

LA PARÁBOLA

Una parábola se puede ver cuando observamos al mundo que nos rodea, así la podemos apreciar al observar la trayectoria del chorro de agua en algunas fuentes que lanzan el agua con cierto ángulo hacia arriba, Fig. No 1; se le puede observar en la estructura metálica de un puente, Fig. No 2; en la trayectoria del bote de una pelota de goma, Fig. No 3; también se visualiza en otro tipo de puente como el de la figura No 4.



Fig. No 1. Fuente



Fig. No 2. Puente A



Fig. No 3. Pelota botando



Fig. No 4. Puente B

A la vez, se pueden observar estructuras parabólicas en diversas construcciones como lo muestran las figuras No 5, No 6 y No7



Fig. No 5. Construcción A



Fig. No 6. Construcción B



Fig. No 7. Construcción C



Fig. No 8. Antena parabólica

De igual forma, se le puede observar en las antenas parabólicas, que las hay desde las que se usan en la recepción de señales de televisión casera, hasta las de las telecomunicaciones como la de la figura No 8. Estas son parábolas de revolución o sea que se obtienen al hacer girar una parábola sobre su vértice, que es el punto más alto, por ejemplo, en las figuras No. 5 y No. 6. Finalmente los faros de los autos antiguos son de forma parabólica como se muestra uno de ellos en la figura No 9.



Fig. No 9. Faro de un auto antiguo

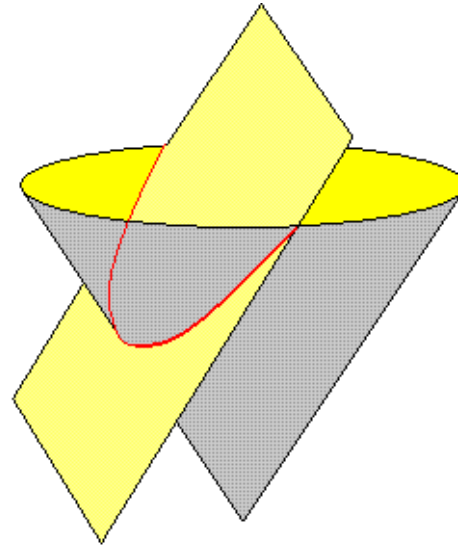


Fig. No10. Corte de un cono por medio de un plano paralelo a uno de sus lados

Una parábola se obtiene cuando se corta un cono de tal manera que el corte sea paralelo a uno de sus lados, como lo muestra la grafica de la Fig. No 10. Una vez que se ha observado a la parábola en la naturaleza, pasemos a estudiarla desde el punto de vista geométrico.

LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Definición: se llama parábola al lugar geométrico de un punto “P” que se mueve en el plano, de forma que tal que su distancia a un punto fijo “F”, llamado foco, es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz, o sea que $d(PF) = D(PA)$, ver Fig. No 11. La parábola puede extenderse hacia la derecha, como es el caso de la figura; hacia de izquierda; hacia arriba o hacia abajo.

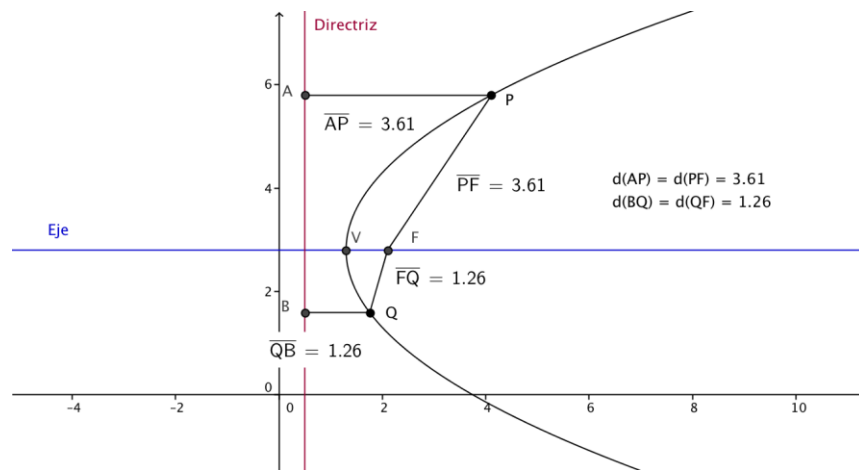


Fig. No 11. Observar que $d(AP)=d(PF)$ y $d(BQ)=d(PQ)$

CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA CON REGLA Y COMPÁS

Una forma de construir una parábola usando la regla y el compás, a partir de su definición, es la siguiente: Se parte de que se conoce la directriz “ d ”, y el foco de la parábola “ F ”. El foco es un punto fuera de la directriz.

- Se tiene a d y a F , se traza una recta perpendicular a la directriz, se le llama “eje focal” o simplemente eje, en este caso al punto de intersección del eje con la directriz le llamamos “ E ”.
- Se determina el vértice “ V ” de la parábola, es el punto medio del segmento EF .
Notar que V pertenece a la parábola porque $d(EV) = d(VF)$, de acuerdo con la definición de parábola.
- Se eligen de manera arbitraria algunos puntos sobre el eje focal a un lado del vértice V , del lado donde se encuentra el foco F , los llamaremos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, \dots$. Por cada uno de estos puntos se trazan rectas paralelas a la directriz, o sea rectas perpendiculares al eje focal.
- Con un compás y haciendo centro en el foco F y con radios $EE_1, EE_2, EE_3, EE_4, EE_5, \dots$ se trazan arcos de círculo que cortan a la recta E_1 en los puntos P_1 y P_1' ; a la recta E_2 en los puntos P_2 y P_2' ; a la recta E_3 en los puntos P_3 y P_3' ; a la recta E_4 en los puntos P_4 y P_4' ; a la recta E_5 en los puntos P_5 y P_5' ... Estos puntos pertenecen a la parábola. (los segmentos $P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3', P_4P_4', P_5P_5'$, son cuerdas de la parábola, en general un segmento que une dos puntos cualesquiera de la parábola se le llama cuerda)
- Cuando se unen los puntos $P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, V, P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$, mediante una línea continua se forma el trazo de una parte de la parábola, ya que la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha. Ver Fig. No 12.

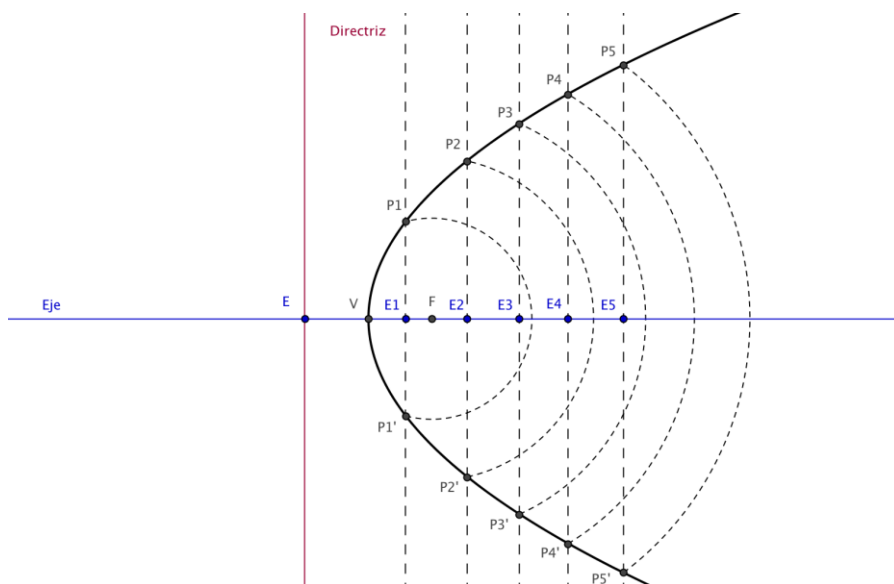


Fig. No 12. Parábola construida con regla y compás.

CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA CON REGLA

Otra forma de construir una parábola usando la regla, es la siguiente: Se parte de que se conoce la directriz “ d ”, y el foco de la parábola “ F ”.

- Se tienen a d y F , se traza el eje focal, al punto de intersección del eje focal con la directriz le llamamos E , el punto medio entre E y F , ya sabemos que es el vértice V de la parábola y que por ese punto pasa la curva.
- Se toma un punto sobre la directriz d , punto D_1 , se traza una recta perpendicular a d que pase por D_1 , luego se traza la mediatriz del segmento D_1F , el punto P_1 donde se cortan la mediatriz y la perpendicular a la directriz, es un punto de la parábola.
- Se toma otro punto sobre la directriz d , punto D_2 , se traza una recta perpendicular a d que pase por D_2 , luego se traza la mediatriz del segmento D_2F , el punto P_2 donde se cortan la mediatriz y la perpendicular a la directriz, es otro punto de la parábola.
- Se repite proceso b, tantas veces como se desee, para obtener más puntos de la parábola.
- Finalmente se unen los puntos mediante un trazo continuo, como resultado se obtiene parte de la parábola, Fig. No 3.

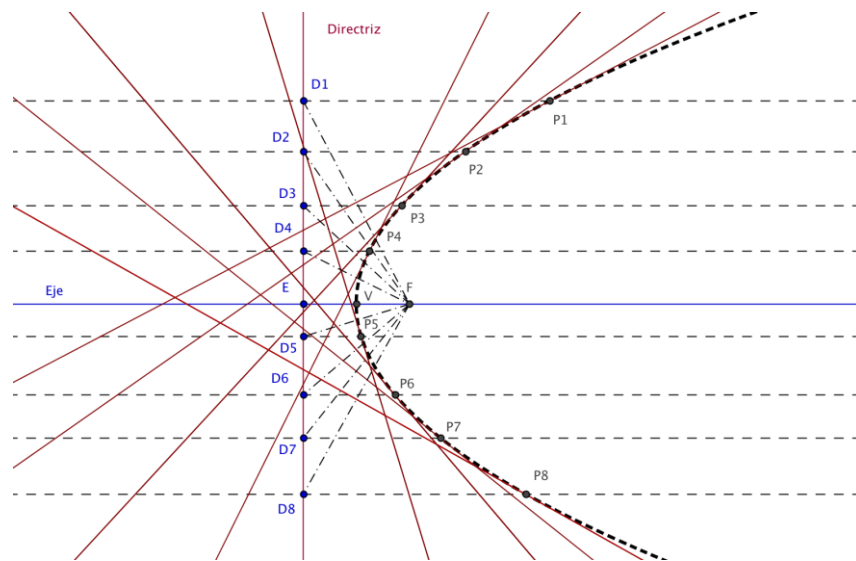


Fig. No 13. Parábola construida con escuadras.

Una variante de la construcción con regla, es el llamado construcción de la parábola con doblado de papel como recurso. En este método solo se necesita una hoja de papel y un marcador, la construcción se lleva a cabo de la manera siguiente:

- Sobre la hoja se marca un punto, el punto será el foco F , se recomienda marcarlo no lejos de uno de los bordes de la hoja, para un mejor trazo.
- Sobre el borde de la hoja más próximo al foco F , se marcan algunos puntos, se les etiqueta como D_1, D_2, D_3, \dots
- Se dobla el papel de tal forma que el punto D_1 coincida con el foco F , se desdobra el papel y se pasa el marcador sobre la marca del doblado

- d) Se repite el proceso del punto anterior con todos los puntos marcados, puntos D_2 , D_3 , D_4 , D_5 , ... Se podrá observar que las marcas del doblado forman la parábola, la Fig. No 14 muestra el marcado de dos dobleces mediante una línea roja; mientras que la fig. No 15 muestra 13 líneas que provienen de otros tantos dobleces de la hoja. Se aprecia como la figura resultante es una parábola. Más adelante se usarán estos mismos procesos en la construcción de parábolas de manera dinámica con el auxilio del software GeoGebra, que es de uso libre y su uso se está popularizando.

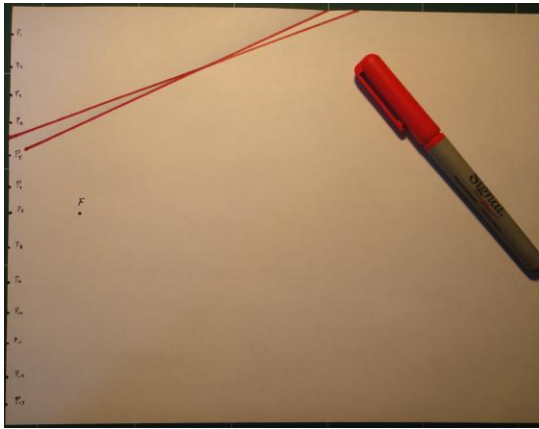


Fig. No 14. Parábola mediante el doblado de papel, dos dobleces.

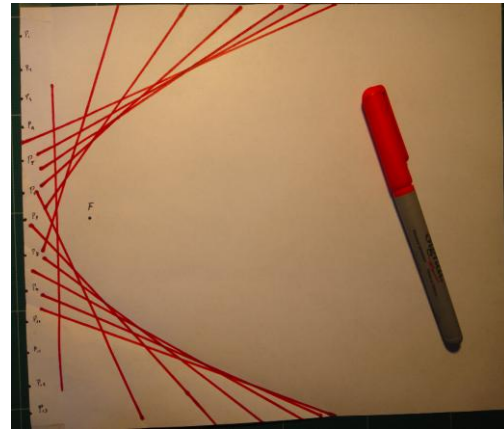


Fig. No 14. Parábola mediante el doblado de papel, trece dobleces.

En resumen, los elementos de una parábola con eje focal paralelo al eje “x”, son: Eje focal con ecuación $y = k$, directriz con ecuación $x = k - p$, foco con coordenadas $F(h + p, k)$, vértice con coordenadas $V(h, k)$ y lado recto, que es la cuerda perpendicular al eje focal que pasa por el foco, con longitud $LR = 4p$; se traza la recta tangente a la curva en el punto Q y se hace referencia a la propiedad de la parábola de que la distancia del foco a un punto “P” de la parábola $d(PF)$ es igual a la distancia de ese mismo punto a la directriz $d(PA)$.

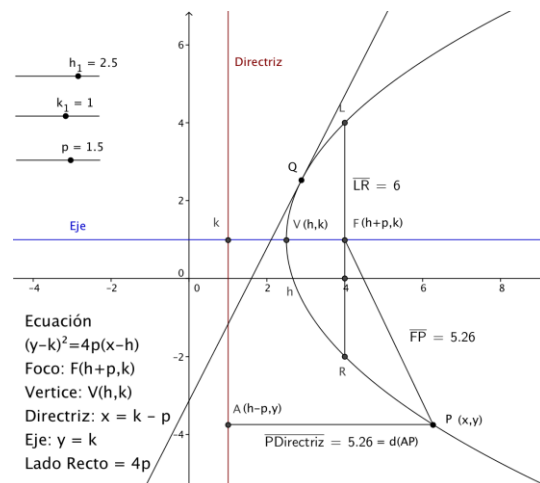


Fig. No. 15. Elementos de la Parábola

Actividad. Construir cuando menos una parábola con cada uno de los métodos de construcción anteriormente descritos; a) regla y compás, b) reglas, c) doblado de papel.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON EJE PARALELO AL EJE “X”.

Se parte de los elementos mostrados en la figura No. 15 y las siguientes condiciones:

- Parábola con eje focal paralelo al eje “x”; $y = k$
- Coordenadas del vértice $V(h, k)$
- La distancia del vértice al foco es $d(VF) = d(EV) = p$, propiedad de la parábola, entonces las coordenadas del foco son $F(h, k + p)$
- El punto A es el pie de la perpendicular desde el punto $P(x, y)$ a la directriz, tiene como coordenadas $A(h - p, y)$
- De la definición de parábola $d(PF) = d(PA)$, si se aplica la fórmula de distancia entre dos puntos, se tiene que:

$$d(PF) = \sqrt{[x - (h + p)]^2 + (y - k)^2} = \sqrt{[x - (h - p)]^2 + (y - y)^2} = d(PA)$$

$$\sqrt{(x - h - p)^2 + (y - k)^2} = (x - h + p)$$

al elevar al cuadrado ambos miembros, se obtiene:

$$(x - h - p)^2 + (y - k)^2 = (x - h + p)^2$$

desarrollando cuadrados en los dos miembros y simplificar se reduce a:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

que es la ecuación de la parábola, en **forma ordinaria**, con eje paralelo al eje “x”. Si p tiene valor positivo, la curva se extiende a la derecha, pero si p es negativa, entonces se extiende hacia la izquierda.

La figura No 14 está elaborada con el software GeoGebra. En la parte superior izquierda de la gráfica aparecen tres segmentos de recta con un punto sobre cada segmento y las letras $h_1=2.5$, $k_1=1$ y $p=1.5$, dichos segmentos se les denomina, en GeoGebra, deslizadores que se pueden mover con el “mouse” de izquierda a derecha, aumentando o disminuyendo el valor de h , k o p ; tienen la propiedad que nos permite explorar los efectos de dichos valores sobre la parábola.

En resumen, los elementos de la parábola anterior, verificables en la Fig. No 15, son:

Ecuación de la parábola, $(y - k)^2 = 4p(x - h)$; ecuación del eje, $y = k$; ecuación de la directriz, $x = h - p$; coordenada del foco, $F(h + p, k)$; coordenada de vértice $V(h, k)$; coordenadas de los extremos del lado recto $L(h + p, k + 2p)$, $R(h + p, k - 2p)$.

Al desarrollar el cuadrado en el lado izquierdo, el producto en el lado derecho e igualar a cero la ecuación ordinaria de la parábola, se obtiene:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4hp$$

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4hp = 0$$

Comúnmente la encontramos expresada como: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$, que se le denomina **ecuación general** de la parábola con eje paralelo al eje “x”. Es importante observar que: $D = -4p$; $E = -2k$; y $F = k^2 + 4hp$

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON PARALELO AL EJE “Y”.

Se parte de los elementos mostrados en la figura No. 16 y las siguientes condiciones:

- Parábola con eje focal paralelo al eje “y”, ecuación $x = h$
- Coordenadas del vértice $V(h, k)$; coordenadas del foco $F(h, k + p)$; coordenadas de los extremos del lado recto $L(h - 2p, k + p)$, $R(h + 2p, k + p)$
- Directriz $y = k - p$
- El punto A es el pie de la perpendicular desde el punto $P(x, y)$ a la directriz, tiene como coordenadas $A(x, k - p)$

De la definición de parábola $d(PF) = d(PA)$, si se aplica la fórmula de distancia entre dos puntos, se tiene que:

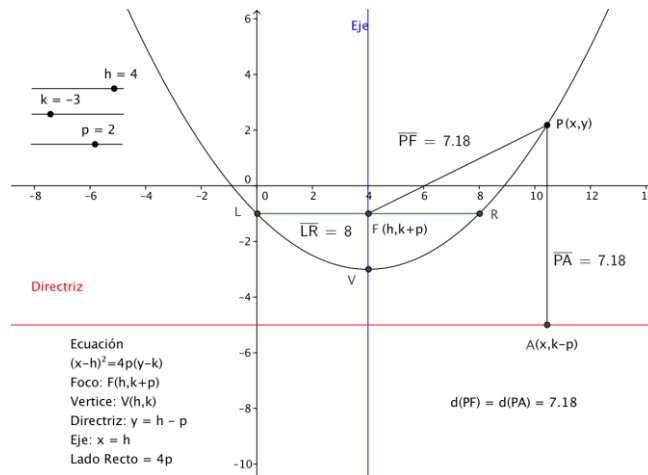


Fig. No 16. Parábola con eje vertical

$$d(PF) = \sqrt{[y - (k + p)]^2 + (x - h)^2} = \sqrt{[y - (k - p)]^2 + (x - x)^2} = d(PA)$$

$$\sqrt{(y - k - p)^2 + (x - h)^2} = (y - k + p)$$

al elevar al cuadrado ambos miembros, se obtiene:

$$(y - h - p)^2 + (y - k)^2 = (x - h - p)^2$$

desarrollando cuadrados en los dos miembros y simplificar se reduce a:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

que es la ecuación de la parábola, en **forma ordinaria**, con eje paralelo al eje “y”. Si p tiene valor positivo, la curva se extiende a hacia arriba, pero si p es negativa, entonces se extiende hacia abajo.

Nuevamente, al desarrollar el cuadrado en el lado izquierdo, el producto en el lado derecho e igualar a cero la ecuación ordinaria de la parábola, se obtiene:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4kp$$

$$x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4kp = 0$$

Comúnmente la encontramos expresada como: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, que se le denomina **ecuación general** de la parábola con eje paralelo al eje “y”. Es importante observar que: $D = -2h$; $E = -4p$; y $F = h^2 + 4kp$

Los ejercicios que comúnmente se encuentran en los libros de texto, por lo general son ejercicios muy puntuales, es decir:

- a) Se da la ecuación de la cónica y se piden los elementos de la parábola y un esbozo de su gráfica. El problema se reduce a identificar la forma en un primer momento, después identificar sus elementos y bosquejarlos en una gráfica.
- b) Se da la ecuación de la curva en forma general y se piden los elementos de la parábola y un esbozo. Aquí es necesario pasar de la forma general a la forma ordinaria mediante la factorización de la ecuación, posteriormente el proceso es el descrito en el punto anterior
- c) Ejercicios donde se dan solo algunos elementos de la parábola y se pide su ecuación, y
- d) Algunos ejercicios de aplicación, aunque suelen ser pocos.

Los ejercicios los abordaremos usando el software de uso libre GeoGebra, iniciaremos con la exploración de la parábola a partir de la ecuación ordinaria en sus dos casos; eje focal vertical y eje horizontal, se pretende explorar los efectos de los valores h, k y p, sobre la forma de la parábola. Posteriormente se hará un análisis con la ecuación general en donde exploraremos los efectos de los cambios sobre los valores de D, E y F, con la intención de relacionarlos con los valores h, k y p. Posteriormente retomaremos la construcción de la parábola como si usáramos regla y compás, finalmente daremos respuesta a los ejercicios que cotidianamente se encuentran en los textos de geometría analítica.

Se parte de que el alumno ya sabe navegar en el software, así que aquí se indican los pasos a seguir en las diversas construcciones de la parábola