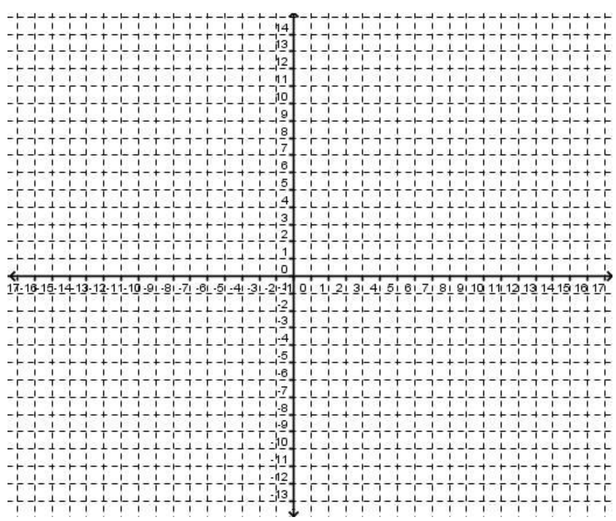
d)

$$\begin{cases} x\text{-}y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$$



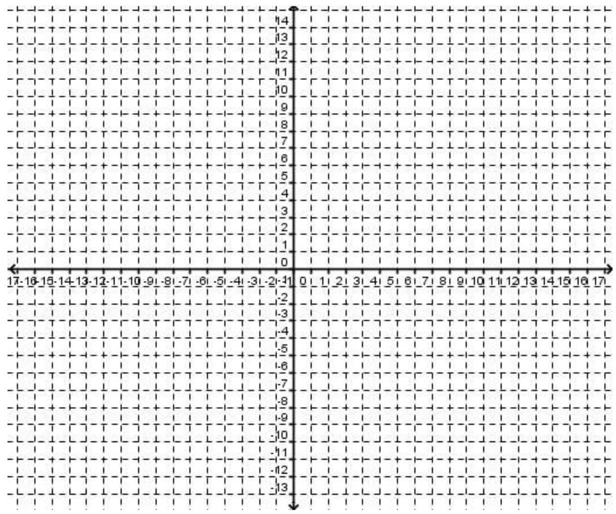
e)

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$



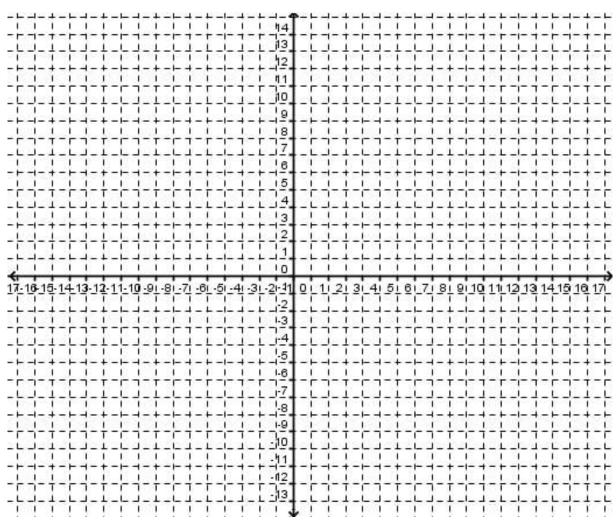
f)

$$\begin{cases} -2x+y=-1 \\ -2x+y=3 \end{cases}$$



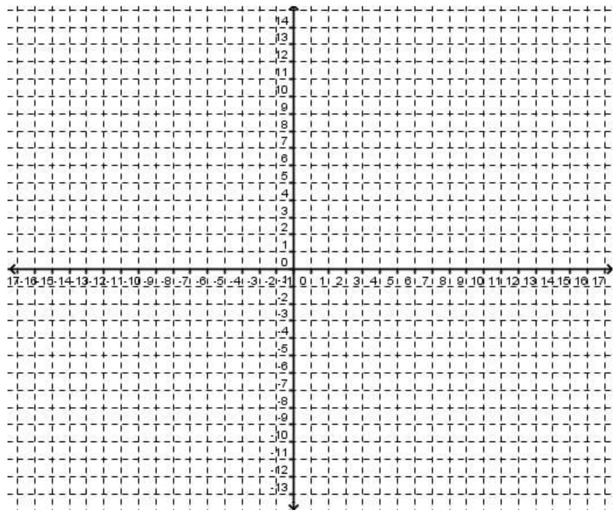
g)

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 4x-2y=-6 \end{cases}$$



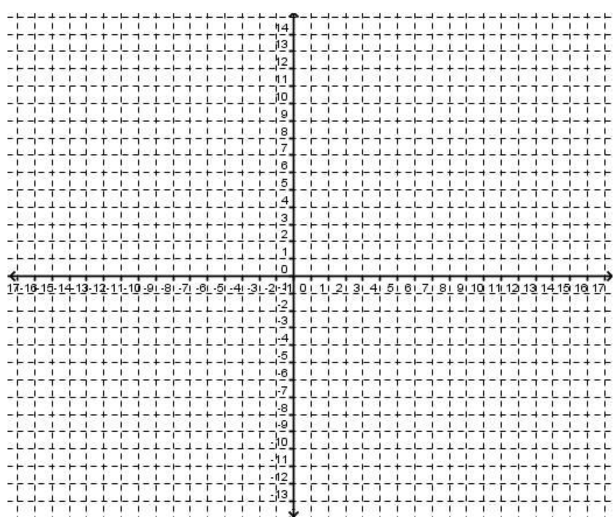
h)

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ -2x+3y=6 \end{cases}$$



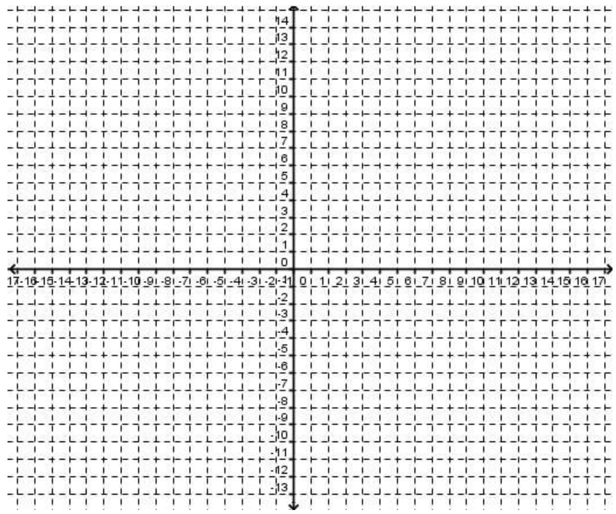
i)

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=4 \end{cases}$$



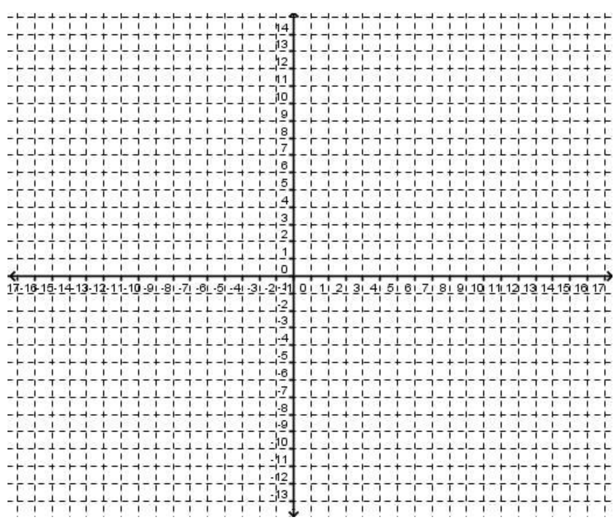
j)

$$\begin{cases} -3x+y=5 \\ -6x+2y=10 \end{cases}$$



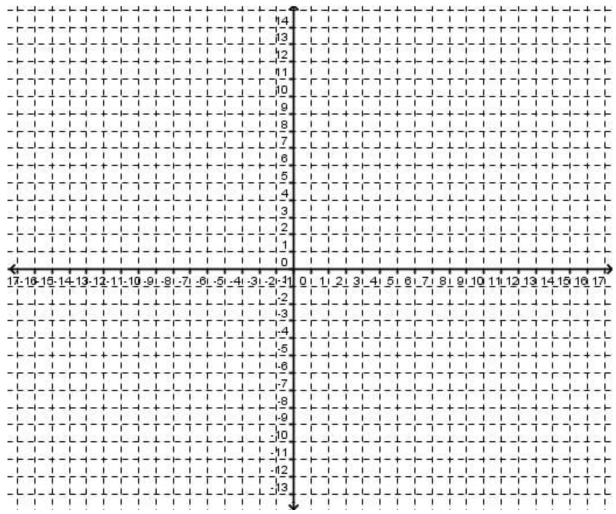
k)

$$\begin{cases} x+y=9 \\ 3x+3y=27 \end{cases}$$



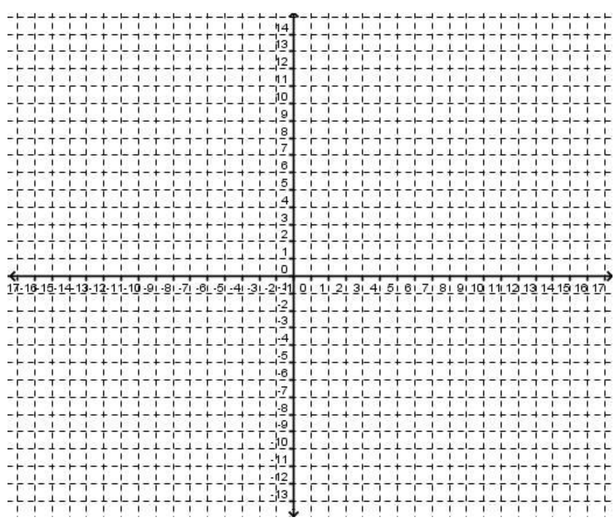
l)

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=-3 \end{cases}$$



m)

$$\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x-2y=6 \end{cases}$$



4.8. Problemas de aplicación

Un granjero tiene patos y cerdos en un corral, si contó 72 cabezas y 200 patas, ¿Cuántos patos y cerdos tiene?

$$\begin{cases} \text{p+c=72} & Ec.1 \\ \text{2p+4c=200} & Ec.2 \end{cases}$$

Despejamos de la Ecuación 2 a la variable **c** .

$2p + 4c = 200$

$4c = -2p + 200$

$c = \frac{-2p+200}{4}$

Sustituimos $c = \frac{-2p+200}{4}$ en la Ecuación 1.

$p + c = 72$

$p + (\frac{-2p+200}{4}) = 72$

$4\big(p + (\frac{-2p+200}{4}) = 72\big)$

$4p + 1(-2p + 200) = 288$

$4p - 2p + 200 = 288$

$4p - 2p = 288 - 200$

$2p = 88$

$p = \frac{88}{2}$

$p = 44$

Sustituimos el valor de $p = 44$ para obtener el valor de c.
$c = \frac{-2p+200}{4}$

$c = \frac{-2(44)+200}{4}$

$c = \frac{-88+200}{4}$

$c = \frac{112}{4}$

$c = 28$

Hay 28 cerdos y 44 patos.

Comprobación:

Ejercicio 4.5: Resuelve los siguientes problemas y realiza la comprobación.

1. 5 trajes y 3 sombreros cuestan \$4180 y 8 trajes y 9 sombreros cuestan \$6940. Determina el precio de un traje y un sombrero

2. En un cine 10 entradas de adulto y 9 de niño cuestan \$512 y 17 de niños y 15 de adulto cuestan \$831. Determina el precio de cada entrada

3. En un juego de fútbol se vendieron 12000 boletos. El precio de los boletos es de \$250 en numerados y \$150 en la sección general. Si el ingreso total obtenido es de \$2,200,000. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada precio?

4. 8 litros de gasolina magna y 10 litros de premium cuestan \$82 mientras que 4 litros de magna y 7 litros de premium cuestan \$51 ¿Cual es el precio por ambas gasolinas?

5. Si 10kg de papas y 5kg de arroz cuestan \$55 mientras 7kg de papas y 13kg de arroz cuestan \$67. ¿Cuánto cuesta cada kg?

6. Si 6kg de papa y 5kg de naranja cuestan \$47 y 5kg de papas y 7kg de naranja cuestan \$59 .¿Cuánto cuesta el kg de cada una?

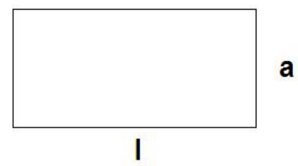
7. Supongamos que tenemos conejos y faisanes en una jaula. Contamos en total 35 cabezas y 94 patas. ¿Cuántos animales de cada especie hay?

8. En el CCH Sur se creo un cine club en el cual las reglas especifican que los boletos con descuento son para los alumnos brillantes a \$100 y para los demás a \$150. Si en una función se recaudaron \$33250, determina el número de boletos de cada precio que se vendieron, si se sabe que asistieron 230 alumnos,

9. Lucas tiene 14 monedas más que Marcelo y entre ambos tienen 80. ¿Cuantas monedas tiene cada uno?

Ejemplo 1:

El perímetro de un rectángulo es de 18cm, si el doble del largo es igual al ancho más 6cm, ¿cuales son las dimensiones del rectángulo?



Ejercicio 4.6:

1. Un tanque con capacidad de 1500 litros, esta lleno de agua y se empieza a vaciar a razón de 50 litros por minuto. Un segundo tanque, con la misma capacidad, contiene al inicio 300 litros y se empieza a llenar a razón de 30 litros por minuto. ¿En que momento ambos tanques tienen la misma cantidad de agua?

2. Alfredo y Jorge, deciden realizar una carrera de 100 metros planos. Se sabe que Alfredo corre a una velocidad promedio de 5m/seg y Jorge a una velocidad de 3m/seg. Como Alfredo es más veloz le dará una ventaja de 40 metros a su compañero, creyendo que aun así va a ganar. ¿En que momento alcanza Alfredo a Jorge?

3. Un tren sale de la estación en dirección este a velocidad de 80 km/h. Una hora más tarde, otro tren sale de la misma estación en una vía paralela a 120km/h ¿A que distancia de la estación van a coincidir los trenes?

4. Dos señoras que salen del mercado llevan manzanas en una bolsa, la primera le dice a la segunda; si tu me das una manzana tendré el doble de las que a ti te queden, la segunda le responde, mejor dame una manzana y tendremos la misma cantidad. ¿Cuantas manzanas lleva cada señora?

5. Saul y Oscar empieza a jugar cartas. Si Saul pierde \$30 , ambos tienen lo mismo, pero si Saul gana \$30 , tiene 4 veces lo que le queda a Oscar. ¿Cuánto tienen al principio cada uno?

6. Un equipo de béisbol jugo 162 partidos. Gano 44 juegos más de los que perdió. ¿Cuántos partidos perdió?

7. Ramón vende autos y camiones. Tiene espacio en un lote para 510 vehículos. Por experiencia sabe que sus utilidades son mayores si tiene 190 autos más que camiones. ¿Cuántos vehículos de cada tipo debe de tener?

8. Si a 5 veces el mayor de dos números se le añade 7 veces el menor, la suma es 316 y si a 9 veces el menor se le resta el cuádruple del mayor la diferencia es 83. Determina los números.

9. La suma de las cifras de un número de dos cifras es 12. La cifra de las unidades excede a la de las decenas en 4. Encuentra el número.

10. Determina las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es igual a 110 cm y que su longitud es 5 cm más pequeña que el doble de su anchura

11. Hace diez años, la edad de Esteban era cuatro veces mayor que la de Juan y hoy día, es solamente el doble. Determina las edades actuales.

12. Rosa es 4 veces mayor que Luis y en 4 años más solo será el doble ¿Cual es la edad actual de cada uno?

13. En un supermercado ofrecieron una oferta de 10 kilos de una mantequilla de \$9.90, esta mantequilla se obtuvo de mezclar dos tipos de mantequilla, una de \$12.00 el kilo y otra de \$9.00, ¿cuántos kilos de cada tipo se mezclaron?

14. Un jardín tiene forma rectangular, si el largo es 3 veces el ancho y esta cercado con 200 metros de malla metálica, ¿cuánto mide el largo y el ancho del jardín?

15. La distancia entre Mérida y Cancún, por carretera, es de 322 km, pasando por Chichén Itzá. Si la distancia de Chichén Itzá a Cancún es 82km mayor que la de Mérida a Chichén Itzá, ¿que distancia hay de Mérida a Chichén Itzá y de esta a Cancún?

Ejemplo 1: Pedro invirtió parte de su dinero al 9 % y el resto al 13 %. El ingreso por ambas inversiones es \$3690. Si hubiera intercambiado sus inversiones el ingreso habría totalizado \$3570

Ejercicio 4.7:

1. Guillermo invirtió parte de su dinero al 8 % y el resto al 12 %. El ingreso por ambas inversiones totales es \$2440. Si hubiera intercambiado sus inversiones el ingreso había totalizado \$2760.¿Cuánto invirtió al 8 % y cuánto al 12 %?

2. Marco invirtió parte de su dinero al 12 % y el resto al 15 %. El ingreso por ambas inversiones totalizo \$3000. Si hubiera intercambiado sus inversiones el ingreso habría totalizado \$2940. ¿Cuánto invirtió en cada una?

3. Oscar invirtió \$360, 000. Una parte al 6 % de interés y el resto al 8 %. Si por concepto de intereses recibió \$24, 600. ¿Cuánto invirtió en cada una?

4. Edgar invirtió $\$15,000$ una parte al $3\,\%$ de interés y el resto al $6\,\%$ anual. ¿Cuánto invirtió en cada una si los intereses recibidos son iguales?

5. Alfredo invirtió $\$12,500$. Una parte al $5\,\%$ de interés y el resto al $6\,\%$. Si por concepto de intereses recibió $\$710$. ¿Cuánto invirtió en cada una?

6. Carina invirtió $\$5,000$. Una parte al $5.5\,\%$ de interés y el resto al $3\,\%$. Si por concepto de intereses recibió $\$200$. ¿Cuánto invirtió en cada una?

7. Un comerciante de automóviles usados compra dos en $\$52,000$. Vende uno con una ganancia del $18\,\%$ y en el otro perdió $3\,\%$, si por la transacción completa obtuvo una ganancia de $\$6,000$. ¿Cuánto le costo cada automóvil?

Ejemplo 1: Se mezcla una solución salina al 40 % con otra similar al 80 % para obtener 50 litros de solución salina al 60 %.¿Cuántos litros se deben mezclar de cada solución?

Ejercicio 4.8:

1. Se mezcla una solución de ácido al 30 % con otra similar al 70 % para obtener 40 litros de solución salina al 60 %.¿Cuántos litros se deben mezclar de cada solución?

2. Se mezcla una solución salina al 60 % con otra similar al 80 % para obtener 40 litros de solución salina al 75 %.¿Cuántos litros se deben mezclar de cada solución?

4.9. Sistemas de Ecuaciones de 3×3 - Método de Triangulación

Ejemplo 1:

Enumera cada una de las ecuaciones que se te dan para poder trabajar con ellas.

$$\begin{cases} \text{2x+3y+z=1} - - - - - - - - 1 \\ \text{6x-2y-z=-14} - - - - - - - 2 \\ \text{3x+y-z=1} - - - - - - - - - 3 \end{cases}$$

Junta la ecuación 1 y 2, resuélvelas por el método de reducción.

$$\begin{cases} \text{2x+3y+z=1} - - - - - - - - 1 \\ \text{6x-2y-z=-14} - - - - - - - 2 \end{cases}$$

Multiplica cruzado los coeficientes de x

$$\begin{cases} 6(2x+3y+z=1) \\ 2(6x-2y-z=-14) \end{cases}$$

Cambia el signo de uno de los coeficientes en este caso del 6

$\searrow$ cambio signo

$$\begin{cases} -6(2x+3y+z=1) \\ 2(6x-2y-z=-14) \end{cases}$$

Multiplicar cada uno de los términos

$$\begin{cases} -12x-18y-6z=-6 \\ 12x-4y-2z=-28 \end{cases}$$

Al resolver la suma de los términos semejantes obtenemos la ecuación 4.

$$\begin{array}{rrrl} -12x & -18y & -6z= & -6 \\ 12x & -4y & -2z= & -28 \\ \hline & -22y & -8z= & -34\text{ - - - - - - } 4 \end{array}$$

Junta la ecuación 1 y 3, resuélvelas por el método de reducción.

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1- - - - - - - -1 \\ 3x+y-z=1- - - - - - 3 \end{cases}$$

Multiplica cruzado los coeficientes de x

$$\begin{cases} 3(2x+3y+z=1) \\ 2(3x+y-z=1) \end{cases}$$

Cambia el signo de uno de los coeficientes en este caso del 3

$\searrow$ cambio signo

$$\begin{cases} -3(2x+3y+z=1) \\ 2(3x+y-z=1) \end{cases}$$

Multiplicar cada uno de los términos

$$\begin{cases} -6x-9y-3z=-3 \\ 6x+2y-2z=2 \end{cases}$$

Al resolver la suma de los términos semejantes obtenemos la ecuación 5.

$$\begin{array}{rrrl}
-6x & -9y & -3z= & -3 \\
6x & +2y & -2z= & 2 \\
\hline
 & -7y & -5z= & -1 \text{ - - - - - - } 5
\end{array}$$

Juntar 4 y 5 y resolverla por el método de reducción.

$$\begin{cases} -22y-8z=-34 \\ -7y-5z=-1 \end{cases}$$

Multiplicar cruzado los coeficientes

$$\begin{cases} -7(-22y-8z=-34) \\ -22(-7y-5z=-1) \end{cases}$$

Cambiar el signo en este caso del -7

$\searrow$ cambio de signo

$$\begin{cases} 7(-22y-8z=-34) \\ -22(-7y-5z=-1) \end{cases}$$

Multiplicar cada uno de los terminos

$$\begin{cases} -154y-56z=-238 \\ 154y+110z=22 \end{cases}$$

Al resolver la suma de términos semejantes obtenemos la ecuación 6

$$\begin{array}{rrl}
-154y & -56z= & -238 \\
154y & +110z= & 22 \\
\hline
 & 54z= & -216 \text{ - - - - - - } 6
\end{array}$$

Acomodamos el sistema en forma triangular colocando las ecuaciones 1, 4 y 6

$$\begin{array}{rrrl}
2x & +3y & +z= & 1 \text{ - - - - } 1 \\
 & -22y & -8z= & -34 \text{ - - - } 4 \\
 & & 54z= & -216 \text{ - - - - } 6
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación 6 para despejar z

$54z = -216$

$z = \frac{-216}{54}$

Simplificando obtenemos

$z = -4$

Sustituimos el valor de z en la ecuación 4

$-22y - 8z = -34$

$-22y - 8(-4) = -34$

$-22y + 32 = -34$

$-22y = -34 - 32$

$-22y = -66$

$y = \frac{-66}{-22}$

Simplificando tenemos

$y = 3$
Sustituimos y y z en la ecuación 1

$2x + 3y + z = 1$

$2x + 3(3) + (-4) = 1$

$2x + 9 - 4 = 1$

$2x = 1 - 9 + 4$

$2x = -4$

$x = \frac{-4}{2}$

Simplificando tenemos

$x = -2$

La solución del sistema es: $x = -2$, $y = 3$, $z = -4$

Ejercicio 4.9 Resuelve los siguientes sistemas de 3×3

a)

$$\begin{cases} \text{x+4y-z=6} \\ \text{2x+5y-7z=-9} \\ \text{3x-2y+z=2} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x+z+3y=9 \\ 2y+x-3z-1=0 \\ 5x+4y+6z=5 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 4x\text{-}y+5z=\text{-}6 \\ 3x+3y\text{-}4z=30 \\ 6x+2y\text{-}3z=33 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 6x+3y+2z=12 \\ 9x\text{-}y+4z=37 \\ 10x+5y+3z=21 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} \text{2x+y-3z=-1} \\ \text{x-3y-2z=-12} \\ \text{3x-2y-z=-5} \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} \text{x-2y-2z=-9} \\ \text{2x-3y+z=-1} \\ \text{5x+y-z=4} \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} \text{2x-y-4z=3} \\ \text{-x+3y+z=-10} \\ \text{3x+2y-2z=-2} \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} 2x+4y-2z=-2 \\ x+5y-12z=1 \\ 3x+9y-21z=0 \end{cases}$$

j)

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$$

k)

$$\begin{cases} 5x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=15 \\ 3x+2y-z=-2 \end{cases}$$

l)

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ x-y-3z=-10 \end{cases}$$

m)

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x-y+z=7 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$$

n)

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+z=4 \\ 2x+2y-z=-4 \end{cases}$$

ñ)

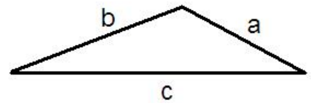
$$\begin{cases} \text{2x+y-3z=-1} \\ \text{x-3y-2z=-12} \\ \text{3x-2y-z=-5} \end{cases}$$

4.10. Problemas de aplicación

1. Los boletos para un espectáculo de la gira por el 75^o Aniversario de los Harlem Globetrotters, cuestan \$10, \$18 o, por asientos VIP, \$30. A la fecha, se han venido cinco veces más boletos de \$18 que de VIP. El número de boletos de \$10 es igual al número de los de \$18, más el doble del número de VIP. Las ventas de estos boletos son por un total de \$9500. ¿Cuántos boletos de cada tipo se han vendido?

2. Un fabricante de imitación de joyas para el carnaval provee a tres mayoristas, A, B y C. El total de un día de producción es de 320 estuches de imitación de joyas. Debe enviar al mayorista A el triple de estuches de los que envía al B, y debe mandar al mayorista C 160 estuches menos de los que proporciona al A y al B juntos. ¿Cuántos estuches debe enviar a cada mayorista, a fin de distribuirles la producción total del día?

3. El perímetro de un triángulo mide 70 centímetros. El lado más largo es 4 centímetros menor que la suma de los otros dos lados. El doble de la distancia más corta es 9 centímetros menos que el lado más largo. Calcule la longitud de cada lado del triángulo.



4. En un muestreo al azar de 100 estadounidenses en edad de votar, se identificaron 10 más con Independientes que como Republicanos, seis menos se identificaron como Republicanos que como Demócratas. Si se supone que todos los integrantes de la muestra son Republicanos. Demócratas o Independientes, ¿cuántos de ellos se identifican con cada afiliación política?

5. Ana tiene el triple de pasteles que Carlos. Diego tiene la mitad que Carlos. Ana tiene 16 pasteles más que Carlos. ¿Cuántos pasteles tiene cada uno?

6. Si Arturo le da un dólar a Cesar, ambos tendrían lo mismo, si Berenice tuviera un dólar menos tendría lo mismo que Cesar, si Arturo tuviera 5 dólares más tendría lo mismo que el doble de lo que tiene Cesar. ¿Cuánto tiene cada uno?

7. La suma de tres números es 37 y el número menor disminuido en 1 equivale a una tercera parte de la suma del mayor y el mediano. La diferencia entre el mediano y el menor equivale al mayor disminuido en 13. Determina los tres números.

8. En una bolsa hay \$230 en monedas de \$5, \$25 y \$50. Sabiendo que el número de monedas de \$25 es igual al doble de las de \$50 y que el número de monedas de \$5 es el doble de las de \$25, determina las monedas que existen de cada clase.

9. Al abrir su alcancía Martha encontró que, entre monedas de \$5, \$10 y \$25 completaba \$850. También encontró que el número de monedas de \$10 era el triple que las de \$25 y que las de \$5 eran el doble que las de \$10. ¿Cuántas monedas de cada denominación había en la alcancía?

Bibliografía

[1] Alanis, L. *Matemáticas I, Solución de problemas reales*, Ediciones Quinto Sol. México 2012

[2] Álvarez, P. Briseño, L. Palmas, O. Verdugo, J. *Descubre y Aprende, Matemáticas 2.* Pearson Educación.México 2000.

[3] Álvarez, P. Martínez, P. Palmas, O. Struk, F. *Descubre y Aprende, Matemáticas 3.* Pearson Educación.México 2000.

[4] Baldor, A. *Algebra.* Publicaciones Cultural. Decima Reimpresion. México 1993.

[5] Baldor, A. *Aritmetica.* Publicaciones Cultural. Sexta Reimpresion. México 1991.

[6] Coronel, G. Rodriguez, R.Alaniz, J. *Matemáticas I. Fasciculo VI. Ecuaciones:Modelos generalizadores.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[7] Courant, R. Robbins, H. *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* Fondo de Cultura Económica. México 2002.

[8] De la Rosa R. Rosas A. Zuñiga J. *Matemáticas I. Fascículo I. Aritmética: Una introducción al Álgebra.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[9] Enzensberger.H, *El Diablo de los números.* Siruela. Febrero 2000.

[10] Flores,M. Ruíz, E. *Matemáticas I. Fascículo III. Lenguaje Algebraico: Operatividad.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[11] Coordinación:García, T. Cornejo, A. Elaboración: Reyes, A. Ruz, F. Pérez, A. Chávez, G. Valencia, M. Salcedo, S. Reyes T. Revision: Rosen, P. *Guía para el profesor de Matemáticas I.* Colegio de Ciencias y Humanidades. Secretaria de Programas Institucionales. Junio 2008

[12] Autores: Guillen, J. Romero, M. Colaboraron: Castro, J. Montuy, E. Islas, G. Franco, M. *Matemáticas I Álgebra Cuaderno de Trabajo para el alumno* Colegio de Ciencias y Humanidades. 2007

[13] Autores: Guillen, J. Romero, M. Colaboraron: Castro, J. Montuy, E. Islas, G. Franco, M. *Matemáticas III Álgebra y Geometría Analìtica, Cuaderno de Trabajo para el estudiante* Colegio de Ciencias y Humanidades. Agosto 2006

[14] Autor: Hernandez, M. Asesor: Verdugo, J.*Estrategia didactica para la enseñanza de temas de aritmetica en el Colegio de Bachilleres.*, Tesis Licenciatura (Matemático)- UNAM, Facultad de Ciencias, Mexico 2006.

[15] Jimenez, M. Estrada, R. *Matemáticas 1*, Pearson Educación de México S.A. de C.V. México 2016

[16] Leithold, L. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Harla. México 1994.

[17] Lucio, M. Páez, J. *Matemáticas I. Fascículo II. De la Aritmética al Álgebra.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[18] Matus, P. Castillo F. *Matemáticas I. Fascículo V. Ecuaciones: Modelos Generalizadores.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[19] Miller,Charles D. Heeren Vern E, Hornsby, John.*Matemática: razonamiento y aplicaciones,*Pearson Addison Wesley, 2013.

[20] Oteyza, E. Lam E. Hernandez, C. Carrillo A. *Algebra. Tercera Edicion* Pearson Educación. México 2007.

[21] Autor: Rodríguez, N. Asesor: Verdugo, J.*Introduccion a la aritmetica y al algebra para alumnos y asesores del curso de matemáticas 1 del Sistema Abierto del Colegio de Bachilleres- circulos de estudio del STUNAM.*, Tesis Licenciatura (Matemático)- UNAM, Facultad de Ciencias, Mexico 2006.

[22] Romo, P. Pous, R. Sosa, A. *Matemáticas I. Fascículo IV. Lenguaje Algebraico: Operatividad Productos Notables y Factorización.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[23] *Guia de estudio para presentar el examen de conocimientos y habilidades disciplinarias para la contratacion temporal de profesores de asignatura interinos de Matematicas I a IV* 25ª Promocion, UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades, Secretaria Academica, Enero 2007.

[24] *Guia-Problemario de Matemáticas I.* Colegio de Bachilleres,Coordinacion Sectorial Zona Centro.