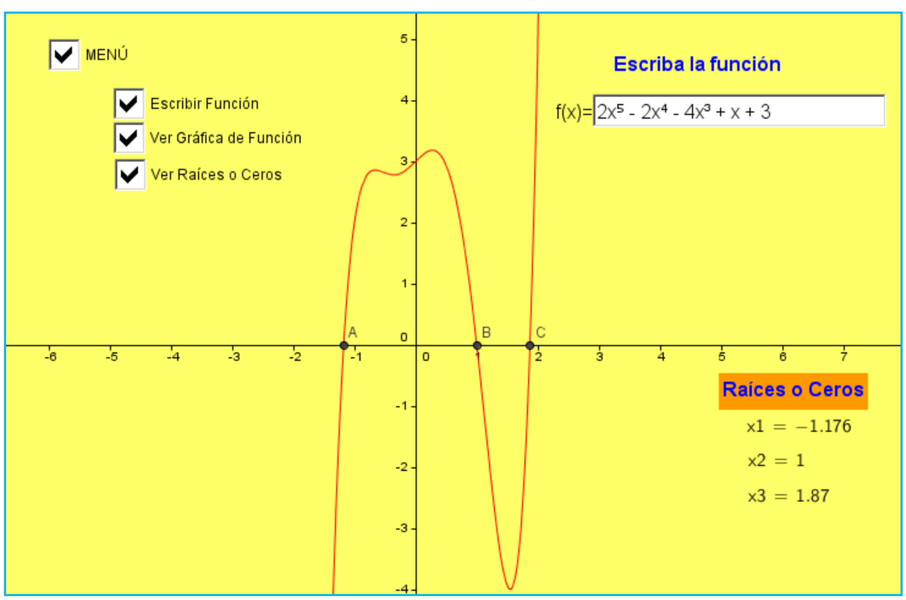
UNIDAD 1

FUNCIONES POLINOMIALES

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno:

- Examina ecuaciones algebraicas con dos variables o su gráfica para decidir si se trata de una función o no.
- Proporciona el dominio y el rango de una función polinomial dada.
- Relacionará a la ecuación: $a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ como un caso particular de la función polinomial asociada.
- Identifica los ceros de una función polinomial como las raíces de la ecuación polinomial asociada.
- A partir de las raíces reales de una ecuación polinomial construye una función polinomial y bosqueja la gráfica asociada a ella.
- Determina las concavidades de la gráfica en base al signo y al exponente del término de mayor grado de la función polinomial y los ceros de la misma.
- Resuelve problemas de aplicación.



Aprendizajes

El alumno

1. Explora en una situación o problema que da lugar a una función polinomial, las condiciones, relaciones o comportamientos, que le permiten obtener información y son útiles para establecer la representación algebraica.

2. Modela situaciones que dan lugar a una función polinomial.

3. Establece la noción de función enfatizando la idea de expresar, sujeto a una condición, una cantidad en términos de otra.

4. Examina ecuaciones algebraicas con dos variables o su gráfica para decidir si se trata de una función o no.

5. Proporciona el dominio y el rango de una función polinomial dada.

6. Comprende el significado de la notación funcional y lo utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales.

7. Relacionará a la ecuación: $a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ como un caso particular de la función polinomial asociada.

8. Resuelve ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

9. Identifica los ceros de una función polinomial como las raíces de la ecuación polinomial asociada.

10. A partir de las raíces reales de una ecuación polinomial construye una función polinomial y bosqueja la gráfica asociada a ella.

11. Determina la concavidad de la gráfica en funciones del tipo $f(x)= ax^n + c$, en base al signo de “a” y a la paridad de “n”

12. Determina las concavidades de la gráfica en base al signo y al exponente del término de mayor grado de la función polinomial y los ceros de la misma.

13. Bosqueja la gráfica de funciones polinomiales a partir del comportamiento que presentan, tanto local como al infinito.

14. Resuelve problemas de aplicación.

CONTENIDO

UNIDAD 1. FUNCIONES POLINOMIALES

1.1 Situaciones que dan lugar a una función polinomial.

En situaciones de la vida real, se originan problemas por resolver que nos lleva a la construcción de modelos que requieren los conocimientos para resolver ecuaciones polinomiales.

Por ejemplo

1. Construcción de cajas.

Una empresa desea construir una caja de base cuadrada y sin tapa a partir de una pieza cuadrada de lámina. Se realizará un corte de 4 pulgadas en cada esquina y se doblarán los lados hacia arriba. Si la caja debe tener un volumen de 144 pulgadas cúbicas, ¿de qué tamaño será la lamina?

2. Un silo tiene forma de cilindro recto con una semiesfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 pies, encuentre el radio del cilindro que resulte en un volumen total de $10081008\pi\ pies^3$

Como se mostrará más adelante, cuando se resuelva estos problemas, que resulta necesario tener los conocimientos sobre una ecuación polinomial de segundo y tercer grado, en cuanto a su dominio, los métodos para resolver la ecuación cuadrática y cúbica resultante, etc.

1.2 Noción generalizada de función.

Definición. Una función f es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento b de un conjunto B. Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A en B se escribe como:

$$f : A \longrightarrow B$$

Al conjunto A se le llama el dominio de la función, denotándolo por D_f y al conjunto formado por los valores que toma la función se le llama rango de la función y se denota por R_f

La palabra función se debe a Jacobo Bernoulli; la notación f(x) fue dada por Leonardo Euler y a Cauchy se debe la definición de función de función y la de función compuesta.

Todas las funciones son relaciones pero no todas las relaciones son funciones.

Antes de continuar con el tema recordaremos la definición de los siguientes conjuntos de números:

Conjunto de números	Operaciones definidas
Naturales: $\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\dots\}$	Adición (+) y multiplicación (*).
Enteros $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$	Adición (+), Substracción (-) y multiplicación (*).
Racionales $\mathbb{Q}=\left\{x \mid x=\frac{p}{q}, con\ p\ y\ q\ \in \mathbb{Z}\ y\ q \neq 0\right\}$ ejemplos: $\frac{3}{4},\ \frac{-7}{3},\ -\frac{2}{9},\ etc.$	Adición (+), Substracción (-), multiplicación (*), División (/)
Irracionales $\mathbb{I}=\{x \mid x\ tiene\ parte\ decimal\ infinita\ y\ no\ periódica\}$ Ejemplos: $\pi=3.14259\dots\quad \sqrt{2}=1.4142\dots\quad e=2.71829\dots$	Adición (+), Substracción (-), multiplicación (*), División (/)
Reales $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$	Adición (+), Substracción (-), multiplicación (*), División (/)
Complejos o imaginarios $\mathbb{C}=\left\{z \mid z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R},\ \text{siendo } \mathrm{i}=\sqrt{-1}\right\}$ 3+2i, (9-4i), 6i, -8, etc.	Adición (+), Substracción (-), multiplicación (*), División (/)

Observe que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

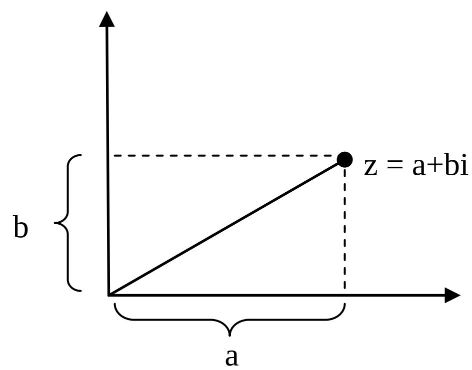
1.2.1 Números complejos

Los números complejos, que ya se definieron anteriormente, son números de la forma z = a + bi, siendo “a” la parte real de z, denotada por Re(z), mientras que “b” es la parte imaginaria de z, denotada por Im(z).

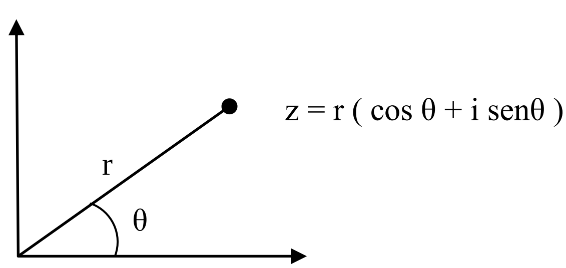
Los números complejos se pueden representar de tres maneras:

1. Forma Binómica: z = a + bi
2. Forma polar o trigonométrica: z = r (cosθ + isenθ), con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, a = r cosθ y b = r senθ
3. Forma de Euler o exponencial $z = r\,e^{\theta i}$

La forma binómica se representa en un plano cartesiano como se muestra en la figura:



La forma polar se representa como sigue:



Las operaciones con números complejos se establecen como sigue:

La suma

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

La resta

(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i

El producto

Sabemos que $i = \sqrt{-1}$ y por lo tanto:

$$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$$

$$i^3 = i^2 i = -i$$

$$i^4 = i^2\, i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 i = i$$

etc.

Por lo cual tenemos para el producto:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

El conjugado

Si $w = c + di$ es un número complejo, su conjugado es $\bar{w} = c - di$

La division

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Por lo tanto la división está dada por:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Nótese que la fracción compleja original se multiplica y divide por el conjugado $\overline{w} = c - di$ del denominador $w = c + di$.

Ejemplos

1. Realizar las siguientes operaciones de números complejos:

a) (3 + 2i) + (6 –7i) = b) (–4 + i) – (–6 + 2i) = c) (3 – 3i)(6 –7i) =

d) $\frac{7-4i}{2+3i} =$ e) $2 + \frac{3i}{1+\frac{2i}{3}} =$ f) $7 - \frac{1}{2+\frac{i}{6-3i}} =$ g) $\frac{3-i}{4-\frac{7}{2-i}} =$

1.2.2 Intervalos e inecuaciones

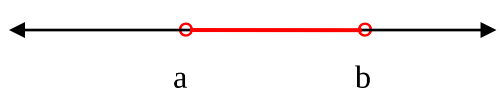
Definición

Se define un intervalo cerrado, denotado por [a, b], como sigue:

[a , b] = $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

Un intervalo abierto, denotado por (a , b), se define como sigue:

(a , b) = $\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$



Un intervalo semiabierto o semicerrado se define como:

(a , b] = $\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

ó

[a , b) = $\{ x \epsilon \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$

Intervalos infinitos

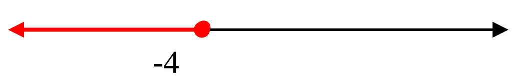
El conjunto de los números reales se considera un intervalo infinito y es siempre abierto, es decir,

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

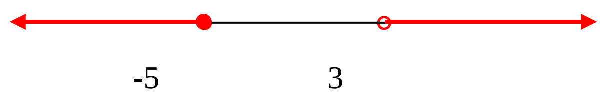
Por ejemplo si queremos indicar que tenemos todos los números x que cumplen con la condición:

a) x > 7, tenemos el intervalo: $(7, \infty)$

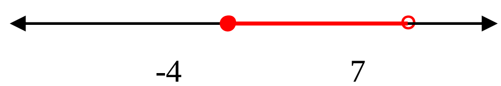
b) x≤ -4, tenemos $(-\infty\ ,\ -4]$



c) x ≤-5 ó x>3 tenemos $(-\infty,-5]\cup(3,\infty)$



d) x ≥ -4 y x <7 tenemos $[-4,7)$



1.2.3 Solución de inecuaciones:

Antes de resolver inecuaciones recordaremos algunas propiedades de las desigualdades:

Dados a, b y c números reales se cumple:

1. Si a< b y b < c entonces a < c
2. Si a < b entonces a + c < b + c y a - c < b - c
3. Si a <b y c >0 entonces ac < bc y a/c < b/c
4. Si a<b y c<0 entonces ac >bc y a/c > b/c

Observación: Estas propiedades se cumplen también para las desigualdades >, ≤ y ≥.

Ley de la Tricotomía

Dados tres números reales a, b y c, entonces se cumple una de las tres condiciones:

a<b, a>b o a=b

Por las propiedades anteriores, mencionamos que para resolver inecuaciones, se procede de manera similar que en la solución de ecuaciones, con el único hecho de que si un número negativo multiplica o divide las partes de una inecuación, el sentido de la desigualdad cambia.

Por ejemplo, resolver:

$$\frac{2x-3}{5}-\frac{3-x}{2}+5\leq\frac{3x-2}{3}$$

Multiplicando toda la desigualdad por 5 tenemos

$$2x-3-\frac{15-3x}{2}+25\leq\frac{15x-10}{3}$$

Multiplicando todo por 2 tenemos:

$$4x-6-15+3x+50\leq\frac{30x-20}{3}$$

Multiplicando todo por 3 obtenemos:

$$12x-18-45+9x+150\leq 30x-20$$

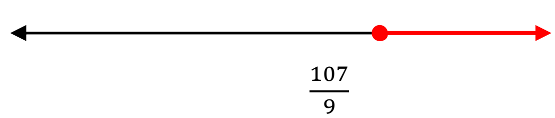
Agrupando adecuadamente

$$12x+9x-30x\leq -20+18+45-150$$

$$-9x\leq -107$$

$$x\geq\frac{107}{9}$$

La solución es: $S=\left[\frac{107}{9},\ \infty\right)$



Para el caso de una inecuación cuadrática, se procede como se indica en el siguiente ejemplo:

Resolver:

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

Estando comparada con cero la expresión cuadrática, factorizamos obteniendo:

$$(x-2)(x-4) \leq 0$$

Llamándole a 2 y 4 números críticos, construimos a partir de ellos los intervalos que se muestran en la siguiente tabla:

Intervalos	Valor intermedio	Expresión (x-2)(x-4)	Signo
$(-\infty, 2]$	0	(0-2)(0-4)	+
$[2\ , 4]$	3	(3-2)(3-4)	-
$[4\ , \infty)$	5	(5-2)(5-4)	+

Como nuestra inecuación tiene la desigualdad ≤ 0 se toma el signo negativo en la tabla, por lo cual la solución es: S = [2 , 4], es decir que todos los valores que se encuentran en este intervalo cerrado satisfacen la inecuación.

En el caso que la inecuación fuera:

$$x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

Se tomaría el signo positivo en la tabla, por lo cual la solución sería:

$$S = (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$$

1.3 Dominio y rango de una función polinomial.

Regresando a nuestro concepto de función analizaremos el dominio y rango de una función polinomial.

Una función polinomial de grado n está dada por la siguiente expresión:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Con a_n diferente de cero.

Donde los coeficientes pueden ser números reales o complejos, y la variable x toma valores reales o complejos. En nuestro curso de matemáticas IV, tomaremos solamente coeficientes reales.

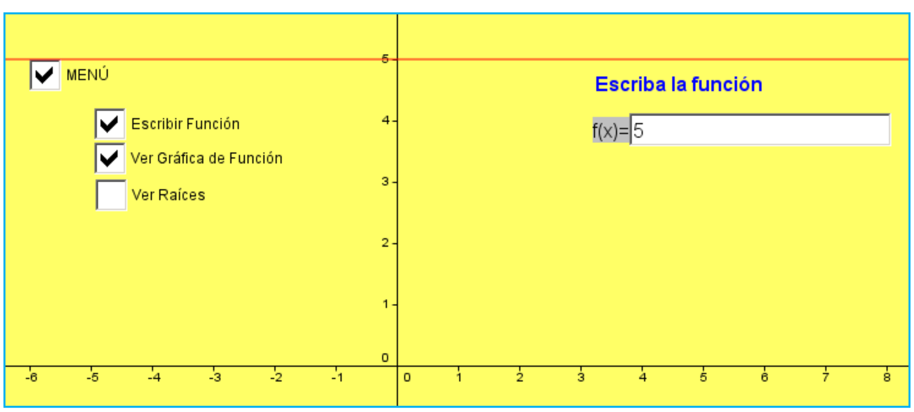
Empezaremos analizando el dominio, rango y gráfica de una función polinomial de grado cero, es decir la función constante $f(x)= a_0$.

Podemos observar que el dominio de la función constante es el conjunto de los números reales y su rango el conjunto formado por el número a_0, es decir, $D_f = \mathbb{R}$ y el rango es $R_f = \{ a_0 \}$.

Como ya se ha visto en cursos anteriores su gráfica es una recta horizontal.

Por ejemplo, la función constante $f(x)= 5$, tiene como $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \{ 5 \}$.

La gráfica correspondiente se muestra en la siguiente figura:



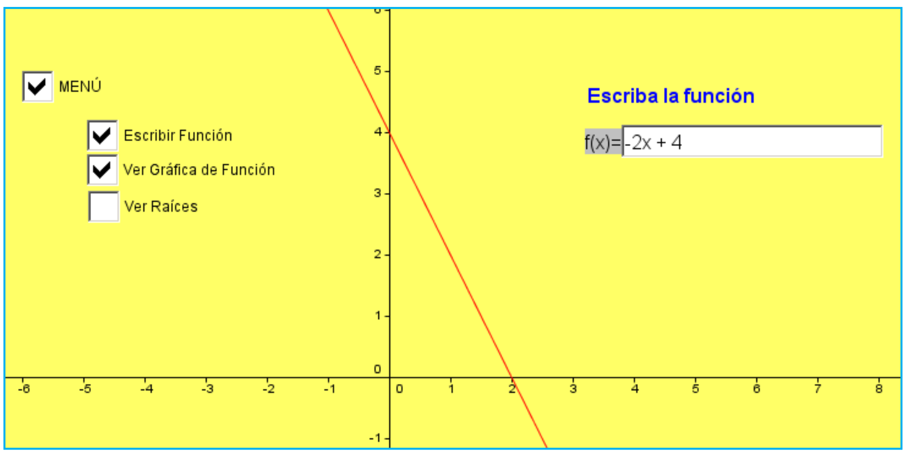
Esta gráfica la podemos ver directamente accesando al Geogebra en donde podemos mostrar otras funciones constantes.

*****Hacer Click para accesar al Geogebra en la siguiente liga*****

Función constante

Para el caso de la función polinomial de grado 1, tenemos lo que ya se ha analizado también en cursos anteriores como la recta, es decir $f(x) = a_1x + a_0$, siendo su dominio y su rango los números reales, es decir, $D_f = R_f = \mathbb{R}$

Por ejemplo $f(x) = -2x+4$ tiene como gráfica:



La cual es una recta que se inclina a la izquierda como se muestra en Geogebra, en donde podemos visualizar otras funciones polinomiales de grado 1.

*****Click para accesar Geogebra en la siguiente liga*****

Función Lineal

Para la función polinomial cuadrática o de grado 2, tenemos $f(x)= a_2x^2 + a_1x + a_0$, (podemos afirmar que para cualquier función polinomial, su dominio está dado por el conjunto de números reales, y si el grado es impar su rango también son los reales).

En el caso de la función cuadrática, para encontrar su rango se puede recurrir a la forma estándar de una función cuadrática: f(x) = a (x – h)^2 + k, siendo el rango [k,∞) si a>0 ó $(-\infty, k]$ si a<0.

Por ejemplo para el dominio, rango y gráfica de la función polinomial de segundo grado f(x)= x^2 -6x + 5, tenemos: $D_f = \mathbb{R}$

La curva de la función cuadrática se trata de una parábola que abre hacia arriba y su rango se obtiene de la forma estándar, la cual se construye como sigue:

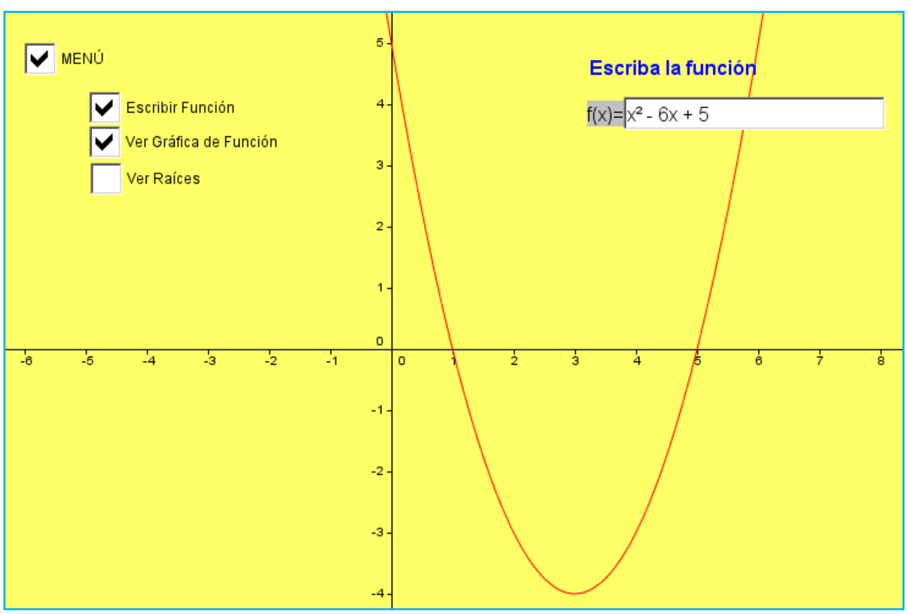
$$f(x) = x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 5$$

$$f(x) = (x-3)^2 - \frac{36}{4} + 5$$

$$f(x) = (x-3)^2 - 4$$

Concluyendo que su rango es $R_f = [-4, \infty)$

La gráfica de la ecuación polinomial f(x)= x^2 -6x + 5 es la siguiente:



La gráfica se visualiza en Geogebra, pudiendo mostrar otras funciones polinomiales de grado 2.

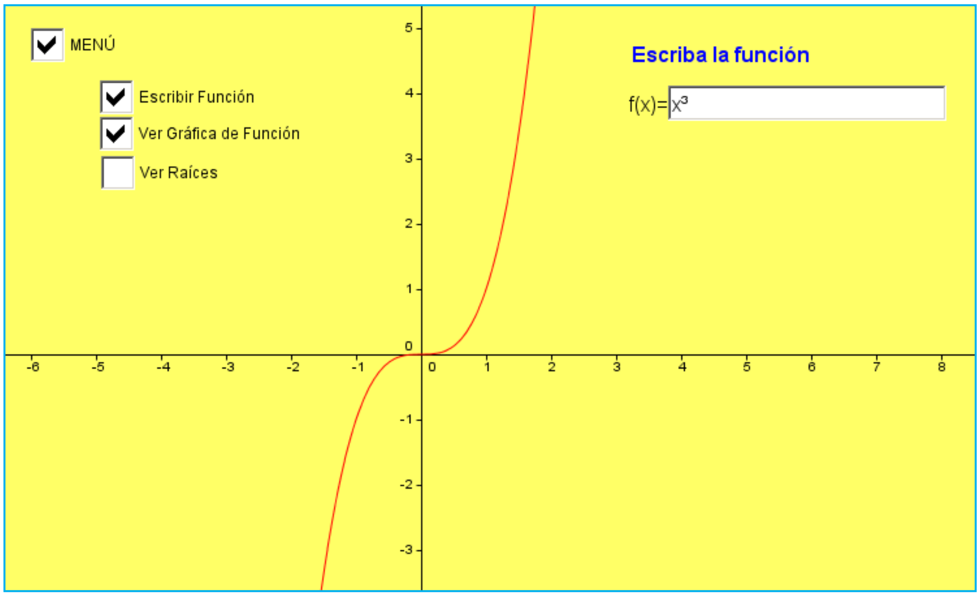
*** Click para accesar Geogebra***
[Función Cuadrática]

Para el caso de una función cúbica o de grado tres $f(x)= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x+a_0$, tenemos que el dominio y el rango están dados por el conjunto de números reales, es decir, $D_f= R_f = \mathbb{R}$, sin embargo el bosquejo de su gráfica resulta muy complicado en lo general, por lo cual se comenta que se requieren conocimientos de una rama de la matemática, llamada Cálculo Diferencial, que es un curso que se imparte en el quinto semestre del bachillerato, para mostrar la gráfica de manera precisa.
Para la funciones polinomiales de grado cuatro ó cuárticas en adelante (pares), el rango también se complica.

Sin embargo para algunos casos podemos bosquejar su gráfica fácilmente.

1.3.1 Gráfica de funciones polinomiales de la forma: $f(x) = ax^3 + c$, $f(x)=ax^4+c$ con $a \in \mathbb{R}$.

En algunos casos se puede bosquejar su gráfica por medio de desplazamientos, verticales u horizontales.
La gráfica de la función polinomial de grado 3 dada por $f(x) = x^3$, es:



Para ver está gráfica podemos accesar al Geogebra, ahí podemos visualizar diferentes funciones de grado 3 y mayores, en donde se muestran los desplazamientos verticales y horizontales (ver los siguientes ejemplos)

Ejemplo

Analizar el dominio rango y gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 5$
b) $f(x) = x^3 - 4$
c) $f(x) = (x - 4)^3$
d) $f(x) = - x^3$
e) $f(x) = (x + 3)^3 – 5$
f) $f(x) = x^3 + 5$
g) $f(x) = x^3 - 4$
h) $f(x) = (x - 4)^3$
i) $f(x) = - x^3$
j) $f(x) = (x + 3)^3 – 5$
k) $f(x) = - (x - 3)^3 - 3$
l) $f(x) = x^4$
m) $f(x) = - x^4$
n) $f(x) = (x + 3)^4 - 5$
o) $f(x) = - (x - 3)^4 - 2$
p) $f(x) = x^5$
q) $f(x) = x^5 + 5$
r) $f(x) = x^5 - 4$
s) $f(x) = (x - 4)^5$
t) $f(x) = - x^5$
u) $f(x) = -(x - 3)^5 - 5$
v) $f(x) = x^6$
w) $f(x) = x^6 + 5$
x) $f(x) = x^6 - 4$
y) $f(x) = (x - 4)^6$
z) $f(x) = - (x - 3)^6 -2$

*** Click para accesar Geogebra***

Desplazamiento

1.4 Teoremas y técnicas de exploración aplicables a funciones polinomiales para la obtención de sus ceros.

¿Qué podemos decir sobre la solución analítica de una ecuación polinomial?

Una ecuación lineal se puede resolver por los métodos algebraicos ya conocidos, una cuadrática puede ser resuelta algebraicamente cualesquiera que sean los valores de sus coeficientes. Pero en lo que se refiere a las ecuaciones cúbicas y cuárticas, los matemáticos italianos Scipio Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari, demostraron, en la primera mitad del siglo XVI, que pueden resolverse algebraicamente y sus raíces ser presentadas en forma de radicales para valores arbitrarios de sus coeficientes. Pero todas las tentativas realizadas durante los dos siglos siguientes para hallar una solución algebraica de ecuaciones de grado superior a cuatro, fracasaron. A principios del siglo XIX, primeramente Ruffini (cuya demostración no fue completa) y luego Abel, demostraron que es absolutamente imposible expresar, por medio de una fórmula en la que sólo intervengan operaciones racionales y radicales, las raíces de una ecuación de grado superior al cuarto cuando los coeficientes son arbitrarios.

En esta unidad resolveremos ecuaciones polinomiales hasta de quinto grado.

Definición

Una ecuación se considera como una igualdad en donde existen variables desconocidas llamadas incógnitas.

Entre las ecuaciones tenemos las ecuaciones polinomiales, algebraicas y trascendentes.

Una ecuación polinomial de grado n es una expresión como la siguiente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

En donde los coeficientes a_i y la incógnita x pueden tomar valores reales o complejos, para nuestro caso, los coeficientes a_i serán reales.

Una ecuación algebraica es una ecuación que contiene cocientes de polinomios, raíces de polinomios.

Por ejemplo: $\frac{3x^2-6}{2x+1} = 0, \quad \sqrt{x+2} - 3 = 9$

Una ecuación trascendente, es una ecuación que contiene funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Por ejemplo: $x^7 = 8, \quad Ln(y-1) = 15, \quad sen\theta = 0.5, \quad e^{t^2} = 2$

Definición

Un número r es un cero de la función polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Si al sustituir r en el polinomio se tiene que

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

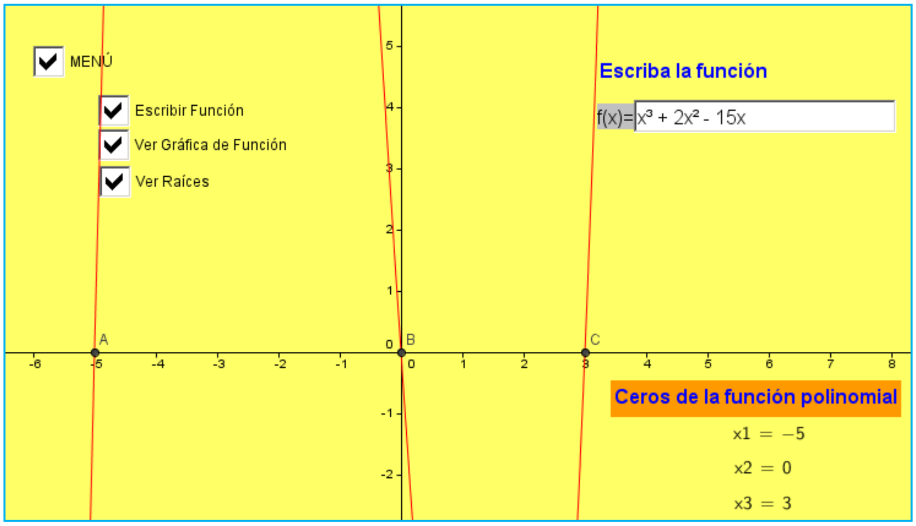
El número r es una raíz de la ecuación polinomial:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Si p(r) = 0

Si tenemos el caso de una función polinomial con raíces reales, tales raíces son la intersección de la curva de la función con el eje de las x.

Por ejemplo la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$ tiene como ceros a: x=0, x=-5 y x=3. Como se muestra en la siguiente gráfica:



Con ayuda del Geogebra podemos ver esta gráfica y mostrar más casos de funciones que se intersecan con el eje de las x.

Click para accesar Geogebra

Ceros de la función

1.4.1 Teorema fundamental del álgebra

Veamos primero los siguientes teoremas:

Teorema 1 (del factor y raíz de un polinomio)

Sea la ecuación polinomial de grado $n \geq 1$, es decir,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Si tiene r como una raíz, entonces x – r es un factor de $P(x)$

Por ejemplo

La ecuación polinomial de grado 2, $3x^2$ -2x-1 tiene como raíz al número 1, por lo cual se puede comprobar con una multiplicación algebraica que $3x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(3x+1)$

Teorema 2

Consideremos una ecuación polinomial de grado n, $P(x) = 0$, si $r_1, r_2, \cdots, r_n$ son sus raíces, entonces: $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) = 0$

Por ejemplo: $p(x) = 2x^2 - 14x + 24 = 0$ tiene como raíces a los números 3 y 4, luego según el **Teorema 2** se puede expresar como $p(x) = 2(x - 4)(x - 3) = 0$, lo cual se puede comprobar realizando el producto algebraico.

Definición

El número r se llama una raíz de multiplicidad k $(k \in \mathbb{N})$ de la ecuación polinomial $p(x) = 0$, si es que $(x - r)^k$ es un factor de $p(x)$ pero $(x - r)^{k+1}$ no es factor de $p(x)$

Cuando k = 1, la raíz se llama de multiplicidad 1 o raíz simple.

Observación: Si la raíz es de multiplicidad k, entonces $p(x) = (x - r)^k q(x) = 0$ donde q(x) es un polinomio de grado menor o igual a n – k y además q(r) ≠ 0.

Por ejemplo

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow p(x) = x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow p(x) = x(x - 2)^2 = 0$$

La raíz x = 0 es simple. La raíz x = 2 es de multiplicidad k = 2

Teorema 3 (Teorema fundamental del álgebra)

La ecuación polinomial de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz o si las raíces de multiplicidad se consideran tantas veces como sea su multiplicidad, en una ecuación de grado n, entonces dicha ecuación tiene exactamente n raíces, que pueden ser reales o imaginarias.

Teorema 4

Sea $p(x) = 0$ la ecuación polinomial de grado n, en donde todos los coeficientes son reales, si el número $z = a + bi$ es una raíz de la ecuación, entonces su conjugado $\bar{z} = a - bi$ también será raíz de $P(x) = 0$

Corolario

Sea $p(x) = 0$ la ecuación polinomial de grado n en donde todos los coeficientes son reales, entonces del teorema anterior se deduce que la cantidad de raíces imaginarias (o complejas) que tiene esta ecuación es una cantidad par.

1.4.2 Técnicas para encontrar los ceros o raíces de ecuaciones polinomiales.

Para el caso de una ecuación polinomial de primer grado, procedemos con la ayuda de las propiedades de la igualdad que nos han enseñado anteriormente, o por medio de reglas prácticas que nos permiten encontrar las raíces de una manera más rápida.

Por ejemplo la ecuación polinomial de grado 1, ax+b=0 (a≠0), tendrá como raíz:

$$x = \frac{-b}{a}$$

En el caso de una ecuación polinomial de segundo grado, podemos proceder por medio de una factorización, por medio de completar trinomio cuadrado perfecto o por la fórmula general (esta fórmula general se encuentra precisamente por medio de completar trinomio cuadrado perfecto).

En algunos casos resulta más fácil utilizar la factorización y en otros la fórmula general.

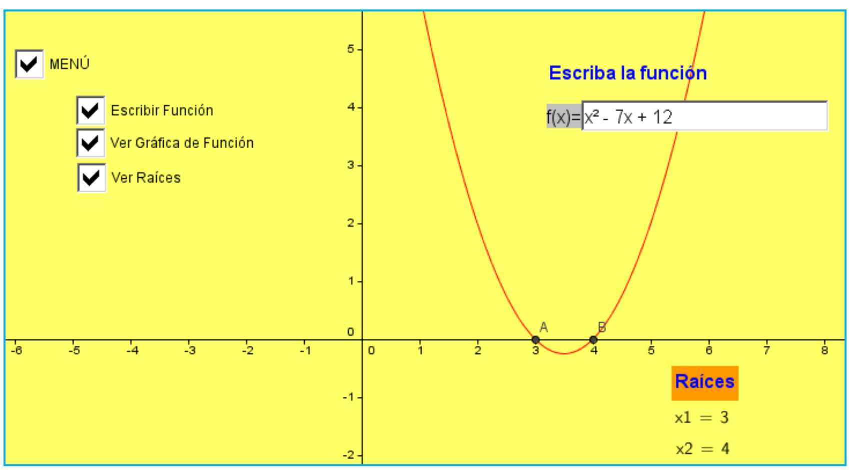
Por ejemplo:

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por cada uno de los métodos mencionados:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Factorizando tenemos: $(x – 3) (x – 4) = 0$, de donde concluimos que las raíces son: $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$

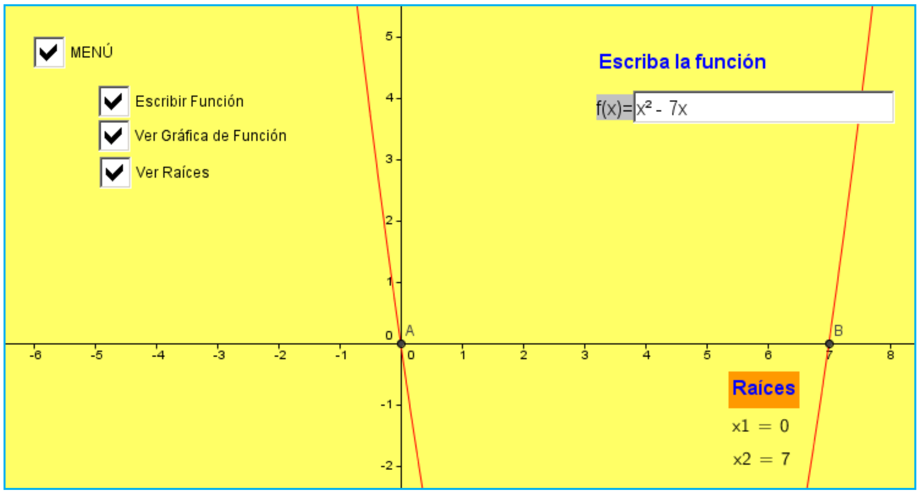
La gráfica de la función polinomial correspondiente es:



b) $x^2 – 7x = 0$

Factorizando tenemos: $x (x – 7) = 0$ de donde las raíces son: $x_1 = 0$ y $x_2 = 7$

La gráfica de la función polinomial correspondiente es:



c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Factorizando como sigue:

Se buscan dos números que multiplicados nos de 6 y sumados -5, siendo estos números -3 y -2 escribimos con estos números el término -5x como sigue:

$$3x^2 - 3x - 2x + 2 = 0$$

de donde asociando tenemos $(3x^2 - 3x) + (-2x + 2) = 0$

Factorizando en cada paréntesis tenemos:

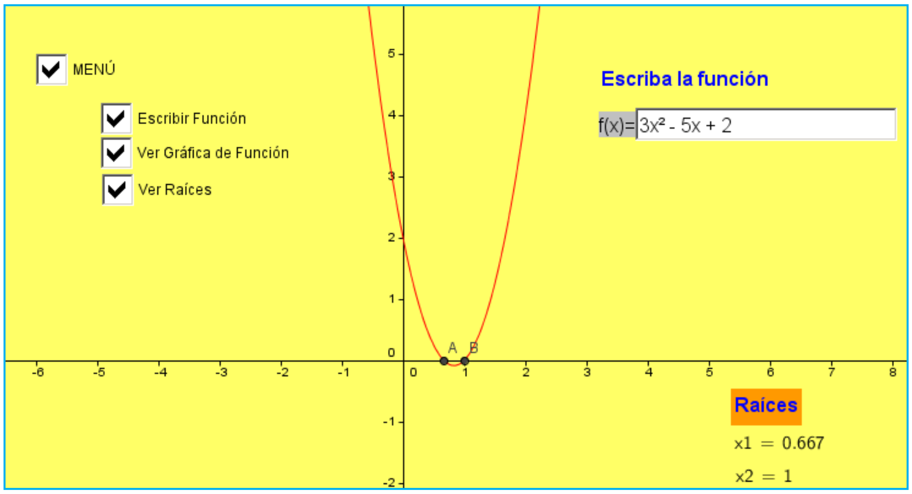
$$3x(x - 1) + 2(-x + 1) = 0$$

cambiando signos: $3x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$

volviendo a factorizar obtenemos $(x - 1)(3x - 2) = 0$

obtenemos como raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{2}{3}$

La gráfica de la función polinomial correspondiente es:



Observamos que el Geogebra nos da el valor de $\frac{2}{3}$ de manera aproximada con decimales.

d) Resolviendo la ecuación anterior por medio de la fórmula general tenemos:

a = 3, b = -5 y c = 2, sustituyendo en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}$$

De donde

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{6} \quad y \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{6}$$

Es decir

$$x_1 = 1 \quad y \quad x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por experiencia podemos afirmar que a los alumnos se les hace más fácil aplicar la fórmula general que la factorización, y más para el caso del inciso c).

Comprobamos con ayuda del Geogebra la solución de los incisos a), b), c) y d) anteriores.

Click para accesar Geogebra

Raíces1

Para ecuaciones polinomiales de grado 3 las fórmulas de Cardano, resultan muy laboriosas en su aplicación y no las veremos en este curso, sin embargo se tienen algunos tipos de ecuaciones que si se pueden resolver de manera sencilla, como se muestra en los siguientes casos de grado tres y cuatro que siguen:

Resolver la ecuación:

a) $x^3 - 7x^2 + 2x = 0$

Factorizando tenemos: $x(x^2 - 7x + 2) = 0$

Obteniéndose la primer raíz $x_1 = 0$,

Resolviendo la ecuación cuadrática del paréntesis por medio de la fórmula general tenemos:

a = 1, b = -7 y c = 2

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

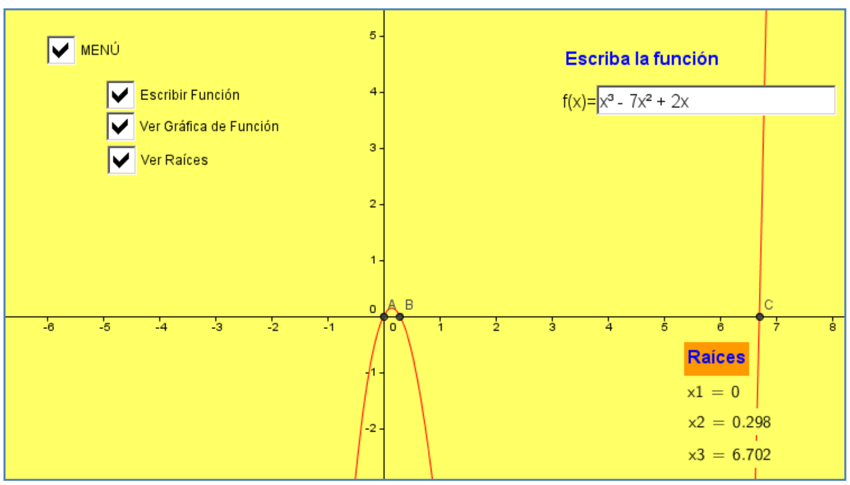
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-8}}{2}$$

De donde

$$x_1 = \frac{7+\sqrt{41}}{6} \quad y \quad x_2 = \frac{7-\sqrt{41}}{6}$$

Siendo éstas raíces números irracionales.

La gráfica de la función polinomial correspondiente es



b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

En este tipo de ecuaciones se recomienda realizar lo que llamaremos un cambio de variable o simplemente dejar un paréntesis vacío que se llena al final del proceso para encontrar los valores de x que satisfagan la ecuación.

Para esto hacemos:

$$(x^2)^2 - 6(x^2) + 8 = 0$$

Haciendo $y = x^2$, escribimos: $y^2 - 6y + 8 = 0$

Factorizando (y – 2) (y – 4) = 0

Por lo cual y= 2 y y= 4, cambiando la “y” por su valor inicial tenemos:

$X^2 = 2$ y $x^2 = 4$, de donde $x = \pm\sqrt{2}$ y $x = \pm\sqrt{4}$, obteniéndose las cuatro raíces de la ecuación de grado cuatro:

$$x_1 = -\sqrt{2}\,, \qquad x_2 = \sqrt{2}, \qquad x_3 = -2, \qquad x_4 = 2$$

Otra manera de mostrar el cambio de variable es dejando un espacio vacío en

$$(x^2)^2 - 6(x^2) + 8 = 0$$

Escribiendo

$$(\quad)^2 - 6(\quad) + 8 = 0$$

Tomando el espacio como una variable nueva, factorizamos

$$\big((\quad) - 2\big)\big((\quad) - 4\big) = 0$$

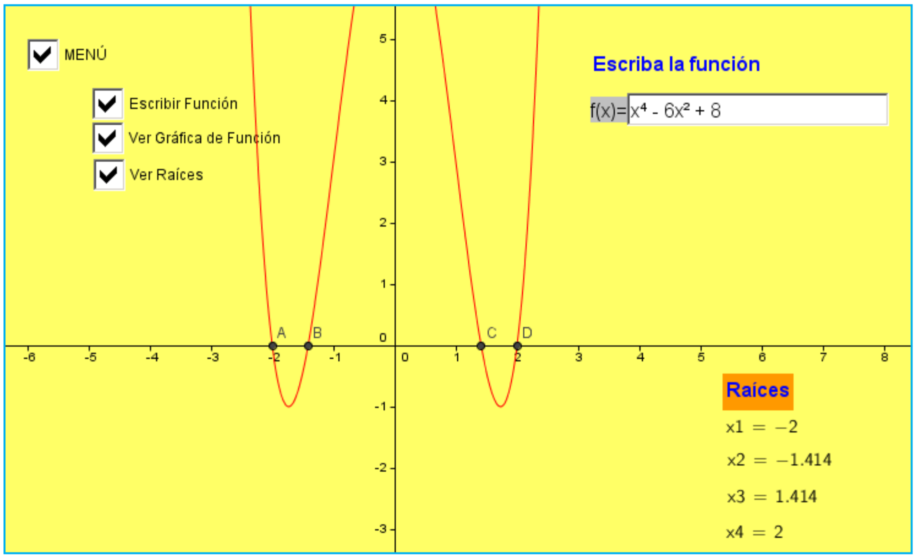
Obtenemos que $(\quad) = 2$ o $(\quad) = 4$, llenando el paréntesis con x^2

Tenemos: $(x^2) = 2$ y $(x^2) = 4$

De donde $x = \pm\sqrt{2}$ y $x = \pm\sqrt{4}$ con lo cual tenemos las cuatro raíces de la ecuación de grado cuatro:

$$x_1 = -\sqrt{2}\,, \qquad x_2 = \sqrt{2}, \qquad x_3 = -2, \qquad x_4 = 2$$

La gráfica de la función polinomial correspondiente es



Observamos que el Geogebra presenta las raíces irracionales en forma aproximada con decimales.

Podemos ver directamente en el Geogebra las raíces de las ecuaciones a) y b) anteriores.

Click para accesar Geogebra

Raíz grado3 y 4

Con ayuda de una división sintética y el Teorema 1, en algunos casos, es posible encontrar factores de una ecuación polinomial, con lo cual se puede reducir el grado de la expresión a resolver para encontrar las raíces de la ecuación, hasta llegar a una ecuación cuadrática.

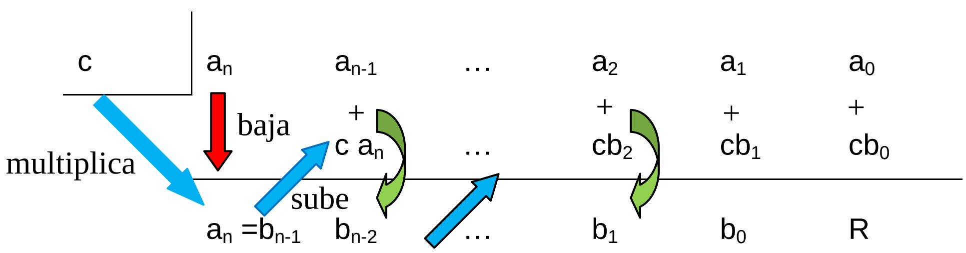
1.4.3 División sintética.

Una división sintética se realiza de la siguiente manera:

Sea $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio de grado n, y (x - c) un divisor, el proceso para realizar la división sintética es el siguiente:

Se colocan en una tabla los coeficientes del polinomio, y a la izquierda el valor "c", se baja el coeficiente a_n al que simbolizaremos por b_{n-1} para una mejor apreciación en la tabla, después se multiplica a_n por c y se coloca bajo a_{n-1} sumando estos dos valores encontrando como suma un número que llamaremos b_{n-2} volviendo a multiplicar por c la suma obtenida y colocando el resultado bajo el siguiente coeficiente del polinomio para volver a sumar, y así sucesivamente.

El valor de la última suma es el residuo de la división.



Si r es igual a cero, el polinomio cociente es:

$$b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + bx^2 + bx + b_0,$$

es decir

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x - c} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + bx^2 + bx + b_0$$

O también

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + bx^2 + bx + b_0)$$

En caso de que r no sea cero, se escribiría:

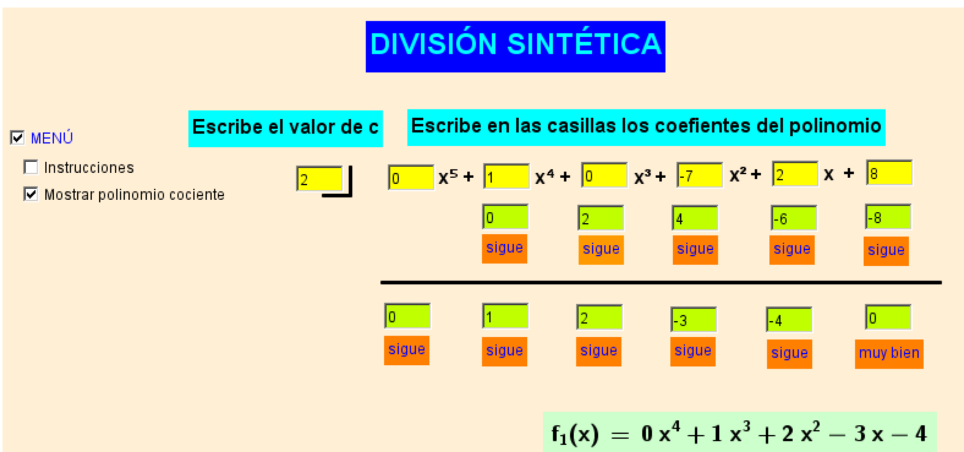
$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x-c} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + bx^2 + bx + b_0 + \frac{r}{x-c}$$

Por ejemplo dividir el polinomio $x^4 - 7x^2 + 2x + 8$, entre $(x – 2)$

2	1	0	-7	2	8
		+	+	+	
		(2)(1)	(2)(2)	(2)(-3)	(2)(-4)
	1	2	-3	-4	0

Obteniéndose como cociente: $x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ y un residuo de cero.

Haciéndolo en Geogebra observaremos la siguiente figura:



De donde establecemos que:

$$x^4 - 7x^2 + 2x + 8 = (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$$

Si volvemos a dividir entre (x+1) la expresión cúbica obtenida, se tendrá:

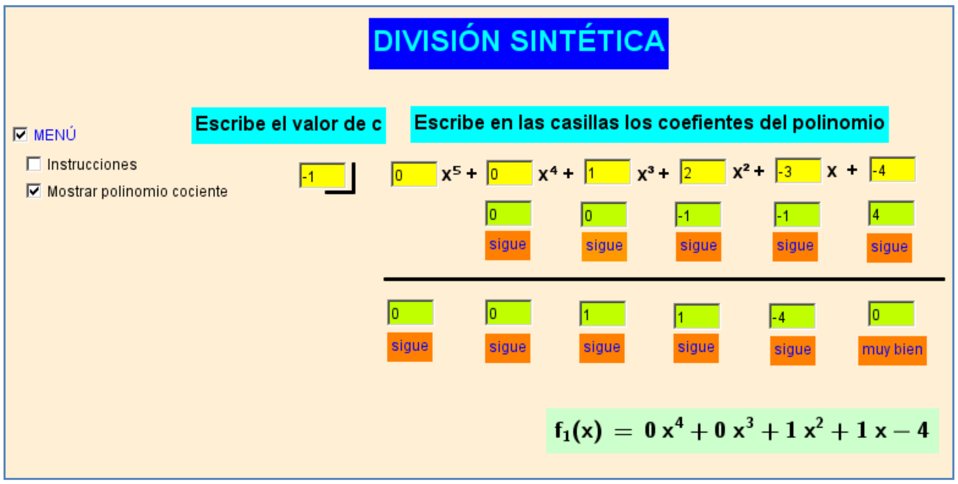
-1	1	2	-3	-4
		+	+	+
		(-1)(1)	(-1)(1)	(-1)(-4)
	1	1	-4	0

Obteniéndose como cociente: $x^2 + x - 4$ y un residuo de cero

Con lo cual podemos escribir:

$$x^4 - 7x^2 + 2x + 8 = (x - 2)(x+1)(x^2 + x - 4)$$

Haciéndolo en Geogebra tenemos la siguiente figura:



De esta última expresión podemos observar que para resolver finalmente la ecuación de grado 4, $x^4 - 7x^2 + 2x + 8 = 0$, después de aplicar la división sintética, basta con resolver la última ecuación cuadrática $x^2 + x – 4$, ya que dos raíces fueron localizadas con la división sintética: $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$

Para esta última ecuación cuadrática, utilizamos la fórmula general de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4ac}}{2a}$$

Tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

De donde

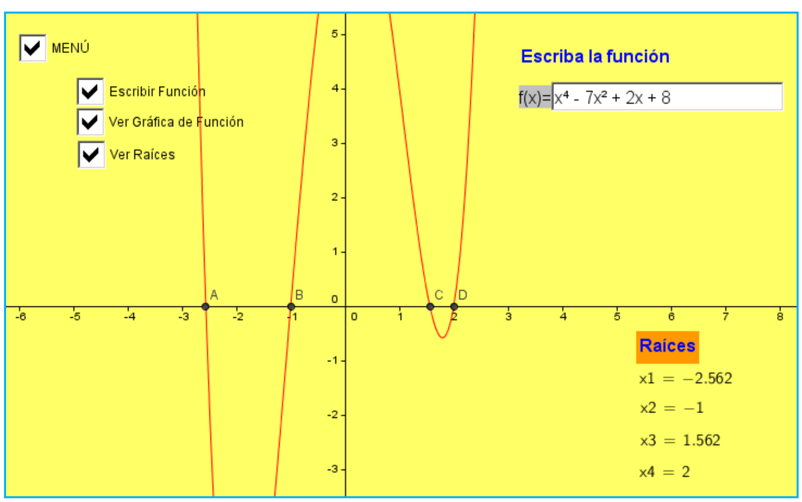
$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_4 \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

Obsérvese que las dos últimas raíces son números irracionales.

Obteniéndose de esta manera las cuatro raíces de la ecuación polinomial de cuarto grado.

La gráfica de la ecuación polinomial correspondiente es:



Compruébese las divisiones sintéticas realizadas con ayuda del Geogebra, utilizando la aplicación que se encuentra en la siguiente liga:

Click para accesar Geogebra

División Sinte.

1.4.4 Regla de los signos de Descartes

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ la ecuación polinomial de grado n, $(a_i \in \mathbb{R})$ y $a_0 \neq 0$, si al pasar de un coeficiente a su contiguo (diferente de cero), se tiene que tales coeficientes tienen signos diferentes, entonces se dice que hay una variación de signo de los coeficientes.

Por ejemplo

$$P(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 15x - 25$$

Tiene 5 variaciones de signo: $+, -, +, -, +, -$.

Regla de los signos

Sea $P(x) = 0$ la ecuación polinomial de grado n, con coeficientes reales y $a_0 \neq 0$, entonces:

1. El número de raíces positivas de $P(x) = 0$ contadas cada una tantas veces como indique la multiplicidad es igual al número de variaciones de signo de los coeficientes del polinomio p(x), ó es menor que este número disminuido en una cantidad par.

2. El número de raíces negativas de $p(x) = 0$ contadas cada una tantas veces como indique la multiplicidad es igual al número de variaciones de signo de los

coeficientes del polinomio evaluado en -x, es decir, $p(-x)$ ó es menor que este número disminuido en una cantidad par.

Por ejemplo:

Describa las posibles raíces que puede tener la siguiente ecuación polinomial:

$$p(x) = 6x^7 - 3x^5 + 4x^2 + x - 1 = 0$$

Por los 3 cambios de signo, podemos decir, que la ecuación dada tiene 3 ó 1 raíces positivas.

Para ver las raíces negativas, tenemos:

$$p(-x) = 6(-x)^7 - 3(-x)^5 + 4(-x)^2 + (-x) - 1$$

$$p(-x) = -6x^7 + 3x^5 + 4x^2 - x - 1$$

Por los 2 cambios de signo, podemos decir, que la ecuación dada tiene 2 ó 0 raíces negativas.

Por el Teorema Fundamental del Álgebra el polinomio dado tiene 7 raíces y analizando todas las posibilidades tenemos:

Raíces positivas	Raíces negativas	Raíces complejas
3	2	2
3	0	3
1	2	4
1	0	6

1.4.5 Solución de ecuaciones polinomiales utilizando la división sintética.

Resolver la ecuación: $3x^5 + 4x^4 - 43x^3 - 16x^2 + 100x - 48 = 0$

Tenemos la función polinomial: $p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 43x^3 - 16x^2 + 100x - 48$

Resolveremos de manera analítica esta ecuación.

De acuerdo a las 3 variaciones de signos se tendrán 3 ó 1 raíces positivas.

Para p(-x) tenemos

$$p(-x) = -3x^5 + 4x^4 + 43x^3 - 16x^2 - 100x - 48$$

De acuerdo a las 2 variaciones de signos (2) se tendrán 2 o 0 raíces negativas.

Por el Teorema Fundamental del Álgebra hay 5 raíces, y analizando todas las posibilidades se tiene:

Raíces positivas	Raíces negativas	Raíces complejas
3	2	0
3	0	2
1	2	2
1	0	4

Para encontrar las raíces se usará *la división sintética*:

Para encontrar las divisiones exactas utilizamos el siguiente hecho:

Para encontrar los posibles valores de “c” en (x – c) que divida de manera exacta al polinomio de grado n:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con a_n y $a_0 \neq 0$.

Se toma como posible valor de “c” a los factores del cociente $\frac{a_0}{a_n}$ (en su forma simplificada)

Para nuestro caso se tiene $\frac{48}{3} = 16$, por lo cual se prueba para valores de “c” a:

±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±16,.

Empezando con c = -1 y tomando los coeficientes del polinomio dado tenemos:

-1	3	7	-36	-52	48
		-3	-4	40	12
	3	4	-40	-12	$\boxed{60}$

Como el residuo (número 60 en el cuadrito) no es igual a cero, se concluye que (x+1) no es divisor del polinomio, es decir, no es factor del polinomio dado.

Continuamos probando

Tomando ahora c= 1 , por lo cual dividimos entre (x-1), obteniendo:

1	3	4	-43	-16	100	-48
		3	7	-36	-52	48
	3	7	-36	-52	48	$\boxed{0}$

El número en el cuadrito es cero, en este el caso, entonces un factor del polinomio dado es (x – 1), además el polinomio cociente es:

$$3x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 52x + 48$$

Factorizando la ecuación dada: $(x - 1)(3x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 52x + 48) = 0$

Obteniendo como primera raíz x_1=1

Tomemos los coeficientes del polinomio y consideremos c= -2, por lo cual dividimos entre (x + 2):

-2	3	7	-36	-52	48
		-6	-2	76	-48
	3	1	-38	24	0

Como el residuo en el cuadrito es cero, entonces un factor del polinomio es (x + 2).

Siendo el polinomio cociente:

$$3x^3 + x^2 - 38x + 24$$

Factorizando la ecuación dada tenemos: $(x - 1)(x + 2)(3x^3 + x^2 - 38x + 24) = 0$

Obteniéndose como segunda raíz x_2=-2

Tomando c=3, con lo cual dividimos entre (x - 3), obtenemos:

3	3	1	-38	24
		9	30	-24
	3	10	-8	0

Como el residuo en el cuadrito es cero, entonces un factor del polinomio es (x - 3).

Con lo cual el polinomio cociente es:

$$3x^2 + 10x - 8$$

Factorizando: $(x-1)(x+2)(x-3)(3x^2+10x-8) = 0$

Obteniendo como tercera raíz $x_3 = 3$

Ahora usaremos la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado, encontrando de esa manera las dos raíces que faltan:

$$x = \frac{-(10) \pm \sqrt{10^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)} = \frac{-10 \pm 14}{6}$$

$$x_4 = \frac{-10+14}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad x_5 = \frac{-10-14}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

Factorizando finalmente la ecuación tenemos:

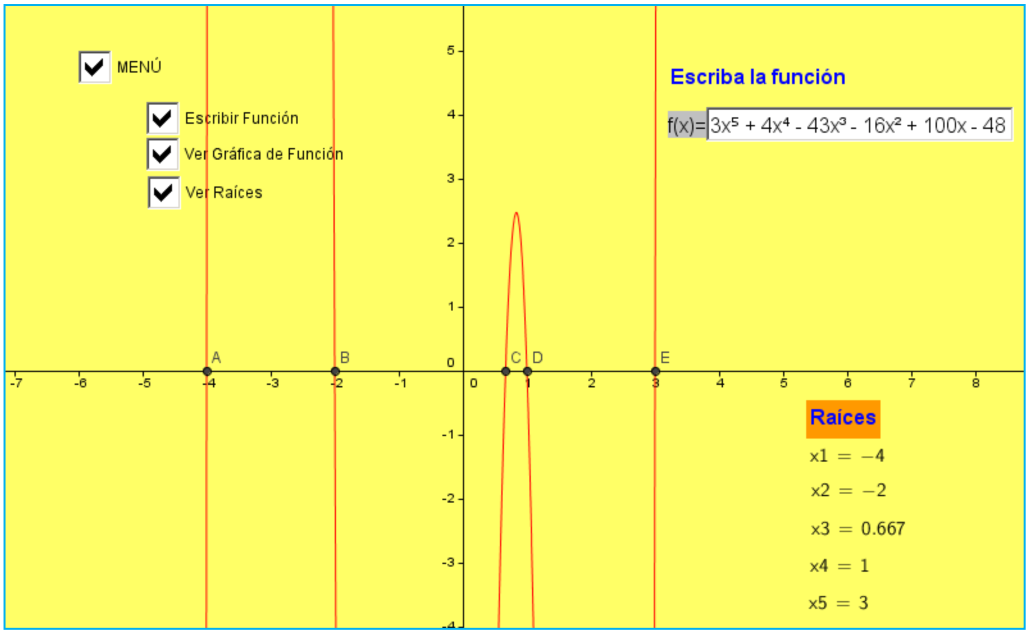
$$(x-1)(x+2)(x-3)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x+4) = 0$$

Observamos que hay tres raíces positivas: 1, 3, 2/3 y dos raíces negativas: -2, -4, que es uno de los casos posibles que mostraba la regla de los signos de Descartes.

Hemos obtenido de forma analítica la solución de la ecuación.

Con ayuda del Geogebra compruebe las soluciones de la ecuación polinomial anterior.

En Geogebra se obtiene la siguiente pantalla:



Click para accesar Geogebra

Raíces2

1.5 Problemas de aplicación.

En esta sección resolveremos problemas que en su planteamiento de solución, nos llevan a resolver una ecuación polinomial.

Hacemos mención de que es necesario definir adecuadamente cada variable que se va a utilizar en la solución de los problemas.

Por otro lado comentamos que algunos resultados de las raíces de las ecuaciones resueltas serán descartadas por no poder aplicarse a la solución real del problema en cuestión.

Ejemplo

1. Un estudiante de matemáticas IV, ha obtenido en su primer y segundo examen 6.5 y 7.5 respectivamente, ¿cuánto debe ser su calificación en su tercer examen para obtener un promedio de 8?

Sabemos que para obtener la calificación promedio de tres exámenes se debe calcular:

$$\frac{\boldsymbol{Calif.\ primer\ examen + calif.\ segundo\ examen + calif.\ tercer\ examen}}{\mathbf{3}}$$

Como sabemos que:

Calificación primer examen = 6.5
Calificación segundo examen = 7.5
Y como no conocemos la calificación del tercer examen, esta será nuestra incógnita que simbolizaremos por x.
Siendo la calificación promedio deseada de 8, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\mathbf{6.5+7.5}+\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}=\mathbf{8}$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$6.5 + 7.5 + x = (8)(3)$$

$$14 + x = 24$$

$$X = 24 - 14$$

$$x=10$$

2. Hay que cercar una huerta cuadrada con un alambrado. Si la cerca cuesta $1 peso por pie y el costo de preparar el terreno es de $ 0.50 por pie cuadrado, determina el tamaño de la huerta que puede cercarse a un costo de $120.
   Hacemos x= longitud del lado de la huerta

   El costo del alambrado será $1(perímetro)=$1(4x)=$4x

   El costo para preparar el terreno es $0.50(área)=$0.50(x^2)

   El costo total es Costo de alambrado+Costo de preparación del terreno

   Con esto se obtiene la siguiente ecuación

   $$120 = 4x + 0.50x^2$$

   Multiplicando por 2 tenemos

$$240 = 8x + x^2$$

Igualando a cero

$$x^2 + 8x - 120 = 0$$

Factorizando

$$(x - 12)(x + 20) = 0$$

Siendo las raíces

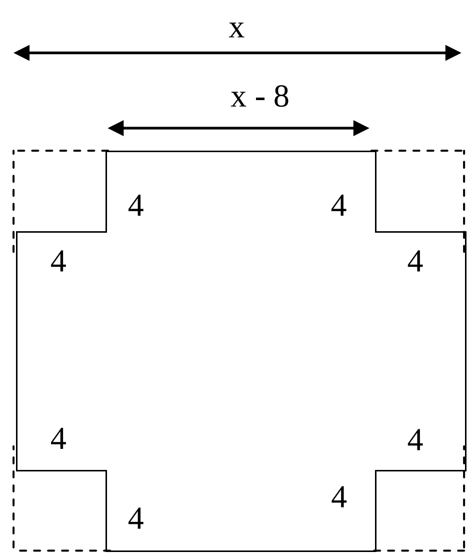
$$x_1 = 12 \text{ y } x_1 = -20$$

Como x es una longitud, la solución será

$$x = 12 \text{ pies}$$

3. Resolver el problema 1 dado en la sección 1.1

   Llamamos x = la longitud del cuadrado
   La longitud de la base cuadrada de la caja será: x - 8
   Con esto el volumen de la caja será: $(\boldsymbol{x-8})^{\mathbf{2}}(\mathbf{4})$



Luego tenemos la ecuación

$$(x-8)^2(4)=144$$

$$(x-8)^2=\frac{144}{4}$$

$$(x-8)^2=36$$

$$x-8=\pm 6$$

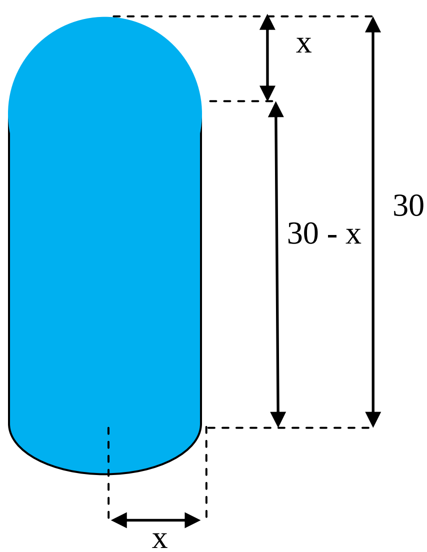
$$x=8\pm 6$$

Aquí obtenemos que x = 14 y x = 2, sin embargo no podemos considerar el valor de x=2, ya que no se formaría una caja como lo pide el problema.

Por lo tanto la solución sería x = 14, es decir una lamina de 14 pulgadas por lado.

4. Resolver el problema 2 dado en la sección 1.1

Hacemos x= radio de la base del cilindro= radio de la semiesfera



El volumen del cilindro es $\pi r^2 h=\pi x^2(30-x)$

El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$
Luego el volumen de la semiesfera es $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\frac{2}{3}\pi x^3$
El volumen total = volumen del cilindro + volumen de semiesfera

De donde obtenemos:

$$1008\pi \ = \pi x^2(30-x)+\frac{2}{3}\pi x^3$$

Simplificando tenemos:

$$3024 = 3x^2(30-x)+2x^3$$

$$3024 = 90\ x^2 - 3x^3 + 2x^3$$

Simplificando e igualando a cero obtenemos:

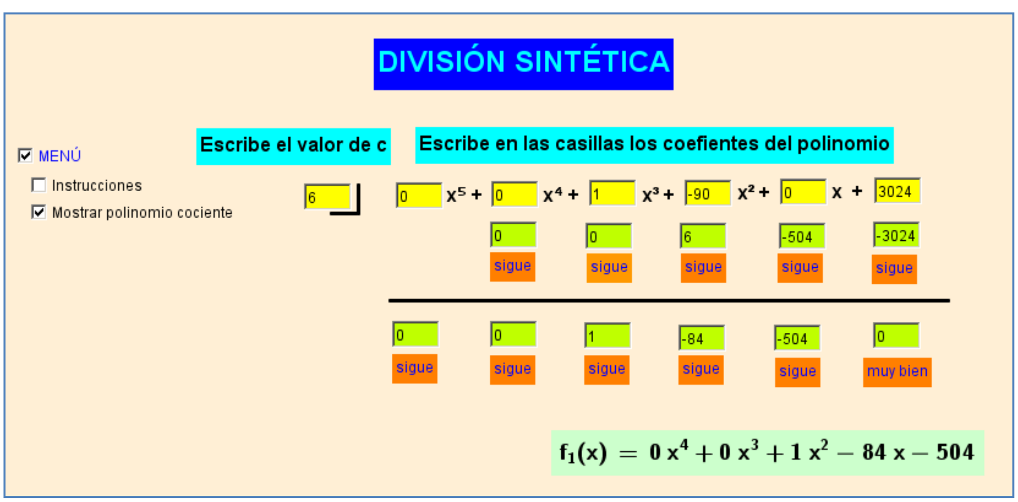
$$x^3-90x^2+3024=0$$

Para poder resolver esta ecuación cúbica utilizamos la división sintética, al dividir entre (x- c), en donde c es un factor de 3024.

Algunos de estos factores son = $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 6,\ \pm 7,\ \pm 8,\ etc.$ como nuestra x debe ser positiva, solamente tomamos los valores positivos.

Después de probar estos valores en la aplicación de Geogebra, obtenemos que con c=6, se obtiene la división exacta, obteniéndose como polinomio cociente:

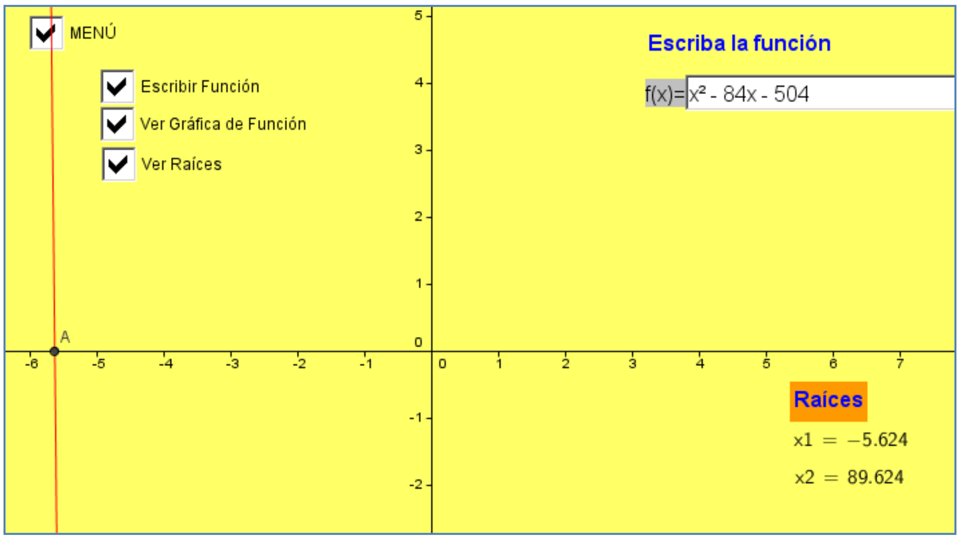
x^2 -84x-504



Click para accesar Geogebra

División Sinte.

la cual al resolverse como ecuación cuadrática con el Geogebra nos da los siguientes valores:



x=-5.624 y x= 89.624, los cuales no cumplen con las condiciones dadas en el problema, por lo cual la solución está dada por x= 6 pies.

Click para accesar Geogebra

Cilindro.ggb

5. “La regla del cubo en ciencia políticas” es una fórmula empírica, para pronosticar (en teoría) el porcentaje “y” de escaños en la cámara Estadounidense del Senado que un partido político obtendrá como consecuencia del voto popular para su candidato presidencial. Si x denota el porcentaje de dicho voto popular, la regla del cubo expresa que:

$$y = \frac{x^3}{x^3 + (1 - x)^3}$$

¿Qué porcentaje del voto popular necesitará el candidato para que su partido gane el 60% de los escaños?

Tenemos que:
x=porcentaje del voto popular del candidato presidencial
y= porcentaje de escaños en la cámara
sustituyendo el valor "y" en la fórmula tenemos la siguiente ecuación

$$\mathbf{0.60 = \frac{x^3}{x^3 + (1 - x)^3}}$$

Ahora encontraremos el valor de x

$$\boldsymbol{(0.60)(x^3 + (1 - x)^3) = x^3}$$

Desarrollando el binomio y multiplicando

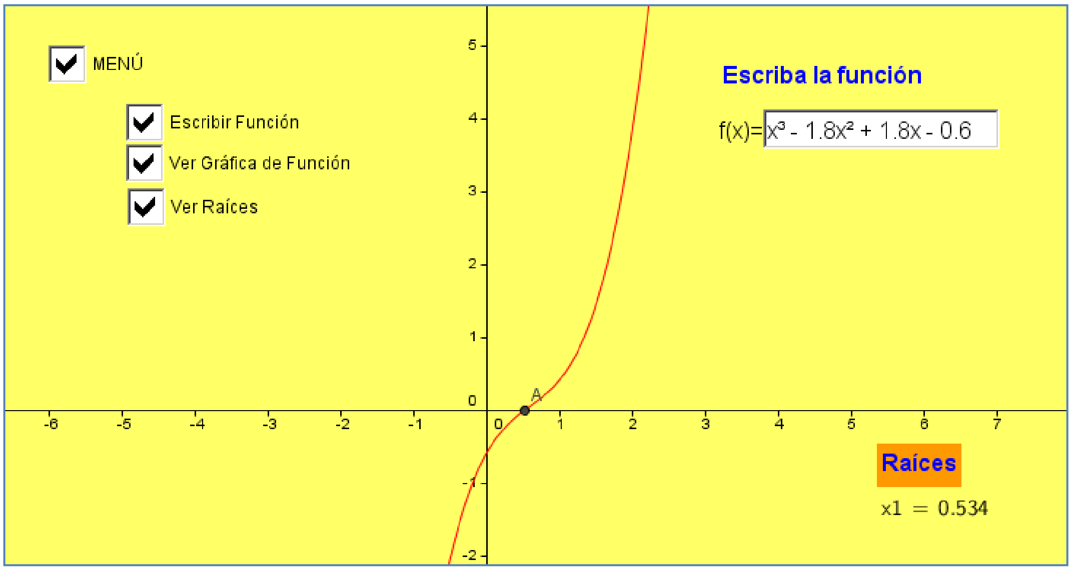
$$\boldsymbol{0.60x^3 + 0.60 - 1.8x + 1.8x^2 - 0.60x^3 = x^3}$$

Simplificando e igualando a cero tenemos:

$$\boldsymbol{x^3 - 1.8x^2 + 1.8x - 0.6 = 0}$$

Como no podemos resolver esta ecuación cúbica de manera analítica, se tiene que recurrir a los métodos de aproximación que ofrece la matemática en un curso de nivel profesional que recibe el nombre de Métodos Numéricos, sin embargo, en nuestro curso podemos apoyarnos del software Geogebra, para encontrar la mejor aproximación de la raíz real de esta ecuación.

En el Geogebra se tendría:



Obteniéndose como solución x=53.4% del voto popular.

Click para accesar Geogebra

[Aproximación cúbica]

1.6 EJERCICIOS

1. Encuentre todas las raíces reales de las siguientes ecuaciones:

   a) $x^3 + x^2 - 21x - 45 = 0$
   b) $3x^3 + 2x^2 - 75x - 50$
   c) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 12x - 18 = 0$
   d) $6x^3 - 25x^2 + 21x + 10 = 0$
   e) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$
   f) $2x^3 - 15x^2 + 24x + 16 = 0$
   g) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x = 0$
   h) $2x^3 - 5x - 3 = 0$

2. Determine todas las raíces reales y complejas de las siguientes ecuaciones:

   a) $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8 = 0$
   b) $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$
   c) $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 10x + 30 = 0$

3. Usando la regla de los signos de Descartes describa todas las posibilidades de la cantidad de raíces positivas, negativas y complejas de las siguientes ecuaciones polinomiales:

   a) $-x^3 - 2x^2 - 11 = 0$
   b) $4x^3 - 3x^2 - 7x + 9 = 0$
   c) $x^6 + 5x^5 - x^3 + 2x^2 - x - 8 = 0$

4. Un hacendado ha comprado cierto número de ovejas por $ 2160. Si hubiera comprado dos más, por la misma cantidad, habrían costado $12 menos cada una. ¿Cuántas compró?

5. Un campo rectangular es tal que su longitud es el triple de la anchura. Si se aumenta la longitud en 20 m y la anchura en 8 m, el área resulta triplicada. ¿Cuál es la superficie del campo?

6. El área de un campo rectangular es de 216 m^2, y su perímetro es de 60 m calcúlense sus dimensiones.

7. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 47 m, y la hipotenusa mide 37 m. Hállese la longitud de los catetos.

8. Dos llaves llenan un depósito en 6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitaría cada una de ellas, separadamente, para llenarlo, sabiendo que la primera tarda 5 horas más que la segunda?

9. Si un proyectil es lanzado verticalmente con una velocidad inicial de 500 m/s la altura h, después de t segundos está dada por la función:

$$h(t)= 512t-16t^2$$

   a) ¿Qué altura alcanza después de 6 segundos?
   b) ¿En qué momento alcanzará 3520 m?

10. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio con una velocidad inicial de 144 pies/s. su distancia s(t) en pies sobre el suelo, después de t segundos, está dada por $s(t) =-16t^2 + 144t +100$.

    a) Encuentra su máxima distancia arriba del suelo.
    b) Indica la altura del edificio.

11. La longitud de una pieza rectangular de cartón es 2 pulgadas mayor que su ancho. Se forma una caja abierta, como se muestra en la siguiente figura, cortando cuadrados de 4 pulgadas de cada esquina, y doblando los lados hacía arriba. El volumen de la caja debe ser 672 pulgadas cúbicas. Calcule las dimensiones del cartón original.