UNIDAD 3

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno:

- ♦ Podrá aplicar las razones trigonométricas para ángulos no agudos.
- ♦ Comenzará el estudio de las funciones trascendentes a partir de las circulares.
- ♦ Comprenderá la relación entre los parámetros de una función trigonométrica y su gráfica.
- ♦ Podrá modelar funciones cíclicas.

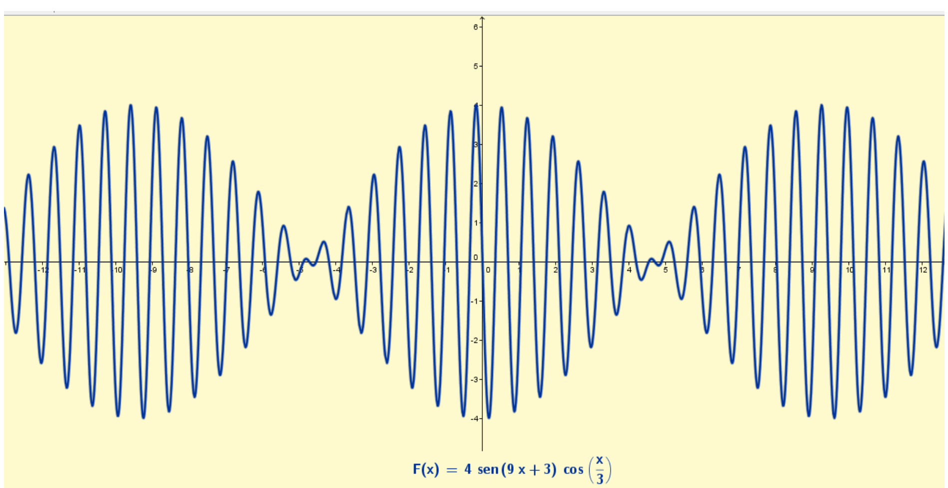


Tabla de contenido

UNIDAD 3

Nota. Usted puede navegar por el escrito al posicionarse en los hipervínculos dando la instrucción Ctrl + Clic

NOTA HISTÓRICA

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

La palabra trigonometría significa medida del triángulo y su historia se remonta a las primeras matemáticas conocidas en Egipto y Babilonia. Los egipcios la utilizaron en las mediciones de las tierras inundadas por el Nilo y establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Mientras que, los griegos y los hindúes consideraron la trigonometría básicamente como una herramienta de la astronomía. Y, a los antiguos árabes se les atribuye haber utilizado las seis funciones trigonométricas.

En el siglo II a. C. el astrónomo Hiparco de Nicea compiló una tabla trigonométrica para resolver triángulos. La tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta a una circunferencia de radio r. Esta tabla es similar a la moderna tabla del seno. Durante muchos siglos la trigonometría de Tolomeo, incorporada en su libro de astronomía el **Almagesto**, fue la introducción básica para los astrónomos.

Por el siglo XII, Europa comenzó a conocer la trigonometría a través de traducciones de libros de astronomía arábigos. El primer trabajo importante en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, llamado el Regiomontano. Durante el siguiente siglo se introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas. La palabra trigonometría, fue usada por primera vez como título de un texto escrito por el matemático alemán Pitiscus en el 1600 d. C.

Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de una variable x. Newton encontró la serie para el seno, coseno y tangente de la variable. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un papel importante tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

El matemático suizo Leonard Euler, en el siglo XVIII, definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Además demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

Tabla de contenido

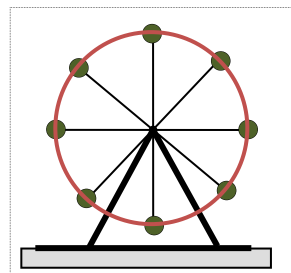
3.1 SITUACIONES QUE INVOLUCRAN VARIACIÓN PERIÓDICA

En nuestra vida diaria, se nos presentan muchos movimientos repetitivos y si no estamos interesados en ellos lo común es que pasan desapercibidos. Por ejemplo: la respiración, las ondas sonoras, el ritmo cardiaco, las mareas, el biorritmo, la luz, en una feria (las sillas voladoras, la rueda de la fortuna, los caba-llitos,…), etc. Estos movimientos y otros que sean cíclicos pueden ser descritos con relativa facilidad mediante las funciones trigonométricas. Para ello, iniciare-mos estudiando algunos movimientos a manera de introducción y que a la vez servirá de repaso de algunos conceptos vistos en cursos anteriores.

RUEDA DE LA FORTUNA

Imagínese **una rueda de la fortuna de 10 metros de diámetro a un metro del suelo y con ocho canastillas distribuidas en forma equilibrada**.

¿Cómo la dibujaría? Pensando que soy pésimo dibujante, puedo considerar los elementos mínimos que permita imaginarme la rueda. La rueda puede abstraerle como una circunferencia y las canastillas como ocho puntos sobre ella, igualmente distribuidos. Se puede considerar ponerle rayos, soportes sobre La Tierra y colocarla a un metro del suelo.



Al pensar como constructor, ¿las canastillas qué tan separadas están? Las canastillas se distribuyen equilibradas sobre la circunferencia para que no haya demasiado peso sobre un lado y esto pueda vencer a los soportes que van hacia el suelo. Es decir, dos canastillas consecutivas se distribuyen equilibradamente a lo largo de un ángulo de una vuelta. En consecuencia tienen

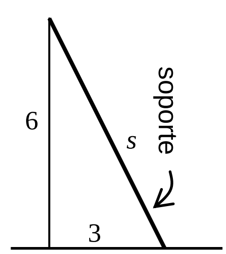
$$\frac{360°}{8} = 45° \text{ de separación.}$$

O bien, para realizar el transporte de la rueda de un lugar a otro la rueda se ensambla en ocho partes. El tamaño de cada parte está dado por la longitud de los ocho arcos de la circunferencia (la circunferencia tiene radio 5). Se diría que las canastillas están separadas

$$\frac{\text{perímetro}}{8} = \frac{2\pi r}{8} = \frac{2\pi(5)}{8} = 1.25\pi \text{ metros} \qquad \text{(valor exacto)}$$

$$\approx 3.927 \text{ metros} \qquad \text{(valor aproximado)}$$

Suponga que los soportes al suelo están desplazados 3 metros de la vertical que pasa por el centro de la rueda, ¿cuál es el tamaño de los soportes?



Pensemos en un triángulo rectángulo cuyo cateto vertical mide 6 metros y el horizontal 3, entonces el tamaño del soporte se obtiene con el Teorema de Pitágoras.

$$s^2 = (6)^2 + (3)^2 = 45 \quad \Rightarrow \quad s = \pm\sqrt{45}$$

Bien, matemáticamente hay dos respuestas. Pero, para la longitud del soporte sólo es válida la positiva.

$$s = \sqrt{45} \text{ metros } \approx 6.708 \text{ m}$$

Con la Geometría Analítica, ¿cuál es la ecuación de la rueda? Para obtener la ecuación, es necesario tener un sistema coordenado y hay dos adecuados:

a) *El origen en el centro de la rueda*.

En este caso el radio vale 5 y el centro es el punto $(0, 0)$. Como la ecuación de una circunferencia se obtiene a partir de

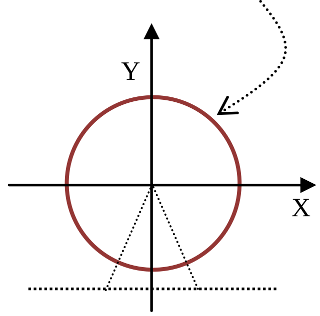
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

donde h y k son las coordenadas del centro y r el radio. La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

o bien

$$x^2 + y^2 = 25.$$



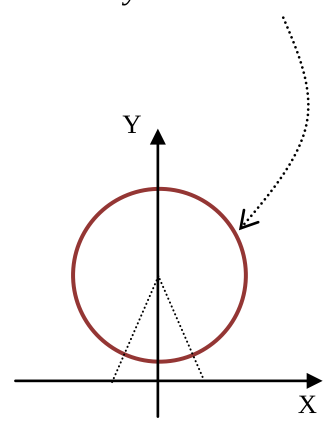
b) *El origen en el suelo y sobre la línea vertical que pasa por el centro de la rueda*.

Ahora tenemos que el centro es el punto $(6, 0)$ y el radio es 5. Entonces la ecuación queda como

$$(x - 0)^2 + (y - 6)^2 = 5^2$$

Desarrollada

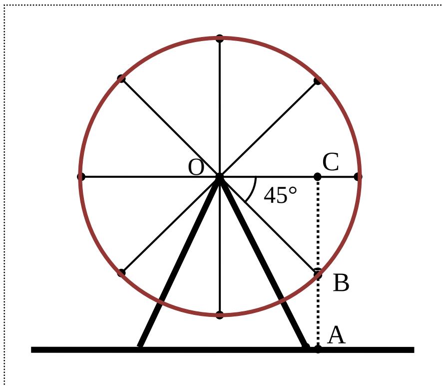
$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$



Movimiento. La rueda comienza a moverse regularmente dando una vuelta cada minuto, ¿cómo cambia la altura de la canasta que inicia el movimiento en la parte más baja? Para darnos una idea del movimiento, realicemos ocho observaciones cada minuto y durante dos minutos a intervalos iguales de tiempo. Como cada observación se realiza cada octavo de minuto, esto significa que en dos minutos se consideran 17 posiciones de la canastilla. Si la canastilla comienza su movimiento en la parte más baja en un octavo de minuto estará en la posición de inicio de la canastilla que le sigue. En otro octavo de minuto está en la posición de la siguiente. Así con las demás posiciones. Al cabo de un minuto vuelve a su posición de inicio y repite su movimiento. Otra idea, si se tomara una fotografía de la rueda cada octavo de minuto se obtendría la misma figura de la rueda de la fortuna (como sí no se moviera). Para describir la altura de la canastilla, complete la tabla siguiente.

Tiempo (minutos)	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	……	$\frac{16}{8}$
Altura (metros)	1		6		11		6		1			1

Hay alturas que son fáciles de determinar cómo las observadas cada dos octavos de minuto. Para los otros tiempos, pueden determinarse pero es necesario realizar algunos cálculos. Comencemos con la posición de la canastilla a 1/8 de minuto, la que se encuentra en la posición B de la figura siguiente.



Por los datos, se sabe que $\overline{AC} = 6$ y $\overline{OB} = 5$, en la figura la altura buscada es $\overline{AB}$.

Como el $\measuredangle COB = 45°$ y el triángulo OCB es rectángulo, se concluye que $\overline{BC} = \overline{OC}$.

Por el teorema de Pitágoras

$$\overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 = 5^2$$
$$\overline{BC}^2 + \overline{BC}^2 = 25$$
$$2\overline{BC}^2 = 25$$
$$\overline{BC}^2 = 12.5$$
$$\overline{BC} = \pm\sqrt{12.5} \approx \pm\ 3.5355$$

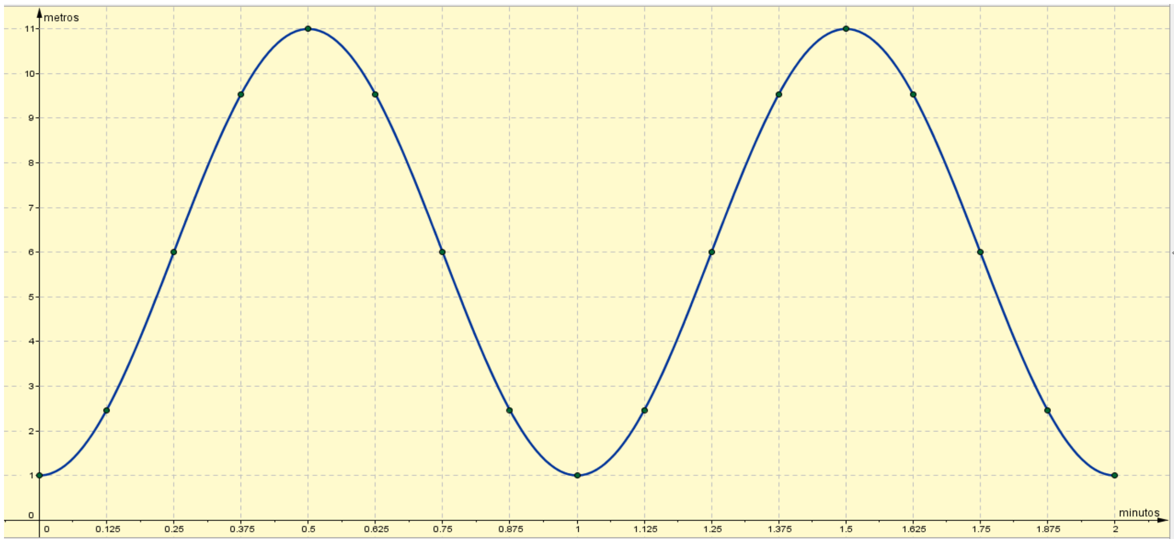
Además,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$
$$6 = \overline{AB} + \sqrt{12.5}$$
$$6 - \sqrt{12.5} = \overline{AB}$$
$$\overline{AB} \approx 2.4645$$

El resultado indica que la canastilla a 1/8 de minuto se encuentra aproximadamente a 2.4645 metros de altura, con respecto al suelo.

Por analogía a los 3/8 de minuto la canastilla se encuentra a una altura de $6 + \sqrt{12.5} \approx 9.5355$ metros. Por simetría puede determinar las alturas para los restantes tiempos.

Ahora tratemos de "ver" el movimiento en una gráfica. Construya la gráfica que relacione la altura de la canastilla y el tiempo transcurrido. Para lograrlo se localizan los diecisiete puntos en un sistema coordenado, en la que hay que elegir las escalas adecuadas y se unen con una línea continua. En la *figura 3.1*, se aprecia que el movimiento es ligeramente suave (en el primer octavo de minuto). En los siguientes dos octavos de minuto, sube un poco más rápido, para después subir suavemente en otro octavo de minuto y llegar a su máxima altura. En el siguiente medio minuto, baja como subió: primero suave, después rápido para terminar suave a la posición más baja y a partir de aquí se repite el ciclo. Este tipo de movimientos se dice que son periódicos, en este caso, la gráfica se repite cada minuto.



Ejercicios

1) Modele el movimiento de esta canastilla, pero observando la posición de la rueda cada doceavo de minuto y durante dos minutos. Construya la gráfica. Note que la gráfica es la misma, sólo que se consideran más puntos (como ayuda, utilice un triángulo equilátero en la posición conveniente).
2) Modele el movimiento de la canastilla que se encuentra en la parte más alta al realizar ocho observaciones cada minuto y durante dos minutos. Note que la gráfica se parece a la anterior, sólo que se encuentra recorrida horizontalmente (están desfasadas).

Este tipo de gráficas son precisamente las que se obtienen al estudiar las ondas: acústicas, electromagnéticas, en el agua, en las vibraciones de los átomos en un cristal, etc. Así como de otros movimientos cíclicos. Para representarlas matemáticamente es necesario utilizar las funciones trigonométricas y es necesario redefinir algunos conceptos y en otros definirlos por primera vez.

Tabla de contenido

3.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO

El estudio con las razones trigonométricas se ha realizado básicamente para ángulos agudos, las cuales se definieron y aplicaron en los triángulos rectángulos. En ellas, el dominio de cada razón es únicamente el correspondiente a los ángulos de cero a noventa grados. Pero, para analizar los problemas periódicos es necesario ampliar el dominio para todos los valores de ángulos. Para lograrlo, ya no se hace a través del triángulo ahora se realiza a partir de las coordenadas de un punto y teniendo en mente la imagen de la circunferencia junto con la medida de los arcos.

3.2.1 Ángulo y su medida

Un **ángulo** se define como aquella parte del plano que se genera al girar el rayo $\overrightarrow{OP}$ desde la posición $\overrightarrow{OA}$.

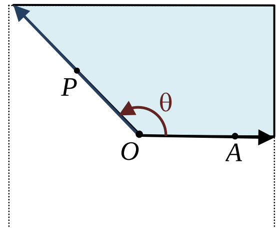


Fig. 3.2. Ángulo

En la *figura 3.2*, se muestra el $\sphericalangle AOP = \theta$, en donde $\overrightarrow{OA}$ es llamado el lado inicial del ángulo, $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal (o final) y el punto O es llamado vértice.

Actualmente, hay tres formas de medir los ángulos: la forma sexagesimal (como se trabajó desde la primaria), la circular (en radianes, es la medida científica) y la centesimal (esta medida da la impresión que ya quedó como recuerdo histórico).

Medida sexagesimal

Si $\overrightarrow{OP}$ coincide con $\overrightarrow{OA}$ porque no se ha generado ángulo, el **ángulo** es **nulo**. Cuando $\overrightarrow{OP}$ comienza a girar el ángulo aumenta en magnitud, al coincidir de nuevo con $\overrightarrow{OA}$ se ha generado un **ángulo completo** (o de una vuelta, o de una revolución) de 360 grados, que se escribe 360°. Pero, $\overrightarrow{OP}$ puede seguir girando y engendrar un ángulo con magnitud mayor.

Se ha convenido que los ángulos generados en sentido contrario a las manecillas del reloj son ángulos positivos y los que se generan en el sentido de las manecillas son negativos. Además, la medida de los ángulos se da en términos del ángulo de 360°. Por ejemplo: (a) Al considerar un octavo de rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj el ángulo generado es de 360°/8 = 45°, (b) si se gira en el sentido de las manecillas del reloj un sexto de una rotación completa, el ángulo será de -360°/6 = -60°; (c) el ángulo de 765° se genera con dos rotaciones en el sentido positivo y un octavo más de rotación, pues 765° = 2(360°) + 45° —el ángulo de 45° y 765° tienen en coincidencia tanto el lado inicial como el terminal, se dice que son coterminales—; (d) el ángulo de 1° es la 360-ava parte de una vuelta.

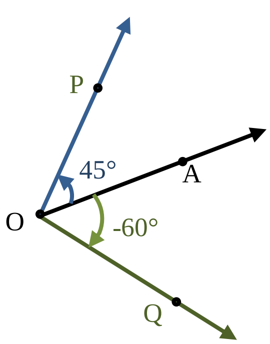


Fig. 3.3. Ángulos con sentido

En la *figura 3.3*, el $\sphericalangle$AOP = 45° y $\sphericalangle$AOQ = -60°.

Minutos y segundos.

Desde los babilonios, las fracciones de grado se han expresado en minutos y segundos, en las que se utiliza el número 60 como base. A saber:

$$1° = 60 \text{ minutos, escrito } 60'$$

Y

$$1' = 60 \text{ segundos, escrito } 60''$$

Ejemplo 1. a) Convierta 57.23° a grados, minutos y segundos.
(b) Convierta 39° 54’ 54’’ a notación decimal en grados.

Solución.

(a) 57.23° = 57° + 0.23 (60’) porque 1° = 60’
= 57° + 13.8’
= 57° + 13’ + 0.8 (60’’) porque 1’ = 60’’
= 57° + 13’ + 48’’

Entonces

57.23° = 57° 13’ 48’’

(b) Como $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$ tenemos que

$$39°54'54'' = 39° + 54\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} + 54\left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$$
$$= 39° + 0.9° + 0.015°$$
$$= 39.915°$$

. . .

MEDIDA EN RADIANES

Una forma diferente de medir los ángulos es en radianes. Su medición se basa en la longitud del arco de un círculo y de su radio. Veamos la justificación, sitúe el vértice del ángulo θ en el centro del circulo de radio r positivo, entonces θ es un ángulo central. La región del círculo contenida dentro del ángulo central se denomina sector circular, como lo muestra la *figura 3.4*. Ahora, represente con s la longitud del arco en el círculo que sea opuesta al ángulo central. En este caso, cada valor de θ tiene asociado uno y sólo un valor del arco y viceversa.

$$s = f(\theta)$$

s es una función uno a uno de θ Para determinar su regla de correspondencia, recordemos que un ángulo de una vuelta equivale a 360° y el arco correspondiente es $2\pi r$. Para dos vueltas, se relaciona 720° con $4\pi r$, para 90° será $\pi r/2$, etc. Entonces s es directamente proporcional a θ La ecuación que relaciona a s con θ tiene la forma $s = k\theta$.

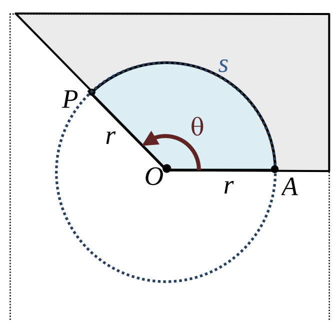


Fig. 3.4. Ángulo central

Al sustituir la relación 360° con $2\pi r$, resulta $2\pi r = k\,(360°)$ o bien, $k = \pi r/180°$. Por lo que, la regla de correspondencia que relaciona el arco con el ángulo queda:

$$s = \frac{\pi r}{180°}\,\theta \qquad (3.1)$$

Ejemplo 2. Relación longitud del arco y el ángulo.

(a) Determine la longitud del arco asociado en una circunferencia de radio 3, para los ángulos de 60°, -90° y 720°.

(b) ¿Cuál es la medida de un ángulo central θ opuesto a un arco de 24 metros en un círculo cuyo radio mide 8 metros?

(c) ¿Cuál es la medida del ángulo opuesto a un arco de igual longitud que el radio?

Solución

(a) Para θ = 60° la longitud del arco asociado es $s = \frac{\pi(3)}{180°} \times 60° = \pi$.

Para θ = -90° el arco mide $s = \frac{\pi(3)}{180°} \times (-90°) = -\frac{3}{2}\pi$.

Para θ = 720° la longitud del arco es $s = \frac{\pi(3)}{180°} \times 720° = 12\pi$.

(b) se sustituye la información en la ecuación (3.1), se tiene

$$24 = \frac{\pi(8)}{180°}\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{24 \times 180°}{\pi(8)} = \frac{540°}{\pi} \approx (171.8873385)°$$

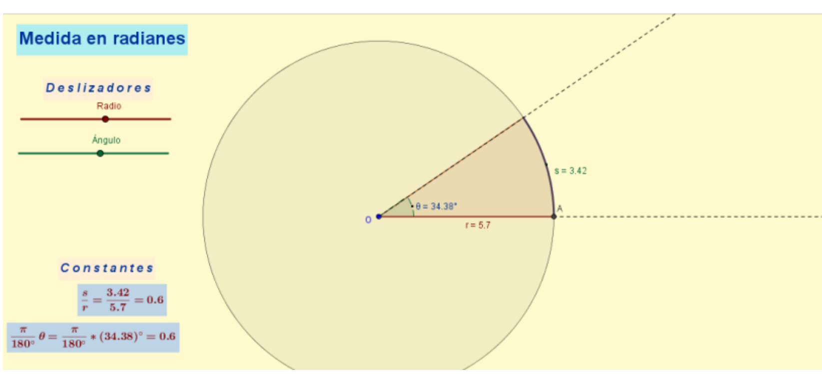
(c) Como $s = r$, resulta: $s = \frac{\pi r}{180°}\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{180°}{\pi} \approx 57.29577951°$

. . .

Nuevamente trabajemos con la ecuación (3.1), porque con ella se obtiene un resultado interesante al transponer el radio. Veamos:

$$\frac{s}{r} = \frac{\pi}{180°}\theta \tag{3.2}$$

Al analizarla se concluye que, para un ángulo central dado en grados sexagesimales, s/r siempre es constante sin importar el tamaño del círculo utilizado. Por ello, s/r también puede considerarse como otra forma de medir un ángulo y sería proporcional a θ. *Si tiene dudas, puede observar la práctica en GeoGebra para analizar esta idea. La práctica se llama* [Medida en radianes.ggb.]



DEFINICIÓN. ÁNGULO EN RADIANES

El ángulo θ_r medido en radianes (abreviado *rad*), en un círculo de radio $r > 0$, está dado por:

$$\theta_r = \frac{s}{r} \ rad$$

en donde, s es la longitud del arco asociado al ángulo θ_r en la circunferencia.

Comentario. En el caso que $s = r$, se tiene $\theta_r = r/r = 1$. Así, **un radián es la medida del ángulo central en un círculo que intercepta un arco de la misma longitud que el radio del círculo**, equivale aproximadamente a 57.29577951°. La medida radián es un número sin unidades, pues la unidad de longitud del arco y del radio es la misma y se cancelan al realizar el cociente. Para evitar confusiones con los grados sexagesimales es común que se le agregue al ángulo la abreviatura ***rad***, pero recuerde que no es unidad de medida.

Ejemplo 3. Ejemplos con la medida en radianes.

(a) ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo central opuesto a un arco de 24 pies en un círculo de radio 8 pies?

(b) (Ingeniería). Una banda conecta una polea de 5 centímetros de radio con otra de 15 cm de radio. Si la polea más grande gira 10 radianes, ¿cuántos gira la polea más pequeña?

Solución.

(a) En el inciso (c) del anterior ejemplo, el ángulo en grados sexagesimales fue aproximadamente 171° 53’ 14.4’’. Ahora en radianes es de

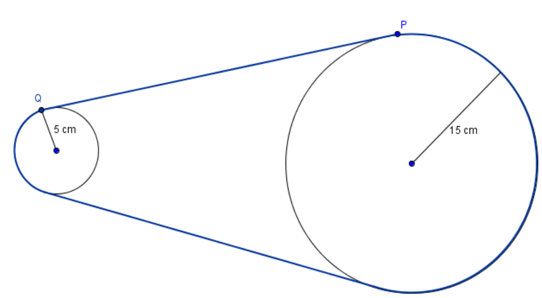
$$\theta_r = \frac{s}{r} = \frac{24 \text{ pies}}{8 \text{ pies}} = 3 \ rad$$

(b) Cuando la polea más grande gira 10 radianes, suponiendo que no hay deslizamiento de la banda sobre las poleas, el punto P en esta circunferencia recorrerá la misma longitud que el punto Q en la otra circunferencia.

En la polea grande, P recorre $s = r\theta_r = (15\ cm)(10\ rad) = 150\ cm$

En la polea más pequeña, Q también recorre $150\ cm$ y el ángulo generado es:

$$\theta_r = \frac{s}{r} = \frac{150 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 30 \text{ rad}.$$



Ejemplo 4. (Física). Para una persona en la superficie de la Tierra, determine su velocidad lineal y su velocidad angular.

Solución.

La velocidad lineal es lo que se recorre por unidad de tiempo, $v = d/t$. Suponiendo un radio terrestre de 6379 kilómetros, una persona sobre su superficie recorre $2\pi r = 2\pi(6379 \text{ km}) = 40{,}080.439$ km en 24 horas. Entonces

$$v = \frac{d}{t} = \frac{40{,}080.439 \text{ kilómetros}}{24 \text{ horas}} \approx 1670 \frac{km}{h}$$

La velocidad angular se define en forma parecida a la lineal. Es decir, La velocidad angular es lo que se gira (en radianes) por unidad de tiempo, $w = \theta_r/t$. La Tierra da una rotación en 24 horas, entonces el ángulo generado es $\theta_r = 2\pi$ y

$$w = \frac{\theta_r}{t} = \frac{2\pi \text{ radianes}}{24 \text{ horas}} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{rad}{h} \approx 0.261799387 \frac{rad}{h}$$

Comentario. La relación entre las dos velocidades se puede obtener al despejar el tiempo de la frecuencia angular, $t = \theta_r/w$, y se sustituye en la velocidad lineal. Teniendo, $v = d/t = d/(\theta_r/w) = (d\,w)/\theta_r$. Este resultado aplicado a un círculo se considera la situación particular: d como el perímetro (dos-pi-erre) y θ_r el ángulo de una vuelta (dos-pi), por lo que $d/\theta_r = r$. En consecuencia,

$$v = wr$$

Para el problema de una persona sobre la superficie de la tierra se confirma: $v = (\pi/12)*6379 = 1670\ km/h$

. . .

CONVERSIÓN DE UNIDADES

Representando con θ_d el ángulo en grados sexagesimales — d por degree en inglés y así se denomina la unidad en las calculadoras—, la ecuación (3.2) se puede poner como

$$\theta_r = \frac{\pi}{180°}\,\theta_d \qquad (3.3)$$

La cual es la fórmula de conversión entre los dos tipos de ángulos. Hay una relación directamente proporcional, así que podemos utilizar la regla de tres directa. También, a partir de ella, se puede deducir las siguientes:

FÓRMULAS DE CONVERSIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$1^\circ \equiv \frac{\pi}{180} rad \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ rad} \equiv \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Ejemplo 5. Conversiones grados - radianes.

(a) Encuentre la medida en radianes de un ángulo de 180°.
Solución. (Con la forma general):

$$\theta_r = \frac{\pi}{180°}\,\theta_d = \frac{\pi}{180°}(180°) = \pi\,rad$$

$$\therefore \quad 180° \equiv \pi\,rad$$

(b) (Forma de conversión). Encuentre la medida en grados de un ángulo de dos radianes.

$$2\ rad = 2(1\ rad) \equiv 2\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} \approx 114.591559°.$$

Es decir, $2\,rad \equiv 114.591559°$.

(c) (Regla de tres). Calcule los grados sexagesimales equivalente a 6 *rads*.

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \ — \ 360° \\ 6 \ — \ \theta_d \end{array}\right\} \rightarrow \quad 360°(6) = 2\pi\theta_d$$

$$\theta_d = \frac{360°(6)}{2\pi} = \frac{1080°}{\pi} \approx 343.7747°$$

. . .

Comentario. Utilizaremos θ en vez de θ_r o θ_d sin distinción, cuando el contexto permita trabajarlo. Recuerde, en el ámbito científico la unidad que debe utilizar es la de radianes (o unidad circular).

Tabla de contenido

EJERCICIOS 3.1:

1) Encuentre los grados y los radianes correspondientes a cada uno de los siguientes ángulos, referidos a una rotación completa:

a) 1/9 de rotación.
b) 5/12 de rotación.
c) 2/3 de rotación.
d) ¼ de rotación.
e) 3/8 de rotación.
f) 1/360 de rotación.
g) 13/12 de rotación.
h) 5/4 de rotación.
i) 3/18 de rotación.

2) Correspondencia entre radián y grado. Termine la siguiente tabla

Radianes		$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$			$3\pi/2$	2π
Grados	0°		45°			135°	180°		360°

3) Encuentre el ángulo coterminal entre 0° y 360° del ángulo:

a) 370°
b) 1000°
c) –78°
d) –115°
e) 452°
f) –510°

4) Encuentre el ángulo coterminal entre 0 y 2π del ángulo:

a) $7\pi/3$	b) $-\pi/2$	c) $-3\pi/2$
d) $9\pi/2$	e) $17\pi/6$	f) $5\pi/2$

5) El péndulo de un reloj mide 45 cm y oscila a lo largo de un arco de 12 cm. Encuentre el ángulo central, en radianes y en grados, que se genera.

6) Astronomía. ¿Qué ángulo medido en radianes barre una línea del Sol a La Tierra en una semana? Suponga que la órbita de La Tierra es circular y que el año tiene exactamente 52.15 semanas. Exprese el valor en términos de π y el aproximado en decimales.

7) La tierra demora 24 horas en dar una rotación completa sobre su eje, ¿cuánto demora en girar un ángulo de 240°?

8) Una rueda hidráulica de 2 metros de radio, se coloca sobre la superficie de un río. La rueda da 15 vueltas en un minuto, ¿cuál es la velocidad del río? La velocidad lineal del río es la misma velocidad que un punto sobre la superficie de la rueda hidráulica, ¿cuál es la velocidad lineal de un punto sobre la rueda hidráulica en km/h?

9) Un satélite a 800 km de altura sobre La Tierra, completa una órbita circular en 120 minutos. Determine su velocidad angular y su velocidad lineal en km/h.

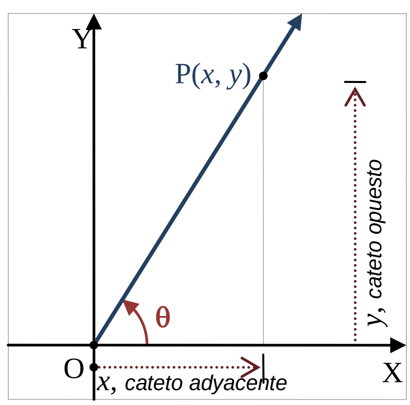
10) Un yoyo al lanzarse da seis revoluciones en cuatro segundos y desenrolla sus 100 cm de cuerda (a) determine la velocidad angular del yoyo. (b) Calcule la velocidad lineal del yoyo, en centímetros por segundo.

11) Determine la distancia entre dos puntos sobre la superficie de la Tierra si el ángulo central tiene 10°. El ángulo central de la Tierra tiene como vértice el centro de la misma y el radio terrestre es de 6379 km.

Tabla de contenido

3.2.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Las definiciones de las funciones trigonométricas se basan en las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que se encuentra en el lado terminal de un ángulo normal —**Ángulo normal** es el localizado en el plano cartesiano cuyo lado inicial coincide con la parte positiva del eje X y el lado final es el rayo $\overrightarrow{OP}$—. Para el caso de ángulos agudos, el lado terminal se encuentra en el primer cuadrante. Al formar un triángulo rectángulo con los catetos paralelos a los ejes y del tamaño de las coordenadas del punto, podemos considerar: el cateto opuesto como la ordenada del punto, el cateto adyacente como la abscisa y la hipotenusa es la distancia del punto al origen. Con esta interpretación, las funciones trigonométricas se definen como una generalización de las definiciones para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.



DEFINICIÓN. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

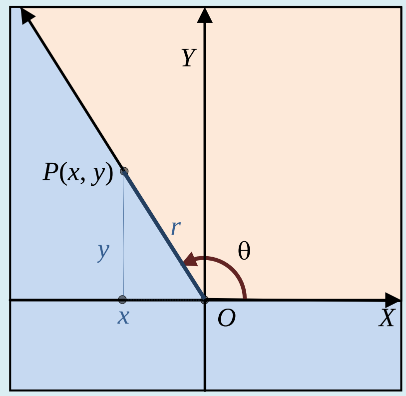
Sea θ un ángulo en la posición normal, $P(x, y)$ un punto en su lado terminal diferente al origen, y r la distancia del punto P al origen ($r^2 = x^2 + y^2$), entonces las funciones trigonométricas se definen como:

Seno es la razón de la ordenada del punto P a su distancia al origen.

$$\boldsymbol{sen(\theta) = \frac{y}{r}}$$

Coseno es la razón de la abscisa del punto P a su distancia al origen.

$$\boldsymbol{cos(\theta) = \frac{x}{r}}$$



Tangente es la razón de la ordenada a la abscisa del punto P.

$$\boldsymbol{tan(\theta) = \frac{y}{x}},\ x \neq 0$$

Cotangente es la razón de la abscisa a la ordenada del punto P.

$$\boldsymbol{cot(\theta) = \frac{x}{y}},\ y \neq 0$$

Secante es la razón de la distancia al origen del punto P a su abscisa.

$$\boldsymbol{sec(\theta) = \frac{r}{x}},\ x \neq 0$$

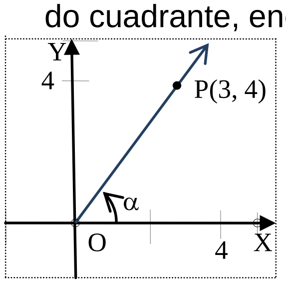
Cosecante es la razón de la distancia al origen del punto P a su ordenada.

$$\boldsymbol{csc(\theta) = \frac{r}{y}},\ y \neq 0$$

Por supuesto, al considerar diferentes puntos sobre el lado terminal del ángulo normal que desee, se pueden construir triángulos rectángulos adecuados, con lados paralelos a los ejes. Mediante la semejanza de triángulos y con cierto cuidado con los signos, nos damos cuenta que cada razón sólo depende de θ y no del punto utilizado del lado terminal. Entonces las seis razones están determinadas en forma única. Cuando se le olviden las definiciones con las coordenadas imagínese un triángulo rectángulo en el primer cuadrante y haga la conversión de los lados del triángulo por coordenadas del punto.

Ejemplo 6. (a) Obtenga las funciones trigonométricas del $\angle AOP = \alpha$ cuando $P(3, 4)$. (b) Obtenga el seno y el coseno del $\angle AOQ = \beta$ para $Q(6, 8)$.
(c) considere $\cos(\alpha) = -12/13$ y que α es un ángulo normal en el segundo cuadrante, encuentre $sen(\alpha)$.

Solución.



(a) Para determinar las funciones trigonométricas es necesario determinar la distancia r que tiene el punto $P(3, 4)$ con el origen.

$$r^2 = (3)^2 + (4)^2 \quad \Rightarrow \quad r = 5.$$

Con esto:

$$\text{sen}\,(\alpha) = \frac{4}{5}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{3}{5}, \qquad \tan(\alpha) = \frac{4}{3},$$

$$\cot(\alpha) = \frac{3}{4}, \qquad \sec(\alpha) = \frac{5}{3}, \qquad \csc(\alpha) = \frac{5}{4}.$$

(b) Como $r^2 = (6)^2 + (8)^2 = 100$, entonces Q está alejado del origen 10 unidades. Los valores de las funciones pedidas, son:

$$\text{sen}\,(\beta) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \cos(\beta) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Comentario. Si observa los resultados con los del anterior inciso, observará que son iguales. Esto es debido a que tanto el punto P como el punto Q están en el mismo rayo terminal. Por lo que $\alpha = \beta$.

(c) Una forma de hacerlo es determinar un punto $P(x, y)$ en el lado terminal del ángulo.

Como $\cos(\alpha) = \frac{x}{r} = -\frac{12}{13}$, y sabiendo que r > 0,

Podemos considerar $x = -12$ y $r = 13$.

Ahora falta obtener el valor de y. Con $r^2 = x^2 + y^2$, se tiene

$$(13)^2 = (-12)^2 + y^2$$
$$169 - 144 = y^2$$

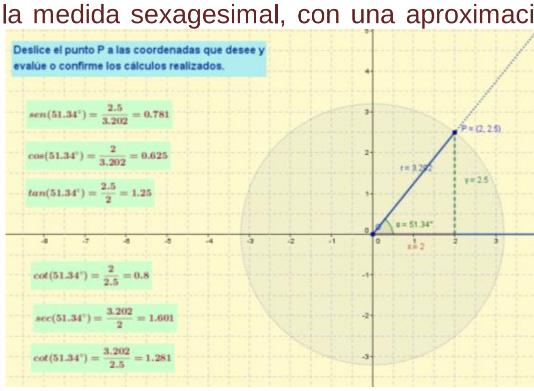
De donde $y = \pm 5$.

Como el ángulo está en el segundo cuadrante, el punto por considerar en su lado terminal debe tener una ordenada positiva. Por lo que, P(-12, 5) y

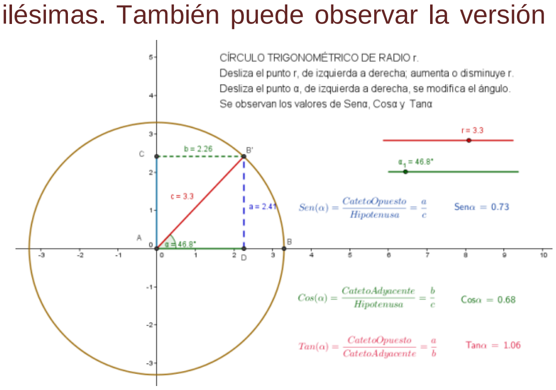
sen(α) = 5/13.

. . .

¿Quiere visualizar la evaluación de las funciones trigonométricas? Ayúdese de la práctica en GeoGebra llamada FuncionesTrigonométricas.ggb. El ángulo sólo está referido a una vuelta y en la medida sexagesimal, con una aproximación a milésimas. También puede observar la versión



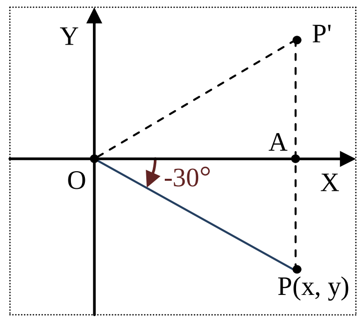
CirRr_FunTrig.ggb.



Ejemplo 7.(a) Determine el seno, coseno y tangente para el ángulo -π/6 (-30°).
(b) Calcule el seno, tangente y secante para el ángulo de 135° (3π/4).
(c) Obtenga las funciones trigonométricas para el ángulo de 90° (π/2).

Solución.

(a) Para el ángulo -π/6 ≡ -30° se necesita determinar las coordenadas de uno de sus puntos en el lado terminal. Sea P(x, y) dicho punto, entonces se encuentra en el cuarto cuadrante. Ahora, considere su simétrico P'(x, -y) con respecto al eje X. Se tiene que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ en el triángulo POP', de donde los ángulos opuestos a los lados OP y OP' son congruentes y deben medir 60°, ya que ∠POP' = 60°. En consecuencia el triángulo POP' es equilátero.



Proponiendo lados de 2 unidades, se tiene: $\overline{OP} = 2$ y $\overline{PA} = 1$, resulta

$$\overline{OA}^2 + (1)^2 = (2)^2$$

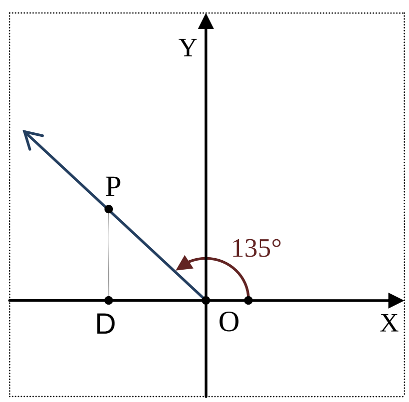
$$\overline{OA}^2 = 3$$

$$\overline{OA} = \pm\sqrt{3}$$

P al pertenecer al cuarto cuadrante tiene la abscisa positiva y la ordenada negativa, de donde $P(\sqrt{3}, -1)$. Como r = 2, las funciones trigonométricas pedidas para el ángulo -π/6 ≡ -30°, son:

$$sen(-\pi/6) = -\frac{1}{2}, \qquad cos(-\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad tan(-\pi/6) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(b) Sea P(x, y) un punto del lado terminal del ángulo normal 135° ($\frac{3}{4}\pi$), construya el triángulo rectángulo ODP. Como ∠DOP = 45°, se tiene que ∠OPD = 45°. Entonces el triángulo ODP es isósceles. Ahora, se propone $\overline{DO} = \overline{DP} = 1$. El punto al estar en el segundo cuadrante tiene abscisa negativa y ordenada positiva, de donde P(-1, 1) y $r = \sqrt{2}$. De donde,



$$\text{sen}(135°) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan(135°) = -1, \quad \text{y}$$

$$\sec(135°) = -\sqrt{2}.$$

(c) Para el ángulo de 90° (ángulo recto) se le puede asociar el punto P(0, 1). Además, se tiene que r = 1, en consecuencia:

$$sen(90°) = \frac{1}{1} = 1, \qquad cos(90°) = \frac{0}{1} = 0, \qquad tan(90°) = \frac{1}{0} \text{ indefinido},$$

$$csc(90°) = \frac{1}{1} = 1, \qquad sec(90°) = \frac{1}{0} \text{ indefinido}, \qquad cot(90°) = \frac{0}{1} = 0$$

IDENTIDADES.

Analizando los ejemplos de las funciones trigonométricas y en general a partir de la definición, inmediatamente se pueden concluir algunas identidades trigonométricas, las cuales se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

Para θ cualquier ángulo (en todos los casos se restringe a que ambos lados de una ecuación estén definidos), se tiene:

Identidades recíprocas.

$$csc(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)}, \quad sec(\theta) = \frac{1}{cos(\theta)}, \quad cot(\theta) = \frac{1}{tan(\theta)}.$$

Identidades del cociente

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}, \qquad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}.$$

Identidad pitagórica

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

Ejemplo 8. Justificación de algunas identidades

(a) Muestre que: $\csc(\theta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}$.

Directamente de la definición, se tiene que

$$\csc(\theta) = \frac{r}{y} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}.$$

(b) Con la pitagórica.

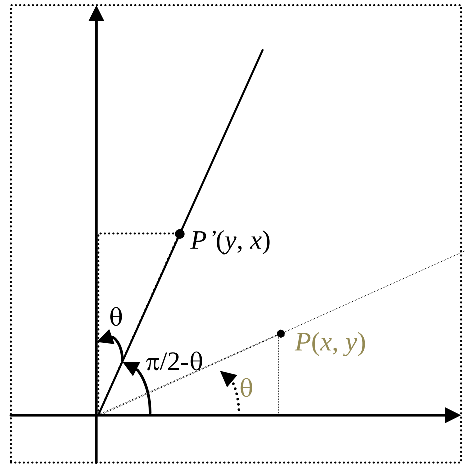
$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}$$

$$= \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\therefore \quad sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$

(c) (Identidades complementarias). Aunque se pusieron las identidades más utilizadas, hay muchas más. Por mencionar algunas: las complementarias, suplementarias, para la suma de ángulos, resta de ángulos, para la mitad de un ángulo, etc. Ahora obtengamos las funciones trigonométricas del ángulo $\pi/2 - \theta$ (el ángulo complementario de θ). Primero se considera el ángulo de referencia θ, donde el punto en el lado terminal es $P(x, y)$. Segundo. Al rotarlo y girarlo podemos considerar el ángulo complementario $\pi/2 - \theta$, de donde un punto en el lado terminal es $P'(y, x)$. De donde:



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{r} = sen(\theta)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{r}{x} = \sec(\theta)$$

. . .

Tabla de contenido

EJERCICIOS 3.2.

1) Calcule las funciones trigonométricas del ángulo normal θ, Si $P(-2, 1)$ está en el lado terminal de θ. Indique la ecuación del rayo OP.

2) El lado terminal de un ángulo normal está en el cuadrante III y cae sobre la línea $y = 3x$. Determine las funciones trigonométricas.

3) Obtenga las funciones trigonométricas de θ cuando su lado terminal biseca el cuarto cuadrante.

4) Sabiendo que tan(θ) = ¾ y que θ es un ángulo normal en el tercer cuadrante, determine las otras cinco funciones trigonométricas.

5) Sabiendo que tan(θ) = ¾ y que θ es un ángulo agudo, determine las funciones trigonométricas del suplementario de θ (el suplementario de θ es $\pi - \theta$).

6) Obtenga las funciones trigonométricas del ángulo $-\pi/2$.

7) ¿Para qué ángulos la función trigonométrica tangente no está definida?

8) Complete la siguiente tabla de las funciones trigonométricas para los ángulos que se piden. En la función seno procure poner una fracción con denominador el número 2, ¿aprecia alguna secuencia?

Ángulo	sen(θ)	cos(θ)	tan(θ)	cot(θ)	sec(θ)	csc(θ)
0°	$\frac{}{2} = 0$	1				
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$					2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	1		
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{}{2}$					
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0	Indefinida			

Para memorizar los valores básicos del seno y coseno, consulte y analice la práctica en GeoGebra con título SenoCoseno.ggb.

9) Signo de las funciones trigonométricas, según en el cuadrante que estén.

Si al ángulo θ se le asocia un punto que se encuentra en el segundo cuadrante, el punto tiene abscisa negativa y ordenada positiva. Como el radio de la circunferencia es positivo, se tiene que la función seno y la cosecante son positivas las demás funciones son negativas. Deduzca el signo para los demás cuadrantes y llene la siguiente tabla

Cuadrante	sen(θ)	cos(θ)	tan(θ)	cot(θ)	sec(θ)	csc(θ)
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III						
IV						

10) Encuentre el cuadrante que contiene a θ si se cumple que: cos(θ) > 0 y sen(θ) < 0.

11) Encuentre el cuadrante que contiene a θ si se cumple que: cos(θ) < 0 y csc(θ) < 0.

12) Justifique las identidades trigonométricas presentadas en el teorema.

13) ¿Existe un ángulo θ tal que 5 sen(θ) = 6? Explíquelo.

14) Determine todos los valores de ángulo normal que cumpla con que sen(θ) = 1.

Tabla de contenido

3.3 GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON EL CÍRCULO UNITARIO

Construir la gráfica de una función trigonométrica es necesario considerar su dominio a lo largo de todos los números reales. Y, nos es conveniente el uso de la medida de ángulos en radianes, ya que es una medida de ángulo que no tiene unidades. Además, el uso de la medida circular requiere hablar de los ángulos centrales a una circunferencia de radio dado. Pero, al no importar el tamaño de la circunferencia utilizada, por simplicidad con el ángulo y con las funciones trigonométricas básicas se utiliza la unitaria.

3.3.1 CIRCUNFERENCIA UNITARIA

Considere la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y con radio uno (así se llama circunferencia unitaria). Ahora, sea $P_\theta(u, v)$ un punto que está en la circunferencia (se llama punto circular) y a la vez en el lado terminal del ángulo central θ en su posición normal, como se muestra en la *figura 3.5*. Ahí, las coordenadas del punto P cumplen con la ecuación $u^2 + v^2 = 1$. Además, un ángulo central en radianes se definió como: la razón de la longitud del arco subtendido por el ángulo θ al radio de la circunferencia. Para la unitaria, $\theta = x/1 = x$. Es decir, el lado terminal del ángulo θ ha recorrido x unidades a lo largo de la circunferencia unitaria. Es como considerar que en la circunferencia unitaria y a partir del punto (1, 0) se enrolla toda una recta numérica, como se muestra en la *figura 3.6*.

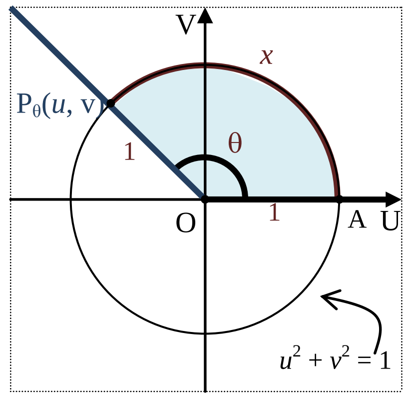


Fig. 3.5. Punto circular

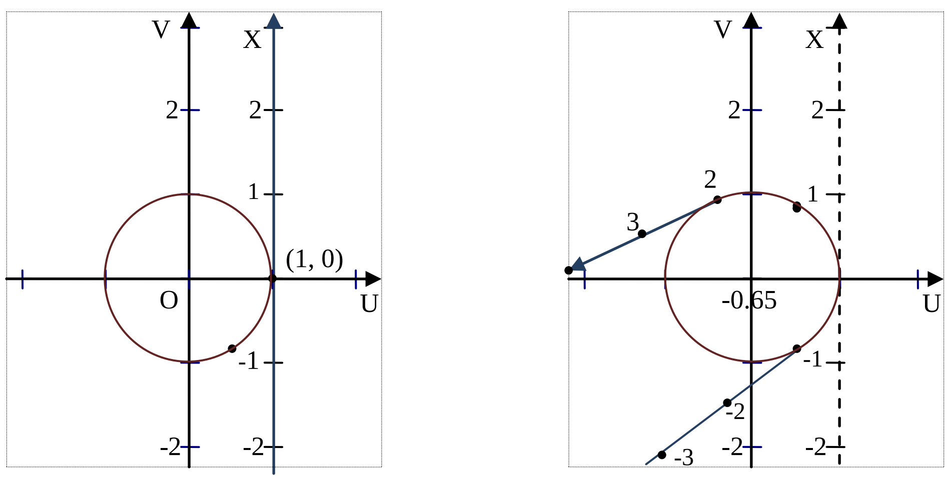


Fig. 3.6. La recta numérica X se enrolla en el círculo unitario

Con esta consideración las funciones trigonométricas para el punto circular $P_\theta(u, v)$, que se encuentra en el lado terminal del ángulo de x radianes, quedan como (recuerde $r = 1$ y $\theta = x$):

$\text{sen}(x) = v$, $\cos(x) = u$, $\tan(x) = v/u$,

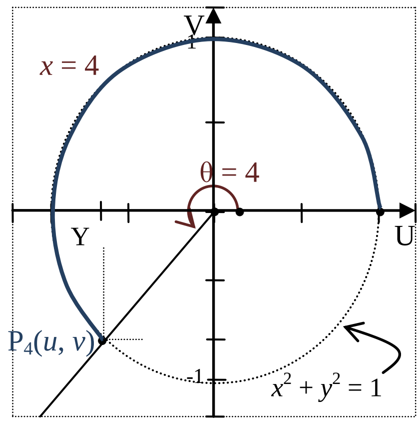
$\cot(x) = u/v$, $\sec(x) = 1/u$ y $\csc(x) = 1/v$.

. . .

Ejemplo 9. Aproxime los valores de sen(4) y cos(4). Además, dé una interpretación geométrica.

Solución.

El ángulo de 4 radianes no es un múltiplo entero de $\pi/6$ o de $\pi/4$, en consecuencia sólo podemos aproximarlo. Con la calculadora primero se pone en el *modo de radianes*, y después se obtienen las funciones:



$\cos(4) \approx -0.6536$ y $\text{sen}(4) \approx -0.7568$

Al considerar la circunferencia unitaria centrada en el origen y el ángulo 4 radianes en su posición normal, los valores obtenidos son las coordenadas del punto P. Pues,

$u = \cos(x)$ y $v = \text{sen}(x)$,

se tiene

$P_4(u, v) \approx P(-0.6536, -0.7568)$.

El punto está situado en el tercer cuadrante, pues ambas coordenadas son negativas.

. . .

En lo subsecuente sólo se analizarán las funciones seno y coseno por ser las coordenadas directas del punto circular y la tangente (las demás se dejan como ejercicios). Debido al uso de la circunferencia para el tratamiento de las funciones trigonométricas algunas veces son llamadas funciones circulares.

Tabla de contenido

3.3.2 GRÁFICA DE $y = sen(x)$

DOMINIO Y RANGO

Elijamos un punto circular sobre la circunferencia unitaria y que se mueva sobre ella en cualquier sentido y sin restricciones, entonces el ángulo $\theta = x$ toma como valor cualquiera de los números reales. Decimos que:

Dominio de $sen(x)$ es $\mathbb{R}$

Como $v = \text{sen}(x)$ representa a la ordenada de los puntos circulares, se tiene que:

$$-1 \leq sen(x) \leq 1$$

Es decir,

Rango de $sen(x)$ es el intervalo cerrado [-1, 1].

GRÁFICA

La gráfica de la función seno es posible realizarla como la gráfica de todos los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfacen la ecuación

$$y = \text{sen}(x), \quad x \text{ es un número real.}$$

En vez de la tabulación con muchos puntos y determinados con la calculadora, se aprecia de manera más agradable la función al observar el movimiento de la ordenada del punto circular sobre la circunferencia unitaria, $P_x(u, v)$. En la *figura 3.7*, el punto $P_x(u, v)$ del círculo unitario, nos genera el punto $P(x, y)$ de la función seno, donde x es la longitud del arco generado sobre la circunferencia. Mientras que y es el valor v. El círculo no es parte de la función, por lo general se efectúa mentalmente. Si la imagen no es entendible, consulte la práctica [Seno unitario.ggb]

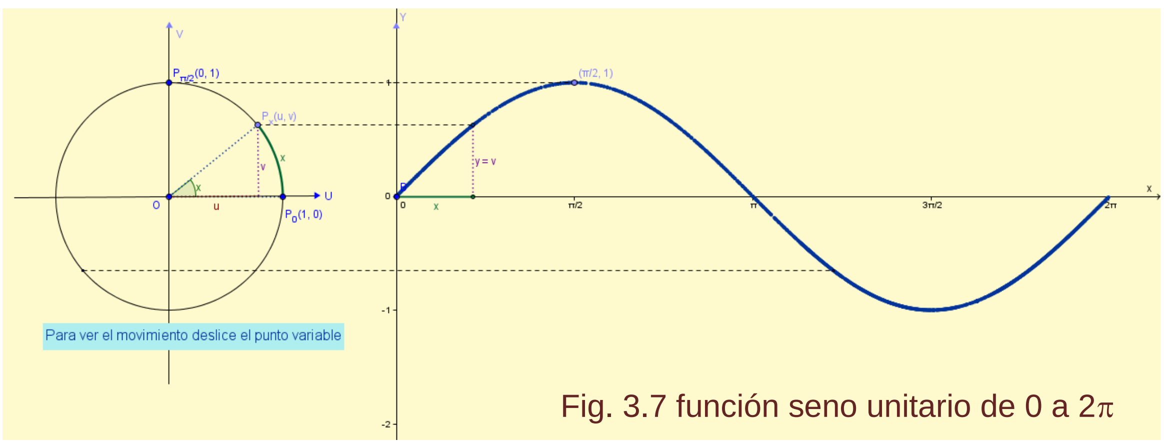


Fig. 3.7 función seno unitario de 0 a 2π

Si aún no es entendible, la gráfica puede determinarla como ha sido costumbre. Para ello, tome los ángulos especiales de: 0°, 30°, 45°, 60° y 90°, en radianes —Puede agregar los que le sean necesarios pero serán evaluados con la calculadora—.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen(x), exacto	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
sen(x), aproximado	0.0000	0.5000	0.7071	0.8660	1.0000

Entendiendo esta parte, es posible generar toda la gráfica para una rotación completa del punto circular. Basta con analizar los puntos simétricos al círculo unitario. Si la simetría todavía le cuesta, a la tabla agregue en cada cuadrante los puntos equivalentes a los cinco anteriores. Si al punto circular lo seguimos girando, ya sea en sentido positivo o negativo, su ordenada toma los valores descritos en su primera rotación. Además, tenemos que el círculo unitario tiene un perímetro de 2π, entonces cualquier punto P que se encuentre en él al recorrer una vuelta completa queda en el punto donde comenzó. Es decir, si se agrega cualquier múltiplo entero de 2π a x, la ordenada del punto circular es la misma que para x. La gráfica completa de la función seno se forma con la generada en una vuelta y se repite una y otra vez en cualquier sentido. Como se muestra en la *figura 3.8*.

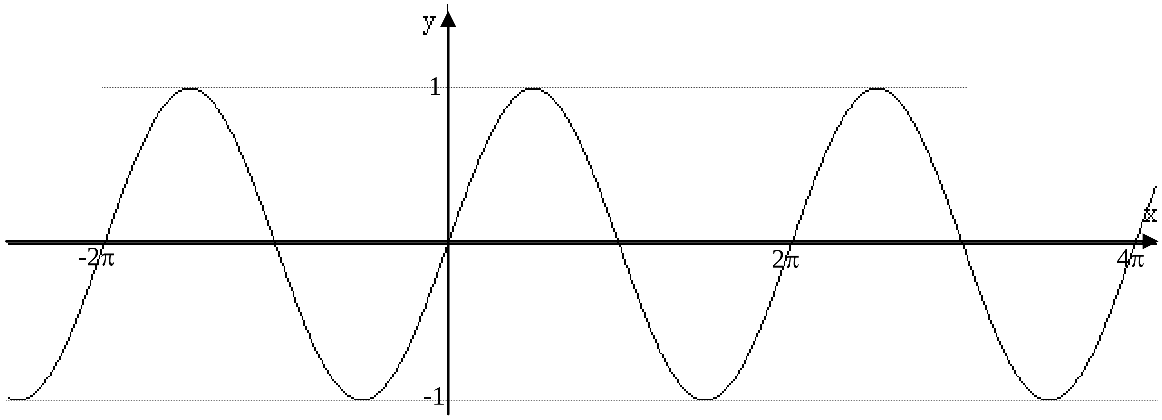


Fig. 3.8. Gráfica de y = sen(x), Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: [-1, 1]

PERIODICIDAD

Como se vio en la construcción de la gráfica de la función seno, la parte que va de 0 a 2π se repite una y otra vez en el sentido positivo o en el negativo. De otra manera, si se realiza una traslación horizontal en la fig. 3.8 un múltiplo entero de 2π, la gráfica queda sobre sí misma. En consecuencia, se deduce que para cualquier número entero k:

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi k)$$

En general,

Definición. **FUNCIÓN PERIÓDICA**

Una función no constante f es periódica si existe un número real positivo p tal que:

$$f(x) = f(x + p)$$

para toda x en el dominio de f. El número positivo más pequeño p, si existe, se llama *periodo de la función*.

Para la función seno, los posibles desplazamientos horizontales que se pueden realizar y que nos resulte la misma gráfica son: $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, y así sucesivamente. En consecuencia, el valor positivo más pequeño de p es 2π y se dice que la función seno tiene un periodo de 2π.

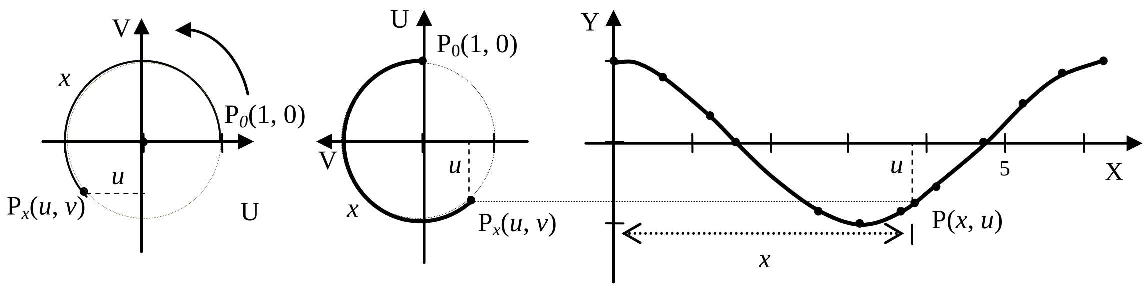
Tabla de contenido

3.3.3 GRÁFICA DE $y = cos(x)$

Trabajando en la circunferencia unitaria y centrada en el origen de la misma forma como se realizó en la función seno, tenemos que $u = \cos(x)$, en la que u es la abscisa del punto circular. Como $-1 \leq u \leq 1$, tenemos que:

Dominio de cos(x): $\mathbb{R}$,
Rango del cos(x): [-1, 1].

Para construir la gráfica, podemos ayudarnos de la tabulación al localizar puntos para valores de ángulos especiales o encontrados con la calculadora donde sea necesario para obtener la *figura 3.9*. O bien, construirla como se realizó en la función seno a partir del círculo unitario. Para ello, se considera la abscisa del punto circular y para que haya mayor facilidad el sistema coordenado U-V se gira 90° en sentido positivo. Comenzando con el primer cuadrante, resulta



Como la función coseno también es periódica, con un periodo de 2π, lo anterior se repite una y otra vez para ambos lados, quedando

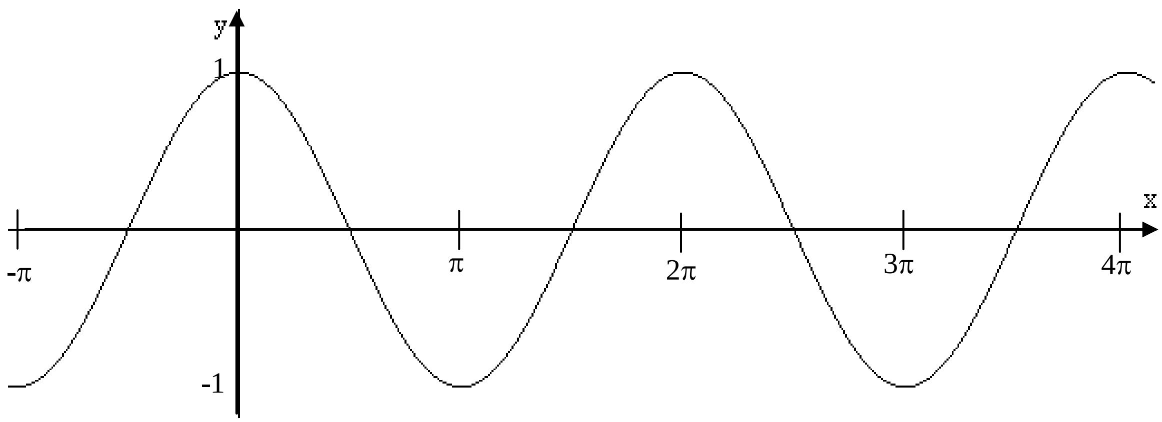


Fig. 3.9. Gráfica de $y = \cos(x)$, Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: [-1, 1]

Comparando la función seno con el coseno, se aprecia que: si desplazamos la gráfica de sen(x) a su izquierda un valor de $\pi/2$ (90°), queda como la gráfica de la función coseno, vea la práctica Sen_Cos_fun.ggb . Es decir, sen(x) está adelantada de cos(x) el ángulo $-\pi/2$.

$$\cos(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$$

Tabla de contenido

3.3.4 Gráfica de $y = tan(x)$

Como tan(x) = v/u, no está definida para valores de $u = 0$. Los puntos circulares a los que les pasa que su abscisa es cero, son los que están sobre el eje de las ordenadas: $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Y, los ángulos circulares asociados a estos puntos son: $\pm\pi/2$, $\pm3\pi/2$, $\pm5\pi/2,\ldots$; (múltiplos impares de $\pi/2$). Por otro lado, se sabe que v puede ser menor o mayor que u. Concluimos:

$$\text{Dominio de } \tan(x)\text{: } \mathbb{R}-\{\pi/2 + n\pi \ / \ n\in\mathbb{Z}\}$$

$$\text{Rango de } \tan(x)\text{: } \mathbb{R}$$

GRÁFICA.

Para construir la gráfica de la función tangente con interpretación geométrica, consideremos el punto $Q(a, b)$ en el lado terminal del ángulo θ y que también se encuentre en la recta $u = 1$. Como se muestra en la *figura 3.10*, en la parte izquierda.

El punto Q al encontrarse en la recta $u = 1$, resulta que $a = 1$. Como la ecuación de la recta que forma el lado terminal es $v = \tan(\theta)\, u$, las coordenadas del punto Q deben cumplir con $b = \tan(\theta)\, a = \tan(\theta)$. Se concluye que, la ordenada del punto Q es justamente la función tangente. Para continuar la asociación del ángulo θ con x, se considera también el círculo unitario en el que $P_x(u, v)$ está en el lado terminal de θ.

Para entender la construcción es recomendable que genere algunos puntos del primer cuadrante del círculo y después continuar con los demás cuadrantes.

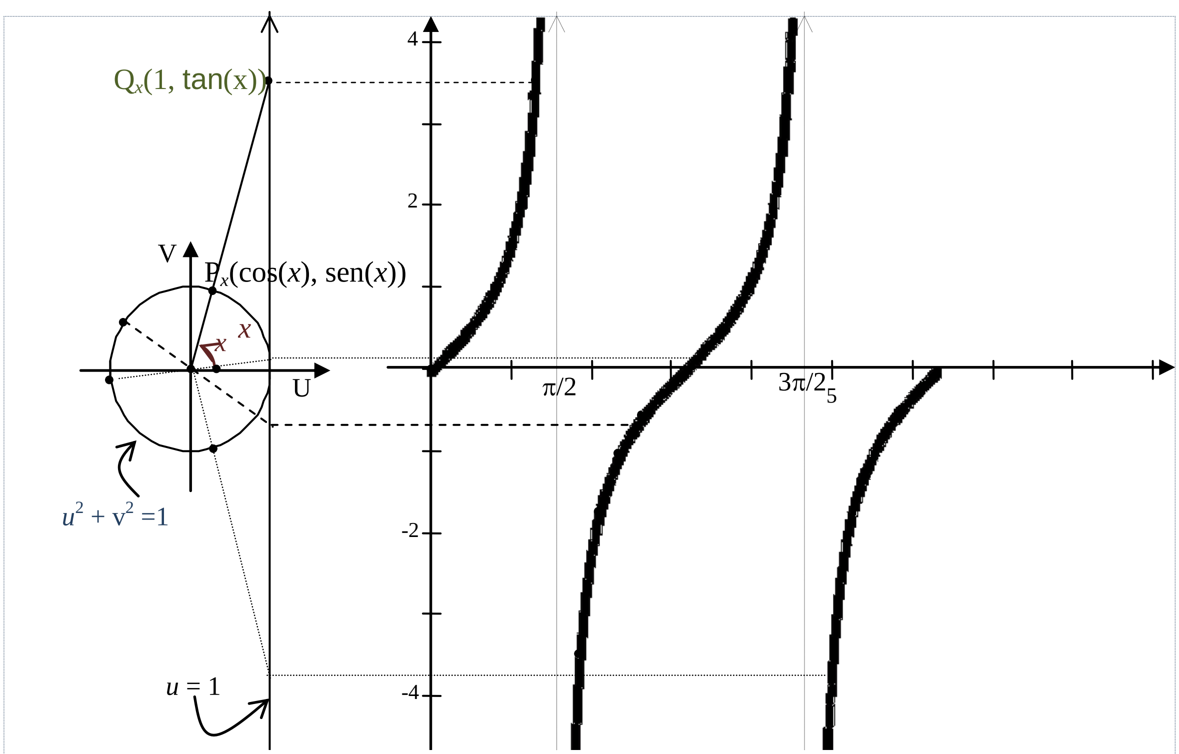


Fig. 3.10. Gráfica de tan(x), para valores de x entre 0 y 2π

Se observa que en los valores no definidos de x la gráfica tiene asíntotas. La gráfica completa de tan(x) se logra girando a P indefinidamente sobre el círculo unitario, ya sea en sentido positivo o negativo. Quedando:

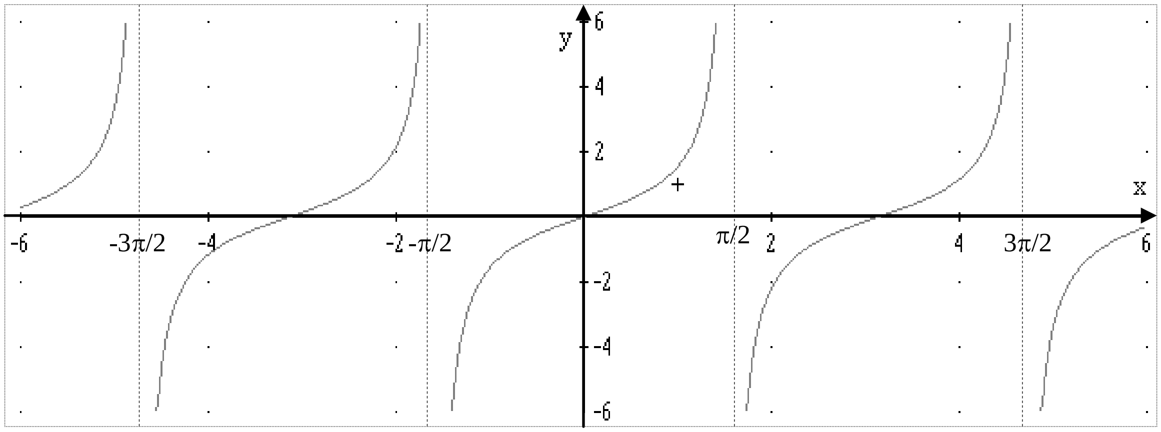


Fig. 3.11. Gráfica de y = tan(x), Dominio: $\mathbb{R}$ excepto múltiplos impares de $\pi/2$
Rango: $\mathbb{R}$ Periodo = π

Una repetición de la evaluación de estas tres funciones en el círculo unitario vea la práctica [Circ_unit Puntos.ggb.] También está la práctica [Seis Razones Trig.ggb] para visualizar otros segmentos asociados a las razones trigonométricas. [Tabla de contenido]

EJERCICIOS 3.3

1) Determinen las coordenadas del punto circular unitario $P_x(u, v)$, si θ = x esta dado por:

i.	0	v.	2	ix.	$4\pi/3$
ii.	1	vi.	3	x.	1.5π
iii.	$\pi/6$	vii.	$3\pi/4$	xi.	1.7π
iv.	$\pi/2$	viii.	π	xii.	$7\pi/8$

2) Construya las siguientes gráficas.

i.	y = - sen(x)	v.	y = -tan(-x)
ii.	y = sen(-x)	vi.	y = sec(x)
iii.	y = cos(-x)	vii.	y = cot(x)
iv.	y = -tan(x)	viii.	y = csc(x)

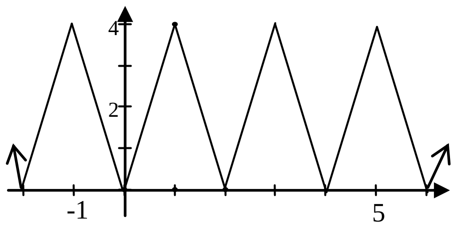
3) Se dice que una función es:
impar si $f(-x) = -f(x)$, (indica que es simétrica al origen),
y es par si $f(-x) = f(x)$. (Simétrica al eje vertical).

Muestre que la función seno, tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, y que las funciones coseno y secante son pares.

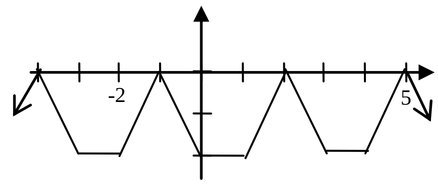
Para lograrlo, en un círculo unitario represente el punto circular $P_x(u, v)$. Ahora, indique el simétrico con respecto al eje X. Determine las funciones trigonométricas para los ángulos x y $-x$. Compare los resultados y concluya.

4) ¿Cuál es el periodo de las siguientes funciones?

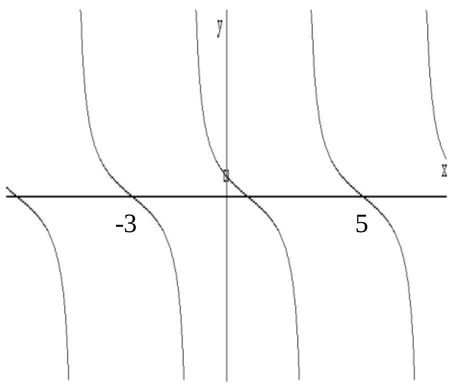
i.



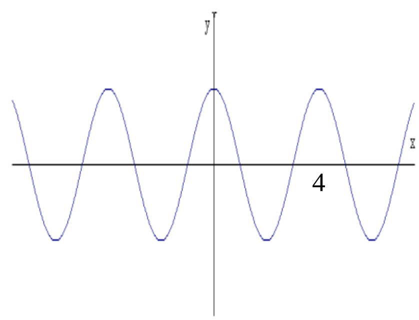
ii.



iii.



iv.



5) De respuesta para cada función: seno, coseno y tangente; de las siguientes características básicas
   a) ¿Cuál es el periodo de cada función?
   b) ¿En qué valores se intercepta con el eje x?
   c) ¿Dónde son las intersecciones con el eje Y?
   d) ¿Dónde ocurren los puntos más altos y los más bajos?
   e) ¿En donde tienen asíntotas verticales?

6) Con una calculadora, obtenga los valores de tan(1.57) y tan(1.58). Explique el porqué son tan diferentes estos valores.

7) ¿Para qué números reales sen(x) < tan(x)?

8) ¿Para qué números reales sec(x) = 1?

9) ¿Para qué valores de x se cumple que tan(x) = 1?

Tabla de contenido

3.4 GRÁFICA DE LAS FUNCIONES SENOIDALES

Describir el movimiento en el problema de la rueda de la fortuna con las funciones trigonométricas a partir del círculo unitario no es posible hacerlo, necesitamos profundizar aún más en ellas. Ahora, estudiaremos las propiedades y gráficas de las funciones trigonométricas con más parámetros en ellas:

$$f(x) = a\,\text{sen}(bx + c) + d \quad \text{y} \quad g(x) = a\cos(bx + c) + d. \tag{3.4}$$

donde a, b, c y d son números reales; con $a \neq 0$.

Trazar las gráficas va a ser relativamente fácil, pues se hacen con la ayuda de las básicas. Primero, analicemos el efecto que hacen los parámetros.

AMPLITUD

De las definiciones de las funciones trigonométricas, el punto $P_\theta(u, v)$ en el lado terminal del ángulo θ cumple con (recuerde que $u^2 + v^2 = r^2$):

$$u = r\cos(\theta) \quad \text{y} \quad v = r\,\text{sen}(\theta)$$

Al compararlas con las ecuaciones (3.4) tendríamos que $b = 1$, $c = d = 0$ y $r = |a|$. Además, para que $\theta = x$ (el ángulo siga quedando en función de x) es necesario referirnos a la circunferencia unitaria. Entonces, P se puede considerar que se encuentra en una circunferencia de radio $r > 0$ (r indica el tamaño del nuevo círculo trigonométrico comparado con el unitario). Por comparación se dice que el número $|a|$ se llama **amplitud**. El valor absoluto es porque a puede ser negativo, en estos casos la función es una simétrica con respecto al eje X de la función con a positiva.

PERIODO

Ahora se estudia el parámetro $b > 0$ en

$$y = \text{sen}(bx) \quad \text{y} \quad y = \cos(bx).$$

Ambas gráficas tienen una amplitud de 1, ya que $a = 1$. Como seno y coseno tienen un periodo de 2π, entonces sen(bx) y cos(bx) completan un ciclo al pasar del valor $bx = 0$ al valor $bx = 2\pi$. Es decir, conforme x cambia de

$$x = 0 \quad \text{a} \quad x = \frac{2\pi}{b}$$

Se deduce que sen(bx) y cos(bx) tienen un **periodo de $2\pi/b$**. Lo que significa que las gráficas se repiten cada $2\pi/b$ unidades. Un cambio en el periodo, provoca un alargamiento o encogimiento a lo largo del eje de las abscisas. Considerando de 0 a 2π como un recorrido base, tenemos que el número de ciclos contenidos en ese recorrido es: $\textbf{ciclos} = \frac{2\pi}{\textbf{periodo}} = b.$

Cuando b es negativa, se utilizan las siguientes propiedades:
sen($-x$) = - sen(x) o cos($-x$) = cos(x)

DESPLAZAMIENTO DE FASE

Es el turno de c en las gráficas de la forma

$$y = \text{sen}(bx + c) \quad \text{y} \quad y = \cos(bx + c), \quad \text{con } b > 0.$$

Estas funciones tienen una vuelta conforme $bx + c$ cambia de

$$bx + c = 0 \quad \text{a} \quad bx + c = 2\pi$$

Al despejar x, el ciclo va de

$$x = \frac{-c}{b} \quad \text{a} \quad x = \frac{-c}{b} + \frac{2\pi}{b}$$

Corrimiento de fase Periodo

Se concluye que las funciones también tienen un periodo de $2\pi/b$ y su gráfica está trasladada $|-c/b|$ unidades a la izquierda del cero si $-c/b$ es negativo o a la derecha si $-c/b$ es positivo. Esta traslación también se llama **corrimiento de fase (o desplazamiento horizontal)**.

DESPLAZAMIENTO VERTICAL

Las funciones

$$y = a\ \text{sen}(bx + c) + d \quad \text{y} \quad y = a\cos(bx + c) + d,$$

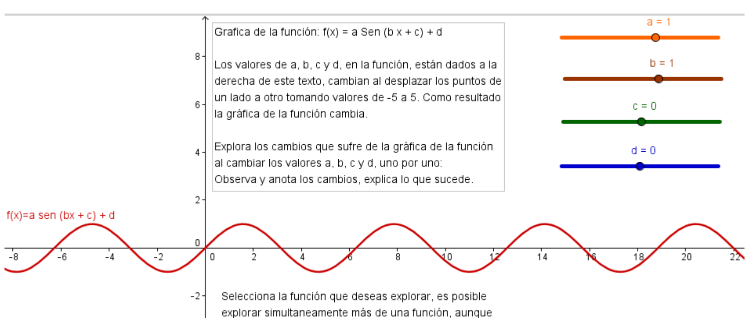
tienen un desplazamiento vertical con respecto a las funciones

$$y = a\ \text{sen}(bx + c) \quad \text{o} \quad y = a\cos(bx + c).$$

Ya que a cada valor de la ordenada se le suma el valor d, sube si es positiva y baja si es negativa.

Tabla de contenido

En los siguientes ejemplos se analizarán varias formas de construir las gráficas de las funciones senoidales. La idea es que no realice una tabla de pares ordenados. La intensión es que se aprenda conceptos básicos y los pueda utilizar para casos complicados.



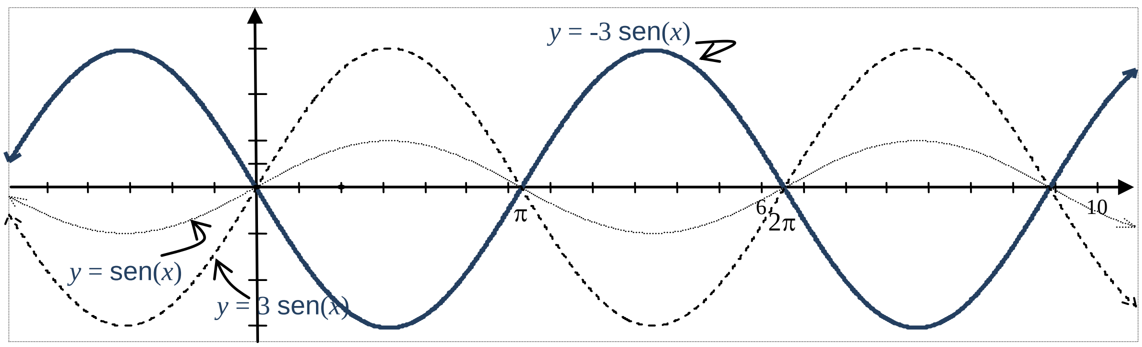
Puede utilizar la práctica FunTrig_Gral.ggb para entender, repasar o verificar los conceptos de los parámetros. Además, le puede servir para verificar los siguientes ejemplos. Así como verificar los ejercicios propuestos.

Ejemplo 10. Construya la gráfica de $y = -3\ \text{sen}(x)$.

En este caso, la función unitaria está afectada únicamente por la amplitud, entonces puede deducirse a partir de $y = \text{sen}(x)$. A cada ordenada de la unitaria se multiplican por 3. Al final, la gráfica de $y = -3\ \text{sen}(x)$ es la simétrica con respecto a la recta $y = d = 0$, en este caso es el eje X.

Amplitud de $y = \text{sen}(x)$ es 1.
Amplitud de $y = 3\ \text{sen}(x)$ es 3
Amplitud de $y = -3\ \text{sen}(x)$ es 3, ya que $|3| = |-3| = 3$. Es simétrica horizontalmente con la anterior.

Pongamos sus gráficas para comparar.



La amplitud puede decirse que es la mitad de la diferencia entre el valor mayor de la ordenada y el valor menor. Un cambio en la amplitud, provoca un encogimiento o alargamiento vertical de la gráfica. En este caso, ambas cruzan el eje horizontal por los mismos valores, ya que $a \times 0 = 0$.

. . .

Ejemplo 11. (Periodos diferentes) En un mismo sistema coordenado, compare las gráficas y los periodos de $y = \cos(2x)$, $y = \cos(x/2)$ con la gráfica de $y = \cos(x)$.

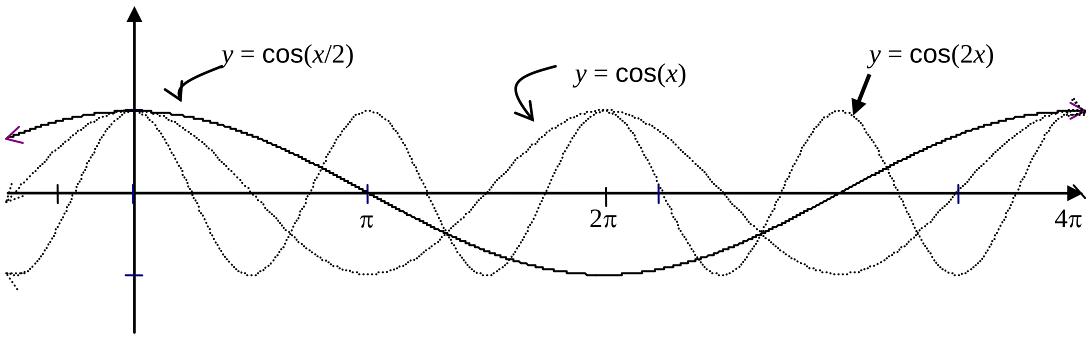
Todas tienen la misma amplitud, $a = 1$ y no tienen desplazamiento ni horizontal ni vertical.

Rango = [-1, 1].

El periodo de $y = \cos(2x)$ es $\text{Periodo} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ La mitad del cos(x) y da dos ciclos en $x \in [0, 2\pi]$

El periodo de $y = \cos(x/2)$ es $\text{Periodo} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. El doble del cos($x$) y da medio ciclo en $x \in [0, 2\pi]$.

Las gráficas de las tres funciones se muestran en la siguiente figura.



A mayor valor del periodo se tiene menor número de ciclos y viceversa. Recuerde que son inversamente proporcionales.

. . .

Ejemplo 12. Grafique y = sen(2x - π/3).

Analicémosla un poco.

Sus parámetros son: a = 1, b = 2, c = -π/3 y d = 0.

De donde:

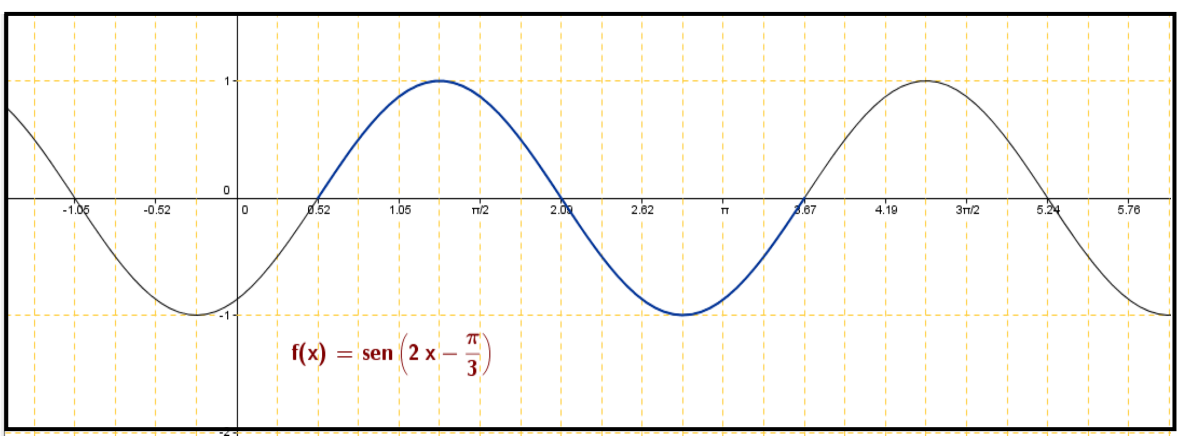
Amplitud = 1. Como d = 0 ⇒ Rango = [-1, 1]

Periodo de 2π/b = 2π/2 = π. Hay dos ciclos en [0, 2π]

Inicio el ciclo en x = π/6. (Resuelva: 2x - π/3 = 0)

Fin del ciclo en x = π/6 + π = 7π/6. (Resuelva: 2x - π/3 = 2π/b)

Ahora coloque en la gráfica el ciclo básico de la función —comienza a subir en π/6, sube a uno en π/6 + π/4 = 5π/12, baja a cero (π/6 + 2π/4 = 8π/12), sigue bajando a -1 (π/6 + 3π/4 = 11π/12) y luego sube a cero (π/6 + π = 14π/12) —. Después repita una y otra vez el ciclo. Por el tipo de fracciones, nos conviene tomar cada cuadrito del papel cuadriculado de un doceavo de pi.



Esta función está desfasada con respecto a sen(2x) el valor π/6.

. . .

COMPARACIÓN

Ahora que ya aprendimos algo de ellas, pongamos un resumen.

$\boldsymbol{f(x) = a\, sen(bx + c) + d}$ $\boldsymbol{f(x) = a\cos(bx + c) + d}$	Se toma $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{0}$, al considerar: $sen(-x) = -sen(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$

<u>Análisis general</u> :

Dominio$_f$ = $\mathbb{R}$. (La gráfica está a todo lo largo del eje horizontal)

Rango$_f$ = $[d + |a|, d - |a|]$

Tamaño del rango = $2|a|$. (La gráfica está en una parte del eje vertical)

Periodo = $\frac{2\pi}{b}$ (Indica cuanto se “expande” horizontalmente)

Amplitud = $|a|$ (Indica cuanto se “expande” verticalmente).

Desplazamiento vertical = d. (la gráfica oscila alrededor de la recta horizontal $y = d$)

Corrimiento de fase = $\frac{-c}{b}$. (Valor donde inicia el ciclo de referencia).

El ciclo finaliza en $\frac{-c}{b} + \frac{2\pi}{b}$ (Corrimiento de fase + periodo)

Tabla de valores (Inicia un ciclo; Finaliza el ciclo)

x	$x_0 = \frac{-c}{b}$	$x_1 = \frac{-c}{b} + \frac{\pi}{2b}$	$x_2 = \frac{-c}{b} + \frac{\pi}{b}$	$x_3 = \frac{-c}{b} + \frac{3\pi}{2b}$	$x_4 = \frac{-c}{b} + \frac{2\pi}{b}$
$bx + c$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
a sen$(bx + c) + d$	d	$d + a$	d	$d - a$	d
$a\cos(bx + c) + d$	$d + a$	d	$d - a$	d	$d + a$

Gráficas. Se grafica el ciclo y este se repite una y otra vez a su izquierda y a su derecha.

Ejemplo 13. (Con tablas)

(a) Análisis de $f(x) = 2\,sen(2x + \pi) - 3$.

Los parámetros se obtienen directamente: $a = 2,\ b = 2,\ c = \pi\ \ y\ \ d = -3$.

Con ellos:

Dominio = $\mathbb{R}$,

Rango = $[d + |a|, d - |a|] = [-3 - 2, -3 + 2] = [-5, -1]$

Tamaño del rango = $2|a| = 2*2 = 4$,

Amplitud = $|a| = 2$.

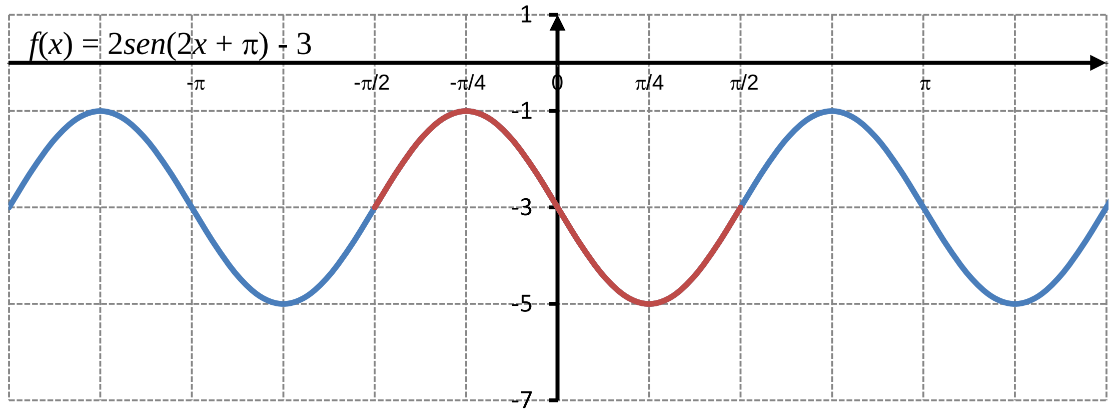
Periodo = $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ Hay dos ciclos en el intervalo $[0, 2\pi]$

Desplazamiento vertical = $d = -3$.

Tabla de valores — Inicia un ciclo — Finaliza el ciclo

argumento: $2x + \pi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$2\,sen(2x + \pi) - 3$	$d = -3$	$d + a = -1$	$d = -3$	$d - a = -5$	$d = -3$

Gráfica. Utilizando los puntos obtenidos se construye el ciclo uniéndolos con una línea suavizada y este se repite a su derecha y a su izquierda.



Ejemplo 14. (Otra secuencia deductiva, sin fórmulas directas) Ahora analicemos

$$f(x) = 2 - 3cos(\pi x - 2\pi).$$

Los parámetros deben interpretarse directamente: $a = -3,\ \ b = \pi,\ \ c = -2\pi\ \ \ y\ \ \ d = 2$

El ciclo se inicia cuando $bx + c = 0 \Rightarrow \pi x_0 - 2\pi = 0$,

de donde al despejar $x_0 = 2$.

El ciclo se termina cuando $bx + c = 2\pi \Rightarrow \pi x_4 - 2\pi = 2\pi$,

de donde al despejar $x_4 = 4$.

El periodo = valor donde termina el ciclo menos donde inicia:

$$\text{Periodo} = x_4 - x_0 = 4 - 2 = 2.$$

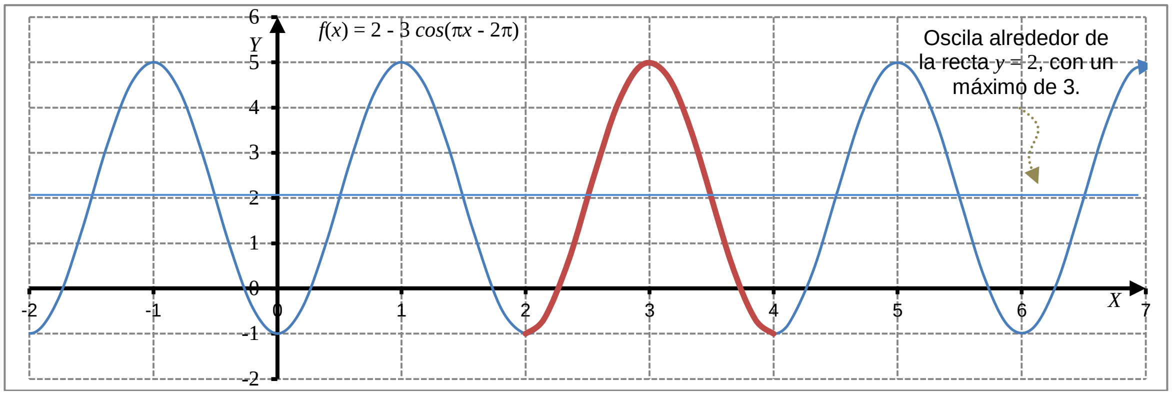
Para considerar las cuatro partes del ciclo, divida el periodo entre 4,

$$\text{inc} = 2/4 = 0.5.$$

Se construye la tabla de valores

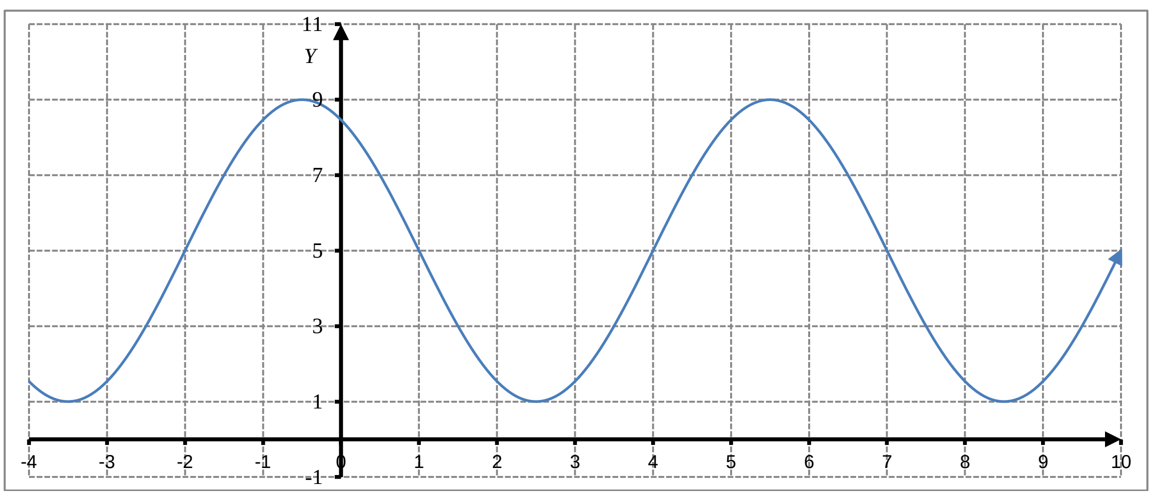
x	$x_0 = 2$	$x_1 = x_0 + \text{inc} = 2.5$	$x_2 = x_1 + \text{inc} = 3$	$x_3 = x_2 + \text{inc} = 3.5$	$x_4 = x_3 + \text{inc} = 4$
$2- 3sen(\pi x - 2\pi)$	-1	2	5	2	-1

Se grafica el ciclo y se repite a su izquierda y a su derecha.



La gráfica al estar sobre todo el eje horizontal indica, Dominio = $\mathbb{R}$.
En el eje vertical, la gráfica oscila de -1 a 5, Rango = [-1, 5].
En el eje horizontal, la gráfica se repite cada 2 unidades, Periodo = 2.
La gráfica oscila alrededor de $y = 2$ con un máximo valor de 3, Amplitud = 3.

Ejemplo 15. Determine la fórmula que describa la siguiente gráfica.



Primero se localiza un ciclo representativo: Para el seno va de -2 a 4 (otro puede ser de 4 a 10); mientras que, para el coseno un posible ciclo va de -0.5 a 5.5.

Ahora elija una forma de la fórmula, digamos $f(x) = a\,sen(bx + c) + d$.

Con esta decisión, tomamos el ciclo cercano al eje vertical, entonces:

Inicia en (corrimiento de fase) $x_0 = -2$, y
Finaliza en $x_4 = 4$.
De donde, Periodo $= x_4 - x_0 = 4 - (-2) = 6$.

La gráfica oscila alrededor de la recta $y = 5$, va de 1 a 9. Así que su máximo alejamiento es de 4. En consecuencia $d = 5$ y $a = 4$.

Cuando $x_0 = -2$ se debe cumplir $bx_0 + c = 0$. Por lo que $b(-2) + c = 0 \Rightarrow c = 2b$.

Además,

Cuando $x_4 = 4$ se debe cumplir $bx_4 + c = 2\pi$.

Al sustituir valores, $b(4) + 2b = 2\pi$

En consecuencia:

$$6b = 2\pi$$

$$b = \pi/3$$

y como $c = 2b$, se tiene $c = 2\pi/3$.

Teniendo los cuatro parámetros, se sustituyen en la forma elegida, quedando:

$$f(x) = 4\,sen\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5$$

. . .

Tabla de contenido

EJERCICIOS 3.4

1) Explique porque las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, se dice que no tienen amplitud.

2) Justifique el porqué podemos realizar los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} sen(bx + c) &= a\,sen(bx + c + 2\pi) + d \\ &= a\,sen\left(b\left(x + \frac{c}{b} + \frac{2\pi}{b}\right)\right) + d \\ &= a\,sen\left(b\left(x - \frac{-c}{b} + \frac{2\pi}{b}\right)\right) + d \end{aligned}$$

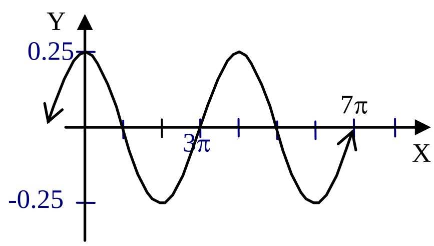
De una interpretación a cada parámetro o a cada término.

3) Encuentre las variaciones en las funciones seno y coseno que satisfagan las condiciones dadas (encuentre la ecuación). Grafique las funciones.
   i. Amplitud 2/3, periodo $2\pi/3$, desplazamiento de fase $\pi/3$
   ii. Amplitud 3, periodo π, desplazamiento de fase $-\pi/4$.
   iii. Amplitud 4/5, periodo 2, desplazamiento de fase $-\pi/2$.
   iv. Amplitud 0.6, periodo 0.5, desplazamiento de fase 0.3

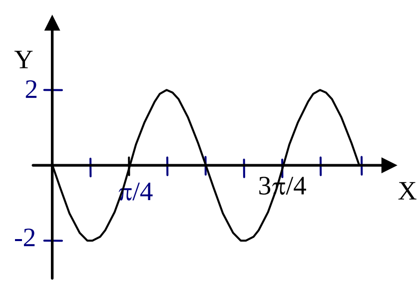
4) Exprese la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y el corrimiento vertical de cada función, y grafique la función.
   i. $y = \text{sen}(x) + 2$
   ii. $y = \text{sen}(2x)$
   iii. $y = 2\ \text{sen}(x)$
   iv. $y = \text{sen}(x + 2)$
   v. $y = 2\ \text{sen}(3x + 1) - 1$
   vi. $y = -2\cos(x) + 2$
   vii. $y = 0.5\cos(\pi x + 1) + 2$
   viii. $y = 3\cos(4x + \pi) - 2$
   ix. $y = 0.25\ \text{sen}(x + \pi) + 1$
   x. $y = \text{sen}(x + \pi/2)$
   xi. $y = (1/10)\ \text{sen}(\pi x + \pi) - 1$
   xii. $y = 2\ \text{sen}(4x)$

5) De las siguientes gráficas, encuentre una ecuación de la forma $y=a\ \text{sen}(bx + c)$ y otra de la forma $y = a\cos(bx + c)$, que produzcan la gráfica mostrada.

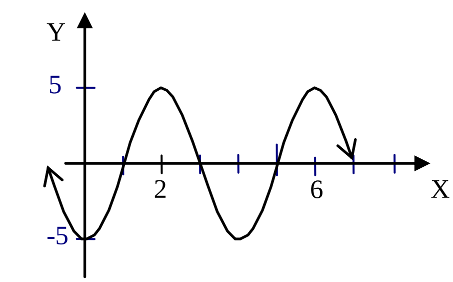
i.



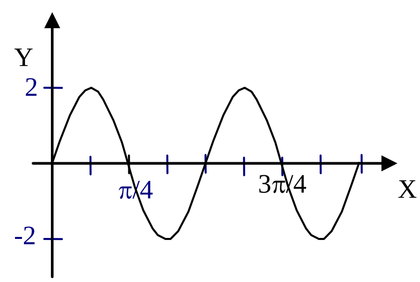
ii.



iii.



iv.



6) Escriba la función $y = -4\ \text{sen}(3x)$ en la forma $y = a\cos(bx + c)$ con $a>0$.

7) (Reto), verifique que el periodo de $y = \tan(bx)$ para $b>0$ sea π/b.

Tabla de contenido

3.5 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Las funciones analizadas

$$f(x) = a\ \text{sen}(bx + c) + d \quad \text{y} \quad g(x) = a\cos(bx + c) + d$$

son muy importantes en matemáticas aplicadas. Se usa en el análisis de las ondas de radio, rayos X, ondas electromagnéticas, ondas sísmicas, olas, circuitos eléctricos, vibraciones del estado sólido construcción de puentes, generadores, la ley de Hooke, etcétera. Cuando los fenómenos se pueden describir mediante estas ecuaciones y x representa el tiempo, se conocen como **movimiento armónico simple**. Los análisis que implican estas ecuaciones se llaman análisis armónicas.

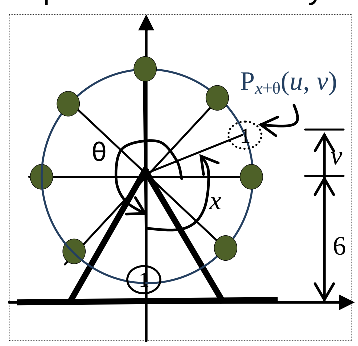
Ahora, tratemos de resolver algunos problemas de aplicación y otros se dejarán de ejercicio.

LA RUEDA DE LA FORTUNA.

Una rueda de la fortuna de 10 metros de diámetro, se coloca a un metro del suelo mediante dos soportes. La rueda, tiene ocho canastillas distribuidas en forma equilibrada. Obtenga una ecuación que describa el movimiento de la altura con respecto al suelo de la canastilla que está más abajo cuando la rueda comienza a girar dando una vuelta cada minuto.

El movimiento de la canastilla es periódico, da una vuelta cada minuto, y la variable independiente es el tiempo. Se espera que el movimiento sea armónico simple. Para describir el movimiento con una ecuación, primero determinamos los parámetros que lo describen.

Para comenzar, entendamos que la altura de la canastilla se forma con dos partes: la posición del centro de la rueda con respecto a la tierra y la ordenada del punto que describe la posición de la canastilla con respecto a la rueda. $h = 6 + v$.



Con respecto al suelo, el centro de la rueda está desplazada verticalmente 6 metros: **$d = 6$**.

La posición de la canastilla estará descrita por las coordenadas del punto con respecto a la circunferencia. Como el radio de la rueda es de 5 metros, se tiene que la amplitud es 5, **$a = 5$**. La ponemos positiva, pues consideramos que se mueve en sentido positivo.

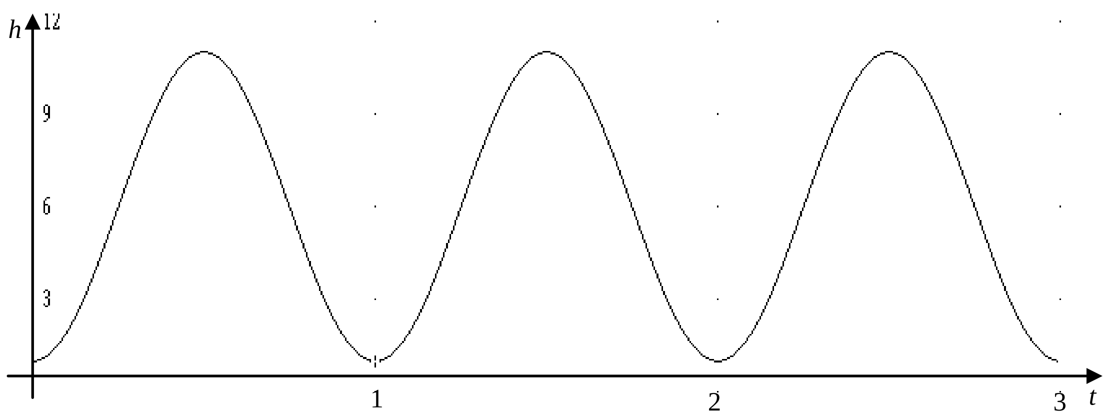
Lo más difícil de entender es lo correspondiente al ángulo del movimiento armónico. Al considerar la canastilla que está más abajo, el ángulo con el que inicia el movimiento no es cero, tiene un valor de $\theta = 270°$ y en radianes es $3\pi/2$. Es decir, está desfasada por **$c = 3\pi/2$**. Recuerde se mide desde la parte positiva del eje de las ordenadas hasta la línea de la canastilla.

Pongamos que el tiempo es nuestra variable en unidades de minuto. Por lo que tenemos que la rueda tiene un periodo de un 1 min., ya que da una vuelta cada minuto. En consecuencia $\boldsymbol{b = \frac{2\pi}{Periodo} = \frac{2\pi}{1\,min} = 2\pi\,\frac{rad}{min}}$. (En Física, cuando la variable es el tiempo, b es la velocidad angular)

La ecuación que describe la altura de la canastilla que está más abajo, esta descrita por una ecuación de movimiento armónico simple, y está dada por:

$$h = 5\text{sen}(2\pi t + 3\pi/2) + 6$$

Su gráfica queda



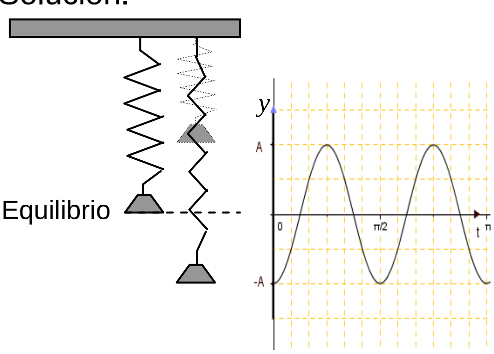
Es como la obtenida al inicio de la unidad, aunque por otros medios. En este caso se ha graficado únicamente tres ciclos, si la rueda sigue girando deberán incluirse los ciclos necesarios.

EL SISTEMA MASA RESORTE (FÍSICA)

Cuando se fija a un resorte un peso determinado, lo estira hasta alcanzar una posición de equilibrio (o reposo). Si el peso se jala A centímetros más abajo de la posición de equilibrio y se suelta cuando $t = 0$ segundos, en condiciones apropiadas el peso se mueve periódicamente alrededor de su posición de equilibrio con un desplazamiento total de 2A. Tomando en cuenta la información de la figura, determine la distancia y como una función del tiempo.

Solución.

Equilibrio



El movimiento es armónico simple, considerado en la forma
$y = a$ sen$(bt + c) + d$.

Sus propiedades básicas, b>0, son:
- Amplitud = $|a|$
- Periodo = $2\pi/b$.
- Corrimiento de fase = $-c/b$
- Desplazamiento vertical = d.

Directamente, tenemos que la amplitud es de A cm, $a = A$.

Como se mueve alrededor de la posición de equilibrio, se tiene que no hay desplazamiento vertical. $d = 0$.

En la gráfica se observa que da un ciclo en π/2 segundos. Es decir, el periodo es π/2. Como periodo = 2π/b, se tiene que b = 2π/periodo, de donde

$$b = \frac{2\pi}{\pi/2} = \frac{4\pi}{\pi} = 4$$

El inicio del ciclo senoidal comienza en (π/2)/4=π/8, resulta que

$$-\frac{c}{b} = \frac{\pi}{8} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{\pi b}{8} = -\frac{\pi \times 4}{8} = -\frac{\pi}{2}$$

En consecuencia, tenemos que

$$y = A\text{sen}(4t - \pi/2)$$

describe el movimiento y (centímetros) alrededor de la posición de equilibrio del peso fijado al resorte con respecto al tiempo t (segundos).

PULSOS

Un pulso de sonido o electromagnético se logra al multiplicar dos movimientos armónicas (puede lograrse con la suma). Como es en el siguiente caso

$$y = 4\text{sen}(4t)\cos(t/4)$$

En este caso, los movimientos armónicos $y_1 = \text{sen}(4t)$ y $y_2 = \cos(t/4)$ tienen periodos diferentes. El más grande es el de y_2, entones se puede considerar que el movimiento armónico $y_1 = \text{sen}(4t)$ tiene una amplitud variable dada por 5cos(t/4).

Se comienza trazando la envolvente de la amplitud variable, $y_2 = \pm 4\cos(t/4)$. La cual tiene un corrimiento de fase de valor 0 y un periodo de 2π/(1/4)= 8π. Da un ciclo cada 8π unidades, comenzando en el origen. La envolvente no es parte de la gráfica, pero nos sirve de guía.

Ahora, dentro de la envolvente se traza la gráfica de $y_1 = \text{sen}(4t)$ con un corrimiento de fase de 0 y un periodo de 2π/4=π/2. Da un ciclo cada π/2 unidades.

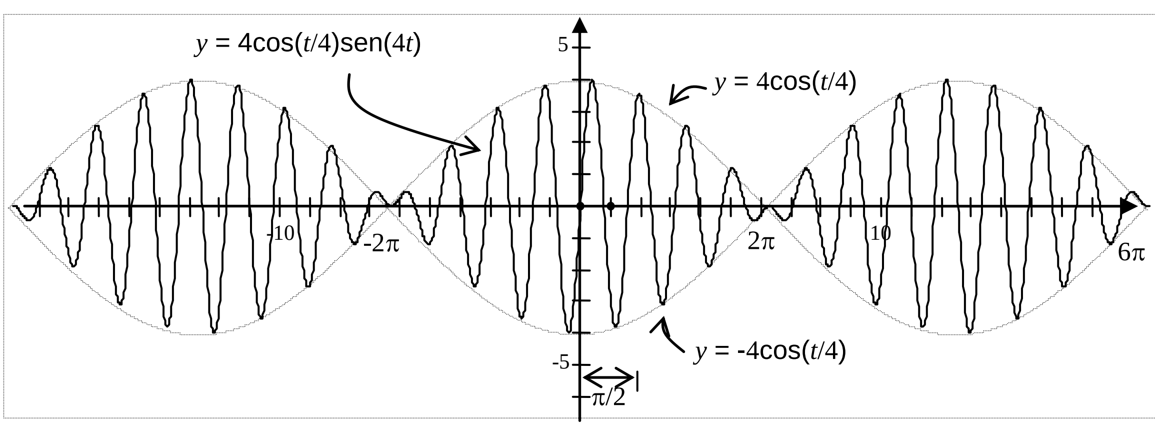


Tabla de contenido

EJERCICIOS 3.5

1) Para el problema de la rueda de la fortuna, represente mediante una función armónica la altura de la casilla que se encuentra a la mitad izquierda.
2) Considere que la rueda da dos vueltas cada minuto, represente con una ecuación el movimiento de la casilla que está más arriba.
3) Construya la gráfica de cada función y_1, encuentre una ecuación de la forma $y_2 = a$ sen$(bx + c) + d$ que sea igual a y_1. Ayúdese con las intersecciones con el eje X cercano al origen con tres cifras decimales y puede utilizar algún medio de graficación.
   i. y_1 = sen(x) + cos(x)
   ii. y_1 = sen(x) – cos(x)
   iii. y_1 = 2sen(x) – cos(x)
   iv. y_1 = 3sen(x) + 2cos(x)
   v. y_1 = 4sen(x) + 3cos(x)
4) Un peso de 3 kilogramos cuelga al final de un resorte que se estira 2 cm debajo de la posición de equilibrio. Despreciando la resistencia del aire y la fricción, la distancia y que el peso se desplaza con respecto a la posición de equilibrio en un tiempo t segundos está dada por y = 3cos(8t). Exprese el periodo P y la amplitud A del peso que cuelga, y grafíquela para $0 \leq t \leq \pi$.
5) Circuito eléctrico. Si el voltaje E en un circuito eléctrico tiene una amplitud de 110 voltios y un periodo de 1/60 segundos, y si E = 110 volts cuando $t = 0$ segundos, encuentre una ecuación de la forma coseno que dé el voltaje en cualquier tiempo $t \geq 0$.
6) Medicina. Un adulto normal sentado aspira y exhala cerca de 0.820 litros de aire cada 4 segundos. El volumen de aire en los pulmones después de t segundos de exhala es aproximadamente v(t) = 0.46 – 0.36cos(πt/2). Grafique la función exhalar- inhalar indicada. ¿Al exhalar, los pulmones se quedan sin aire? Si no es así, ¿qué volumen queda de remanente?
7) El desplazamiento angular θ de un péndulo que oscila con respecto a la vertical en un tiempo t segundos se da por θ = 10cos(wt). Para w = 3 rad/s, determine su periodo. ¿Cuál es su amplitud? Trace dos ciclos de la gráfica de la función que resulte.
8) La profundidad y del agua a la entrada de un pequeño puerto en un tiempo t se da por $y = a$ sen(bt) + k, donde a es la mitad de la diferencia entre las profundidades de la marea alta y la marea baja, Supongamos que el periodo de la marejada es de 12 horas, la profundidad de la marea alta es de 2 metros y de la marea baja de 5 metros, construya la gráfica para dos ciclos de la gráfica.
9) Construya las gráficas de los siguientes pulsos
   i. y = sen(2t) cos(t/2)
   ii. y = sen(4t) cos(t/3)
   iii. y = 3sen(5t) cos(t/5)
   iv. y = 2sen(t/2) cos(4t)
   v. y = 4sen(2t) cos(6t)

Bibliografía