SECUENCIA DIDÁCTICA

Diseñada por:	Jesús González González, *profesor CCH Azcapotzalco* para el
Fecha de elaboración	Febrero de 2022

PROGRAMA	
ASIGNATURA	• Cálculo 1
UNIDAD TEMÁTICA	• Unidad 4: Comportamiento gráfico y problemas de optimización
APRENDIZAJES	Resuelve problemas que involucran máximos o mínimos de una función de acuerdo con su dominio restringido.
TEMAS	Problemas de optimización

SECUENCIA	
TIEMPO DIDÁCTICO	4 horas divididas en dos sesiones de 2 horas
DESARROLLO Y ACTIVIDADES	**Inicio** Comenzamos con preguntas detonadoras (anexo 1) acerca de cómo emplear el concepto de máximos o mínimos en la vida cotidiana. A partir de las respuestas, se pueden complementar con ideas acerca de situaciones en las que podemos emplear estos conceptos, por ejemplo, productos máximos, máximo volumen con mínimo de materiales, etc. Esto permitirá que el alumno comprenda y analice como aplicar estas situaciones. **Desarrollo** Presentamos la siguiente situación: “Encontrar dos números enteros que cuya suma sea 1296 y el producto sea máximo”. En parejas o de forma individual, se le pide al alumno que en menos de 5 minutos determine dichos números y sin ningún tipo de expresión algebraica. Si bien, el problema no representa dificultad alguna, el propósito de que sea un número grande es que el alumno no tenga el tiempo suficiente para encontrar dichos números.

	Una vez que transcurra el tiempo establecido, podemos resolver el problema con apoyo de los aprendizajes de la materia de Matemáticas 2 "Resuelve problemas sencillos de máximos o mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática"[1]. En esta situación, plantearemos las siguientes ecuaciones: $$x + y = 1296 \qquad (1)$$ $$P = x\,y \qquad (2)$$ Despejando de la primera ecuación la variable "y" y sustituyendo en la ecuación 2, obtenemos: $$y = 1296 - x \qquad (3)$$ $$P = xy = x(1296 - x) = 1296x - x^2 = -x^2 + 1296x \qquad (4)$$ Con la expresión 4, podemos encontrar el vértice el cuál coincide con el máximo: $$P = -x^2 + 1296x = -(x^2 - 1296x)$$ $$P = -(x^2 - 1296x + \left(\frac{1296}{2}\right)^2 - \left(\frac{1296}{2}\right)^2)$$ $$P = -(x - 648)^2 + 419{,}904 \qquad (5)$$ Con la expresión 5, encontramos que el producto máximo es de 419,904 y que uno de los números es 648. Y para encontrar el valor restante, empleamos la ecuación 3, por lo que el valor restante es 648. Podemos analizar que se pueden calcular máximos y/o mínimos siempre y cuando sea una función polinomial de segundo grado, pero si cambiamos el grado o tipo de función, el método no sirve, por lo que le decimos al alumno que aplicando los métodos de máximos y mínimos con los criterios de primera o segunda derivada.

[1] Programa de matemáticas 2

Emplearemos el criterio de segunda derivada para determinar el máximo producto,

A partir de la función dada por expresión 4, calculamos la primera derivada e igualamos a cero para obtener el punto crítico.

$$P = -x^2 + 1296x$$

$$P' = -2x + 1296 = 0$$

$$-2x = -1296$$

$$x = \frac{-1296}{-2} = 648$$

Observamos que x=648 es el punto crítico. Para saber si es un máximo o mínimo obtenemos la segunda derivada:

$$P'' = -2$$

Observamos que la segunda derivada es negativa, por lo que el punto crítico es un máximo, así que el producto máximo es:

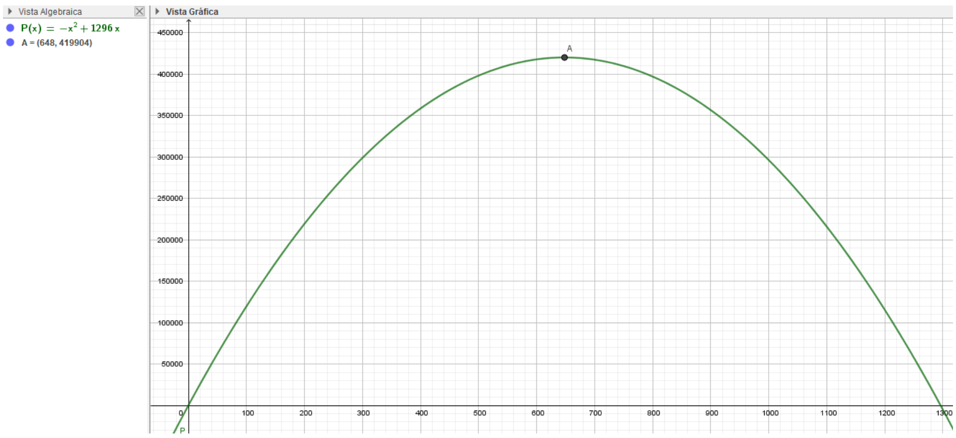
$$P = -(648)^2 + 1296(648) = 419{,}904$$

Mientras que el número restante se puede calcular con la expresión 3:

$$y = 1296 - x = 1296 - 648 = 648$$

De esta forma podemos calcular el máximo requerido por el problema.

Podemos comprobar que la función en x=648 empleando el programa GeoGebra.



Cierre

	Para finalizar, pedimos al alumno que resuelva los siguientes problemas para revisar análisis, procedimientos y resultados. a) "La diferencia del triple de un número entero con otro es 1050. Determinar dichos números si su producto es MÍNIMO" b) En un tercer problema que permite inclusive la aplicación de una maqueta es el siguiente: "De las cuatro esquinas de una lámina cuadrada de 30 cm de lado, se suprimen cuadrados iguales de lado x. Se doblan los bordes de la lámina recortada para formar una caja sin tapa. Determina la longitud de x, para que el volumen de la caja sea máximo".
ORGANIZACIÓN	Las actividades se realizarán de forma individual o en parejas
MATERIALES Y RECURSOS	Para el docente: Pizarrón, marcadores, borrador, una computadora con el programa de GeoGebra 5 o suite, proyector (en caso de clase presencial) internet, proyector en caso de clase presencial Para el alumno: hoja, lápiz, pluma, calculadora
EVALUACIÓN	Los aprendizajes se evaluarán con ejercicios adicionales contemplados en el anexo 2.

BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA	
PARA LOS ALUMNOS	Ayres, F. Cálculo Diferencial e Integral. McGraw-Hill. España 1989 Granville, W. Cálculo Diferencial e Integral. Limusa. México 2009
PARA EL PROFESOR	Ayres, F. Cálculo Diferencial e Integral. McGraw-Hill. España 1989 Granville, W. Cálculo Diferencial e Integral. Limusa. México 2009 Piskunov, N. Cálculo Diferencial e Integral. Mir. URSS. 1977. Purcell, E. Cálculo Diferencial e Integral, Pearson Educación. 2007.

ANEXOS

Anexo 1

¿Cuál es el significado de mínimo?

¿Cuál es el significado de máximo?

Los envases de leche, bebidas etcétera, ¿tienen diseños aleatorios?

En el tiro parabólico, ¿el alcance en infinito, o tiene un límite?

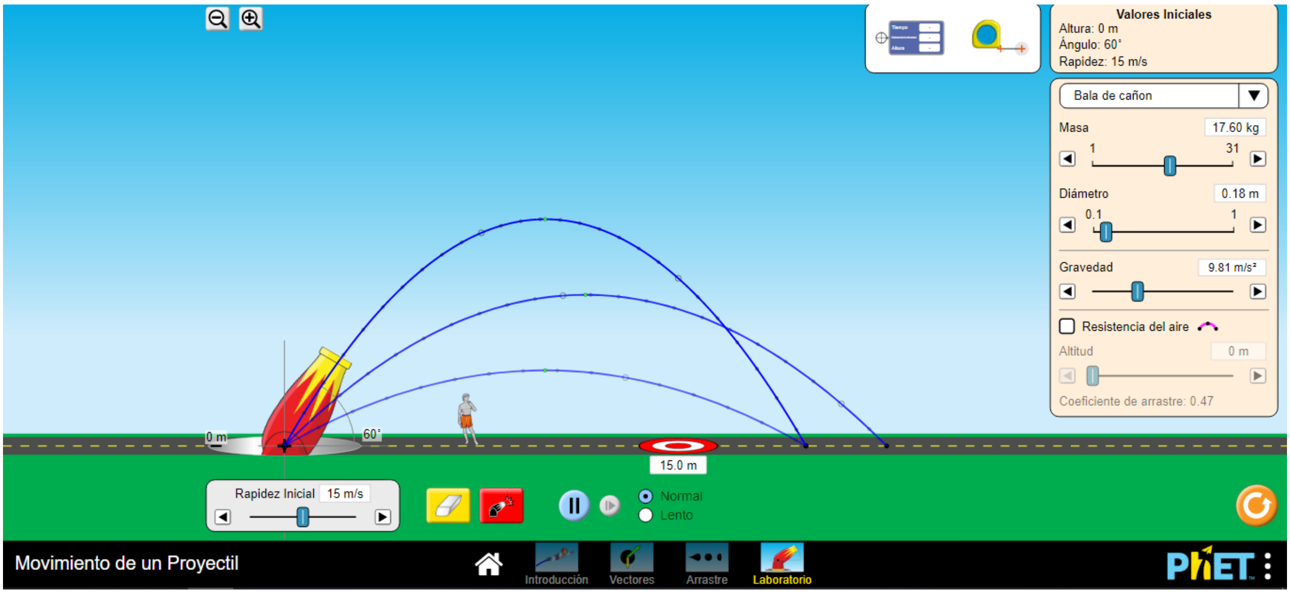
Se recomienda el siguiente simulador (https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_es.html) , en la opción de simulador y con los siguientes parámetros:

Tipo de proyectil: bala de cañón

Gravedad: 9.81 m/s^2

Deshabilitada la opción de resistencia al aire

Ángulo: 30°, 45° y 60 °



Anexo 2

En la caída libre se tiene que la posición está determinada por la siguiente función: $f(t) = y_o + V_o t - \frac{1}{2}gt^2$ en donde la "y$_0$" es la posición inicial del objeto, "V$_0$" es la velocidad inicial del objeto y "g" es la gravedad. Si se lanza un objeto hacia arriba con una velocidad de 20 m/s desde el piso, determine la altura máxima.

En un círculo de radio 4, se inscribe un rectángulo. Determine las dimensiones del rectángulo para que el área de este sea máxima.