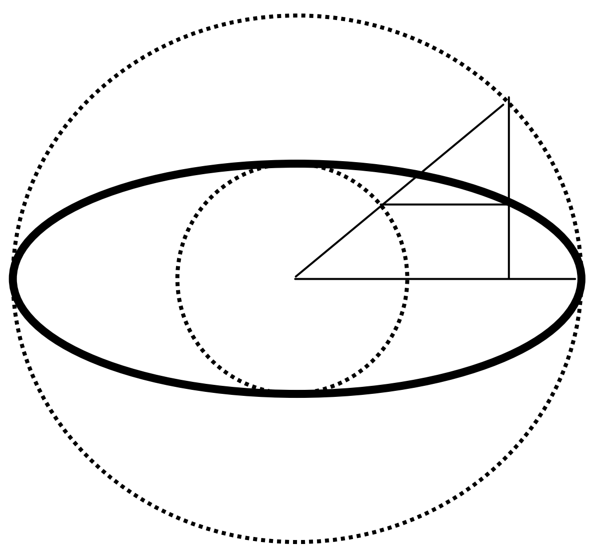
UNIDAD 4

ELIPSE y CIRCUNFERENCIA,
SUS ECUACIONES CARTESIANAS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno:

- Conocerá y deducirá la ecuación canónica de la elipse y la circunferencia.
- Conocerá y aplicará las ecuaciones ordinarias de la elipse y la circunferencia.
- Aplicará las ecuaciones en problemas de aplicación...
- Resolverá problemas de corte euclidiano.



Tenga en mente: **LAS MATEMÁTICAS SE DISFRUTAN RAZONANDO**. Sin lo anterior, las matemáticas se le harán muy aburridas y rápidamente abandonará su estudio. Así que, con buen ánimo a lo largo del siguiente trabajo usted podrá estudiar y aprender el siguiente:

Contenido

UNIDAD 4. Elipse y circunferencia, sus ecuaciones cartesianas. 3

4.1. La elipse. 4

4.1.1. La elipse como lugar geométrico. 5
Construcción y algunas propiedades. 5
Ecuación referida al centro de la elipse. 8
Excentricidad. 11
Lado recto. 11

4.1.2. Ecuación de la elipse, con ejes paralelos a los ejes de coordenadas. 12
Ecuación estándar. 12
Ecuación general. 16

4.1.3. Aplicaciones. 18
Órbitas. 18
Recta tangente. 18
Reflexiones. 19
Regiones en el plano. 20

4.2. La circunferencia. 21

4.2.1. La circunferencia como lugar geométrico. 21
Definición de circunferencia. 21
Elementos de la circunferencia. 22

4.2.2. Ecuación cartesiana. 23
Ecuación estándar. 23
Ecuación general. 24

4.2.3. Aplicaciones. 26
Circunferencia sujeta a condiciones dadas. 26
Rectas tangentes. 27
Intersecciones. 28
Regiones. 29

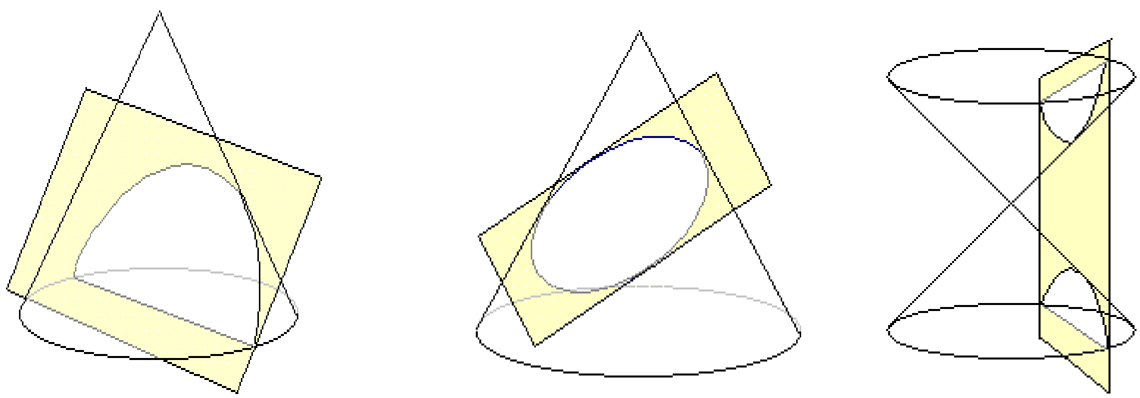
4.3. Ejercicios. 30

Nota. El contenido, también se acompaña con algunas prácticas en GeoGebra. Software que permitirá “ver geométricamente” mucho del contenido anterior.

UNIDAD 4. ELIPSE Y CIRCUNFERENCIA, SUS ECUACIONES CARTESIANAS.

Se afirma que el estudio de las cónicas fue iniciado por Menecmo y Eudoxio al intentar resolver el problema del Oráculo de Delfos, consistente en la duplicación del cubo —dado un cubo determinar con regla y compás otro que contenga el doble de volumen, mediante un número finito de pasos—.

Es el matemático Apolonio de Perga, conocido como el gran geómetra, quien escribió un tratado sobre las cónicas formado por ocho libros. En su libro “Cónicas” estudia las figuras que se pueden obtener al cortar un cono circular recto por un plano según sea el ángulo de corte: punto, recta, dos rectas que se cruzan, circunferencia, parábola, elipse o hipérbola. Es a Arquímedes a quien se debe el nombre de parábola y a Apolonio los nombres de elipse y de hipérbola.

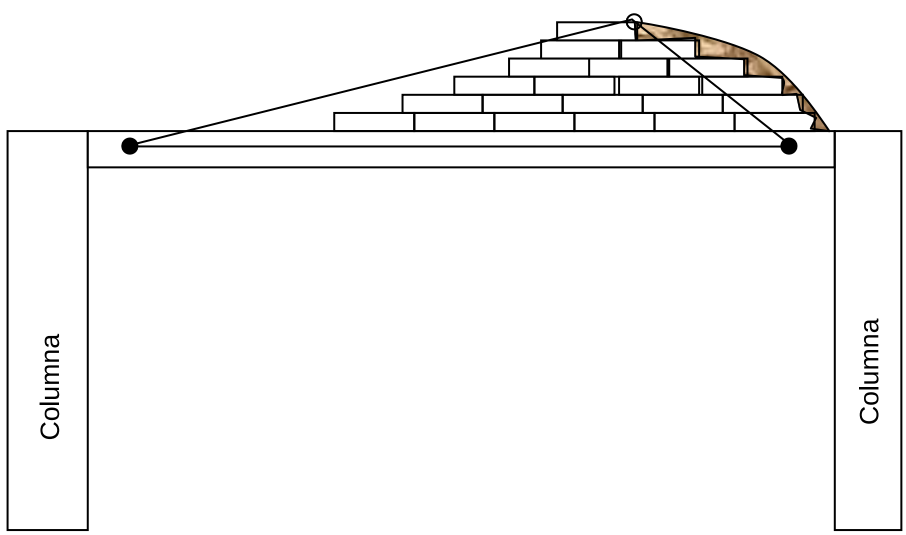


En el estudio actual de las cónicas se pueden considerar como el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la razón de sus distancias a un punto fijo y a una recta fija es constante, llamada excentricidad. En todo esto, la gran aportación de René Descartes por el siglo XVII es el de haber podido analizar los elementos de cada una de las cónicas y reflejar mediante una ecuación algebraica de segundo grado la relación de las cualidades geométricas de dichas curvas.

Finalmente, el matemático belga Dandelin en el siglo XIX realizó un trabajo en el cual mostró que efectivamente las cónicas tratadas como curvas descritas por ecuaciones algebraicas correspondían a las secciones cónicas. Para ello, mostró en un cono en el que usó esferas inscritas tangentes a su superficie interior: la existencia de los focos, las rectas directrices, la excentricidad, etc. Es decir, mostró la existencia geométrica de cada una de las curvas como una sección cónica en su trabajo conocido como **Esferas de Dandelin**.

4.1. LA ELIPSE.

En el palacio de Gobierno de mi pueblo se están realizando remodelaciones y un albañil está construyendo la parte frontal de los portales. La figura que generó no es lineal como es común (una dala), tampoco es la de una circunferencia (pues utilizaría un clavo y una cuerda). En ésta ocasión utilizó dos armellas fijas, pasó un cordel por las armellas el cual estaba amarrado por sus extremos. Al tensar el cordel determinó puntos de referencia para colocar los tabiques auxiliares sobre un tablón —pues no van pegados con mezcla, después del colado los quitó—. Rellenó las esquinas de los tabiques para fijar el lugar por donde marcaba el cordel. Después de ello, sobre esta figura pegó tabiques con mezcla y al final la dala y el techo. Al quitar los tabiques auxiliares quedó una figura curva que no es una circunferencia.



Aunque al albañil no le importa lo que realizaremos aquí y para colmo ni cuenta se va a dar, a nosotros podría servirnos en el futuro profesional un poco de curiosidad con el trazo de su figura. Así que, aunque el albañil logra sus propósitos sin saber el porque, nosotros trataremos de lograr algo de conocimiento con su técnica constructiva a lo largo de la siguiente sección.

4.1.1. LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

Como introducción de la nueva figura por estudiar, primeramente lo haremos a base de: preguntas, definiciones y algo más… Podrá observar la gran variedad de preguntas que se pueden hacer cuando se tiene curiosidad por las cosas.

CONSTRUCCIÓN Y ALGUNAS PROPIEDADES.

i. La curiosidad inicial es saber la forma completa de la curva que se obtiene con este método. Primero, en un cartón podemos fijar dos tachuelas separadas por 24 cm. Segundo, tomemos un hilo de poco más de 50 unidades de largo y lo amarramos por sus extremos para que quede el hilo amarrado de 50 cm. Tercero, con el hilo envolvemos las tachuelas y lo tensamos con un lápiz. Para terminar, trasladamos el lápiz manteniendo el hilo tenso y tracemos la curva. La figura generada es como la siguiente:

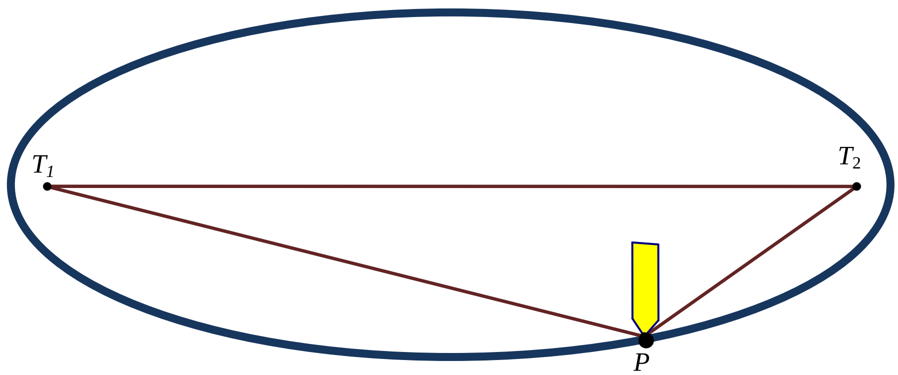


Fig. 4.1. Construcción de la elipse.

Al seguir jugando con la construcción, podemos alterar la separación de las tachuelas y conservar el tamaño del hilo. Al acercarlos la figura se parece más y más a una circunferencia y en el límite (cuando se juntan) es una circunferencia de radio 25 cm. Por otro lado, si los alejamos se hace más aplanada llegando a ser dos segmentos empalmados de tamaño 25 cm.

ii. La curva trazada se llama **elipse**. Mientras que, las tachuelas son dos puntos fijos y se toman como puntos de referencia para el trazado de la curva. Los puntos fijos se llaman **focos** y la distancia entre ellos es llamada **distancia focal**. En este ejercicio, vale 24 cm (es la separación entre las tachuelas).

iii. Al girar 180° la elipse sobre la recta que une los focos tenemos que coincide la elipse girada con la original, se dice que esta línea es un eje de simetría. Note que también es eje de simetría la mediatriz a los focos. Estos **ejes de simetría** son llamados el **eje principal** (el que pasa por los focos) y el **eje secundario** (es la mediatriz a los focos). El punto donde se cruzan los dos ejes es llamado **centro** de la elipse**,** el cual es un punto de simetría.

iv. Considere cualquier punto de la elipse, llámelo P. ¿Cuánto mide $\left|\overline{T_1P}\right| + \left|\overline{T_2P}\right|$?

En la figura 4.1, sabemos que todo el hilo amarrado es de 50 cm, de donde

$$\left|\overline{T_1P}\right| + \left|\overline{T_2P}\right| + \left|\overline{T_1T_2}\right| = 50$$

También sabemos que la distancia focal es de 24 cm, por lo que

$$\left|\overline{T_1P}\right| + \left|\overline{T_2P}\right| + 24 = 50$$

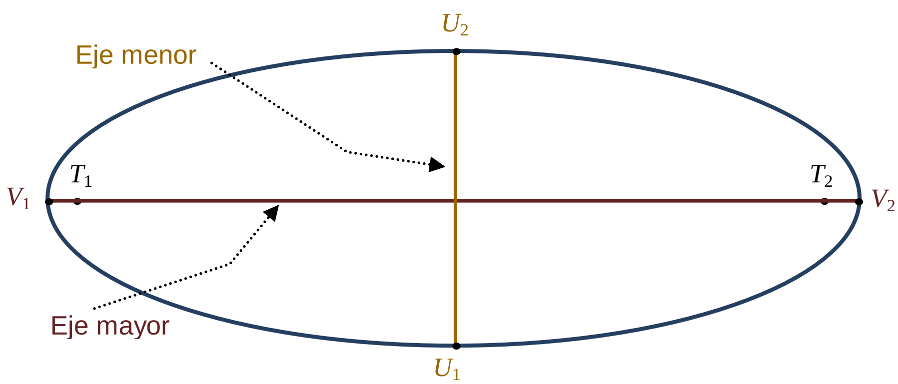
$$\left|\overline{T_1P}\right| + \left|\overline{T_2P}\right| = 50 - 24$$

$$\left|\overline{T_1P}\right| + \left|\overline{T_2P}\right| = 26$$

Concluyendo, **¡la distancia de cada foco al mismo punto de la elipse al sumarlas es constante!**, en este caso da 26 cm.

v. Los puntos de la elipse que se encuentran en el eje principal son llamados **vértices** y el segmento que los une se llama **eje mayor**. Mientras que, los vértices de la elipse sobre el eje secundario forman el **eje menor**. ¿Qué tamaño tienen?

Veamos los ejes en un modelo geométrico.



Para el eje mayor, V_1V_2.

Como V_2 es uno de los tantos puntos de la elipse, debe cumplirse

$$\left|\overline{T_1V_2}\right| + \left|\overline{T_2V_2}\right| = 26$$ (ya se justificó)

El segmento T_2V_2 por simetría es igual a V_1T_1, al sustituirlo resulta

$$\left|\overline{T_1V_2}\right| + \left|\overline{V_1T_1}\right| = 26$$

De donde, $$\left|\overline{V_1V_2}\right| = 26$$

Para el eje menor.

Nuevamente, U_2 es otro de los tantos puntos de la elipse. Se cumple:

$$\left|\overline{\mathrm{T}_1 U_2}\right| + \left|\overline{\mathrm{T}_2 U_2}\right| = 26$$

Por simetría, el triángulo $T_1T_2U_2$ es isósceles, por lo que $\left|\overline{\mathrm{T}_2 U_2}\right| = 13$.

Ahora con la mitad del triángulo isósceles, en donde C es el centro de la elipse, se tiene un triángulo rectángulo. Al aplicar el Teorema de Pitágoras, resulta

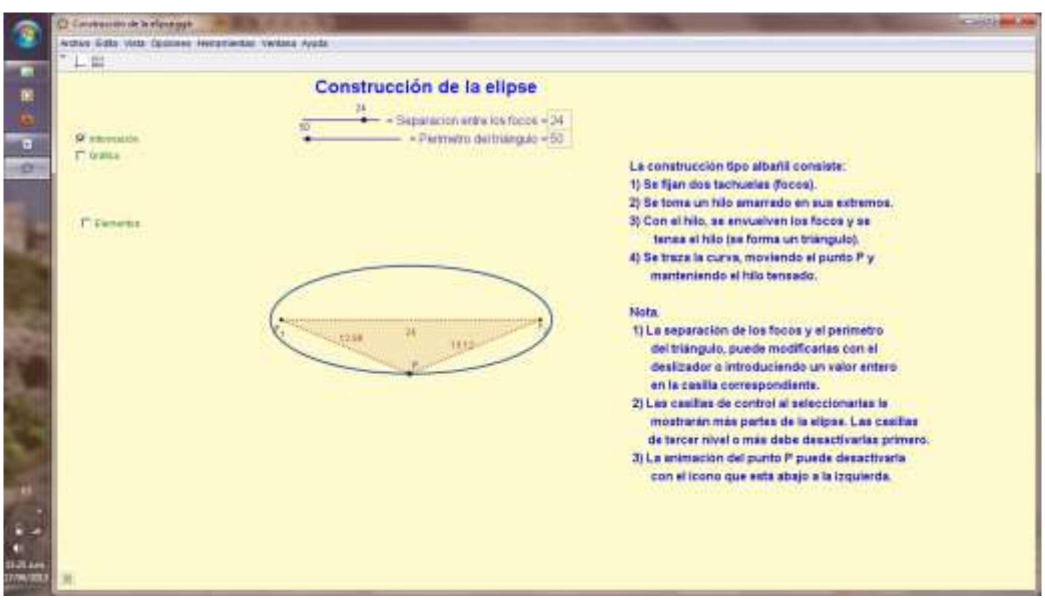
$$\left(\overline{U_2 C}\right)^2 + (12)^2 = (13)^2$$

Al resolverla $\overline{U_2 C} = \pm 5$.

En consecuencia, el eje menor debe medir 10 cm, porque es el doble del valor calculado (con valor positivo).

Aunque hay algunas cosas más por verse en esta particular elipse, ya nos dimos una idea de la curva que quedó como adorno en los portales de mi pueblo: ¡son elipses! Bien, al analizar curvas particulares en la mayoría de las ocasiones se tiene el inconveniente de que no se aprecian generalidades en ellas o fórmulas que permitan predecir comportamientos u otras cosas. Ahora lo conveniente es analizar las elipses en su forma general para después aplicarlas.

Nota. Como ayuda, todos los conceptos de esta sección y otros, puede repasarlos con la práctica en GeoGebra: CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE.
El inicio de la práctica es como se muestra



ECUACIÓN REFERIDA AL CENTRO DE LA ELIPSE.

A partir del inciso iv de la anterior sección, tenemos la siguiente:

Definición. Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es igual a una constante.

Bien, para describir a la elipse mediante una fórmula es conveniente definir también a los parámetros que intervienen en ella:

Distancia focal, $d(F_1, F_2) = 2c$ — F_1 y F_2 representan los focos, son los puntos fijos de la elipse, $c > 0$

Eje mayor, $d(V_1, V_2) = 2a$ — V_1 y V_2 son los vértices mayores (extremos del eje mayor), $a > 0$.

Eje menor, $d(U_1, U_2) = 2b$ — U_1 y U_2 son los vértices menores (extremos del eje menor), $b > 0$.

En la figura 4.2, aplicando la definición:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = constante$$

En particular, $d(F_1, V_2) + d(F_2, V_2) = constante$

¿La constante cuánto vale? Para determinarla se descompone el eje mayor

$$d(V_1, V_2) = d(V_1, F_1) + d(F_1, V_2)$$

por simetría $d(V_1, F_1) = d(F_2, V_2)$.

Al relacionarlas, $d(V_1, V_2) = d(F_2, V_2) + d(F_1, V_2)$

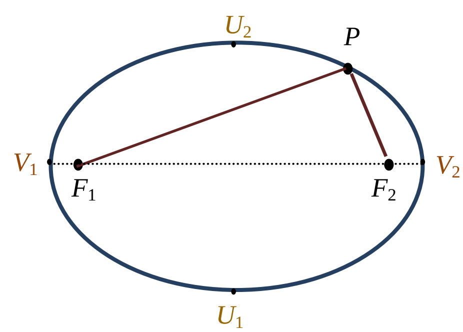


Fig. 4.2. La elipse

Al ser V_2 un punto de la elipse, $d(V_1, V_2)$ debe ser igual a la constante buscada y como es un parámetro definido como $2a$, se concluye:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a \tag{4.1}$$

¡La constante siempre es igual a la medida del eje mayor! La ecuación (4.1) puede ser considerada como la **relación algebraica** de la elipse.

Por otro lado, la elipse al generarse en un plano obliga a considerar cada uno de sus puntos como descrito por dos segmentos perpendiculares (pueden ser representados con variables). En la figura 4.3, sean estos: $\overline{CT} = x$ es el desplazamiento desde el centro C de la elipse a la proyección del punto P sobre el eje mayor y $\overline{TP} = y$ como el desplazamiento de su proyección sobre el eje menor. Con estas consideraciones, ahora podemos determinar una fórmula que relacione a los desplazamientos —En el plano cartesiano, el centro de la elipse está en el origen y los valores x e y son las coordenadas del punto P—.

Al menos hay dos formas de deducir la ecuación: (1) Mediante distancias y trabajar con raíces (el más común de los cursos), (2) Al estilo pre-analítico, se resuelve un sistema de ecuaciones y no se trabajan las raíces (lo usaremos)

Se tiene dos triángulos rectángulos por considerar: F_1TP y F_2TP. Se cumple:

$$\overline{F_1T}^2 + \overline{TP}^2 = \overline{F_1P}^2 \qquad \text{(a)}$$

$$\overline{F_2T}^2 + \overline{TP}^2 = \overline{F_2P}^2 \qquad \text{(b)}$$

Aquí $\overline{F_1T} = x + c$

y

$$\overline{TF_2} = c - x \quad \text{o} \quad \overline{F_2T} = x - c$$

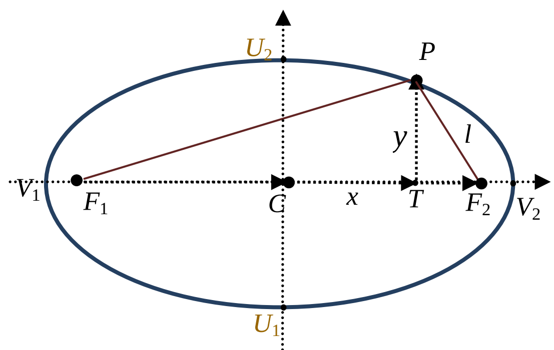


Fig. 4.3. Desplazamientos de P.

Simplificando simbología, digamos que $\left|\overline{F_2P}\right| = l$. En consecuencia $\left|\overline{F_1P}\right| = 2a - l$, ya que debe cumplirse la relación algebraica (4.1). Ahora reemplacemos lo anterior en las relaciones pitagóricas:

$$(x + c)^2 + (y)^2 = (2a - l)^2$$

$$(x - c)^2 + (y)^2 = (l)^2 \qquad \text{(c)}$$

Al restar una a la otra,

$$(x + c)^2 - (x - c)^2 = (2a - l)^2 - (l)^2$$

Se desarrollan las potencias y se simplifica

$$x^2 + 2cx + c^2 - x^2 + 2cx - c^2 = 4a^2 - 4al + l^2 - l^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4al$$

$$cx = a^2 - al$$

Se despeja l,

$$l = \frac{a^2 - cx}{a}.$$

Este valor de l, se sustituye en (c) para obtener una ecuación que dependa de los parámetros de la elipse y de los desplazamientos del punto P.

$$(x-c)^2+y^2=\left(\frac{a^2-cu}{a}x\right)^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2}$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad \text{(d)}$$

La ecuación final no parece más simple que la inicial y nos queda la sensación de frustración. Ahora es conveniente un descanso en la secuencia para analizar parte del resultado obtenido.

Recordemos que el triángulo F_2CU_2 es rectángulo, figura 4.4.

En él, $d(C,F_2)=c$ y $d(C,U_2)=b$.

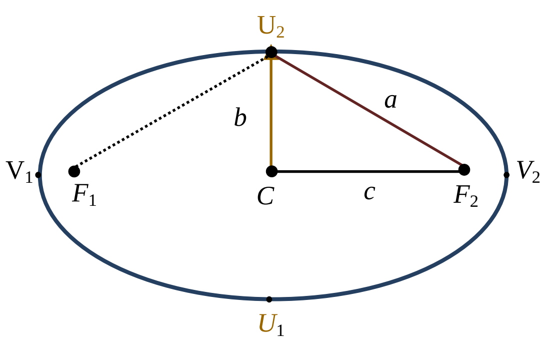


Fig. 4.4. Relación entre los parámetros.

Además, $d(F_1,U_2)+d(F_2,U_2)=2a$, porque U_2 es punto de la elipse. Al tener $d(F_1,U_2)=d(F_2,U_2)$, resulta

$$d(F_2,\ U_2)=a.$$

Ahora, el Teorema de Pitágoras permite que tengamos la **relación pitagórica de los parámetros** de la elipse:

$$b^2+c^2=a^2 \qquad (4.2)$$

También se afirma que $b^2=a^2-c^2$. Se aprovecha la igualdad y se sustituye en lo obtenido (en d), quedando

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

Al simplificar, obtenemos **la ecuación canónica de la elipse:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.3}$$

EXCENTRICIDAD.

Una forma de medir que tan redonda o que tan plana es una elipse se hace mediante la **excentricidad** e. Se define, como **la razón de la distancia focal al eje mayor**. Reducida queda (el 2 del numerador y el 2 del denominador se cancela)

$$e=\frac{c}{a} \tag{4.4}$$

En la elipse la excentricidad es un valor entre 0 y 1, $c < a$. El ser más redonda se logra cuando se acercan los focos, o también $c << a$; y e se aproxima al 0. Para el caso particular de una circunferencia $c = 0$ y por tanto $e = 0$. Mientras que, si los focos se separan cada vez más sin cambiar el eje mayor, estos se acercan a los vértices mayores (la elipse es muy plana), c y a son casi iguales. De donde e es próximo al 1.

LADO RECTO.

El **lado recto** también sirve como un auxiliar para el trazado rápido de la elipse. Su valor está dado por la siguiente fórmula (su deducción se deja como ejercicio):

$$\text{lado recto}=\frac{2b^2}{a} \tag{4.5}$$

Ejemplo 1) A partir de la construcción realizada en la anterior sección, determine su excentricidad y el lado recto de la elipse, figura 4.1.

Los parámetros que describen a la elipse son: $a = 13$, $b = 5$ y $c = 12$. En consecuencia, su excentricidad tiene un valor de:

$$e=\frac{12}{13}=0.\overline{923076}$$

Los planetas, normalmente tienen una excentricidad menor a un décimo de unidad. Sus trayectorias elípticas son muy “redondas”.

Mientras que su lado recto mide

$$l.r.=\frac{2\times 5^2}{13}=\frac{50}{13}=3.\overline{846153}$$

. . .

4.1.2. ECUACIÓN DE LA ELIPSE, CON EJES PARALELOS A LOS EJES DE COORDENADAS.

Se ha definido: *una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los focos es constante*. Los puntos fijos F_1 y F_2 son los focos, que supondremos separados una distancia $2c$. También aprendimos que la constante equivale al tamaño del eje mayor de valor $2a$. Los puntos P cumplen con (4.3):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{o} \qquad \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$$

La primera está referida a ejes de coordenadas XY, mientras que la segunda es como si consideráramos ejes de coordenadas UV. En esta última ecuación a y u son el valor del semieje mayor y el desplazamiento del punto P sobre el mismo eje, ambos forman un cociente. Mientras que, b y v son los valores correspondientes con respecto al eje menor.

ECUACIÓN ESTÁNDAR.

A partir de la anterior ecuación podemos determinar la representación de la elipse en el sistema cartesiano según su posición. En la figura 4.5, se ha colocado la elipse tal que su centro se encuentra en el punto $C\ (h,\ k)$ y su eje mayor paralelo al eje X, también se marcan sus desplazamientos. Para determinar la ecuación de la elipse relativa a los ejes x-y, deducimos las siguientes relaciones (son directas):

$$h+u=x \quad \rightarrow \quad u=x-h$$

y

$$k+v=y \quad \rightarrow \quad v=y-k$$

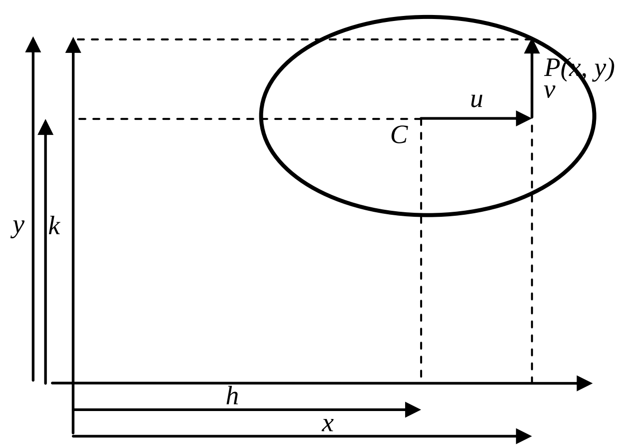


Fig. 4.5. Elipse con centro $C(h,\ k)$.

Al sustituirlos en la ecuación canónica, obtenemos la **forma estándar de la elipse centrada en $C(h,\ k)$ y eje mayor paralelo al eje x**.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (4.6)$$

Los puntos notables deben definirse a partir de sus coordenadas. Además, deben de cumplirse todas las relaciones estudiadas. A saber:

- $F_1(h-c, k)$ y $F_2(h+c, k)$. Se cumple $d(F_1, F_2) = 2c$
- $V_1(h-a, k)$ y $V_2(h+a, k)$. Se cumple $d(V_1, V_2) = 2a$
- $U_1(h, k-b)$ y $U_2(h, k+b)$. Se cumple $d(U_1, U_2) = 2b$
- El punto medio a los tres segmentos anteriores es el centro $C(h, k)$.
- Relación pitagórica de los parámetros: $a^2 = b^2 + c^2$.
- Lado recto $= \dfrac{2b^2}{a}$,
- Excentricidad, $e = c/a$

Ejemplo 2) La excentricidad de una elipse es 0.8 y está centrada en el origen. Determine su ecuación estándar, si un vértice mayor es el punto (5, 0).

Se tiene los datos: $C\,(0, 0)$, $V_2(5, 0)$ y $e = 0.8$.

Con ello, tenemos que el eje mayor es paralelo al eje x. Además,

$$a = d(C, V_2) = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} = 5$$

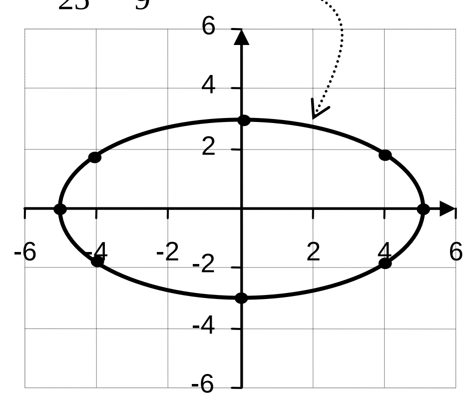
Con la excentricidad, $e = \dfrac{c}{a} \;\rightarrow\; 0.8 = \dfrac{c}{5} \;\rightarrow\; c = 0.8 \times 5 = 4$

Esto no es suficiente para obtener la ecuación estándar de la elipse. Falta obtener el valor del semieje menor, para ello se utiliza la relación pitagórica de los parámetros, quedando

$(5)^2 = b^2 + (4)^2$, de donde $b = 3$ (el valor positivo)

Ahora sí, la ecuación estándar es

$$\frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



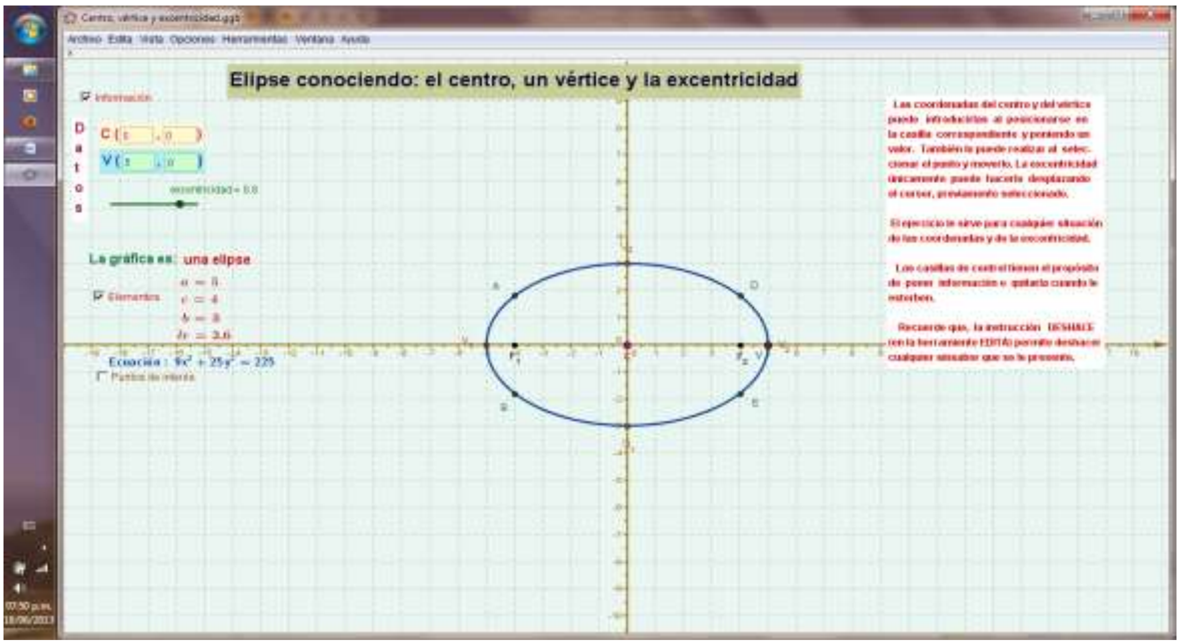
Si queremos realizar un trazado rápido de la elipse es conveniente localizar algunos puntos de ella. De entrada los fáciles, los cuatro vértices: $V_1(-5, 0)$, $V_2(5, 0)$, $U_1(0, -3)$ y $U_2(0, 3)$.

Otros que también son rápido de determinar son los extremos de los lados rectos: $l.r = 2b^2/a = 18/5 = 3.6$; por lo que se tienen otros cuatro puntos $(\pm 4,\ \pm 1.8)$. Se localizan los ocho puntos y se traza la curva que pasa por ellos.

. . .

Este tipo de ejercicios está acompañado con una práctica en GeoGebra, llamada:
Centro, vértice y excentricidad.

En esta práctica, usted puede darle las coordenadas que quiera al centro o al vértice, así como la excentricidad. También puede tratar elipses cuyo eje mayor es vertical (se verá más adelante) o inclinado. Deléitese con el ejercicio y con la práctica en geogebra.ggb.



¿Qué pasa si la elipse se coloca en el centro $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$, pero ahora con el eje mayor paralelo al eje y? En este caso se puede hacer un modelo parecido a la figura 4.5 y obtener las relaciones que se cumplen con las variables y se llega a determinar la forma estándar de la ecuación.

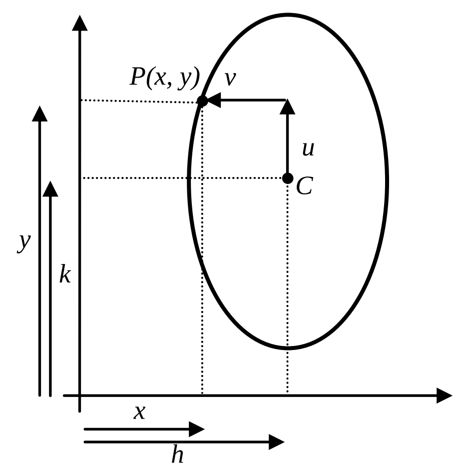


Fig. 4.6. Elipse vertical con centro $C(h, k)$.

Relaciones entre segmentos

$$x - v = h \quad \rightarrow \quad x - h = v$$

y

$$k + u = y \quad \rightarrow \quad u = y - k$$

Se sustituyen estas relaciones en la forma canónica, quedando:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Ahora se reordenan los términos principales. Resulta la **ecuación ordinaria de la elipse con centro en $C(h, k)$ con eje mayor paralelo al eje y** (también se dice que es vertical).

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \tag{4.7}$$

El valor del semieje mayor ahora divide a la y, ahí es donde va el eje mayor. Por supuesto, también se realizan los correspondientes cambios en las coordenadas de los puntos notables de la elipse. Veamos,

- $F_1(h, k-c)$ y $F_2(h, k+c)$. Se cumple $d(F_1, F_2)=2c$
- $V_1(h, k-a)$ y $V_2(h, k+a)$. Se cumple $d(V_1, V_2)=2a$
- $U_1(h-b, k)$ y $U_2(h+b, k)$. Se cumple $d(U_1, U_2)=2b$
- El punto medio a los tres segmentos anteriores es el centro $C(h, k)$.
- Relación pitagórica de los parámetros: $a^2=b^2+c^2$.
- Lado recto $=\dfrac{2b^2}{a}$,
- Excentricidad, $e = c/a$

Ejemplo 3) Analice la elipse centrada en el punto (2, 3), con un foco en (2, 6) y un vértice mayor en (2, 8). Hay práctica en GeoGebra llamada: Centro, vértice y foco.

Los tres puntos dados como datos tienen la misma abscisa, el 2. También sabemos que los tres puntos están sobre el eje principal, se concluye que la elipse está alargada verticalmente. En ella, $C(2, 3)$, $F_1(2, 6)$ y $V_2(2, 8)$; de donde:

Semidistancia focal, $c=d(C,F_2)=\sqrt{(2-2)^2+(6-3)^2}=3$

Semieje mayor, $a=d(C,V_2)=\sqrt{(2-2)^2+(8-3)^2}=5$

Semieje menor,

$b^2=5^2-3^2=16 \quad\rightarrow\quad b=4$ (valor positivo)

Excentricidad, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}=0.6$

Lado recto, $l.r=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(4)^2}{5}=6.4$

Ecuación ordinaria, $h = 2$ y $k = 3$, $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$

Nota. El valor mayor que divide va debajo de la y, pues el eje mayor es vertical.

Puntos notables:

$$F_1(h,\, k-c) = F_1(2,\, 0)$$

$$F_2(h,\, k+c) = F_1(2,\, 6)$$

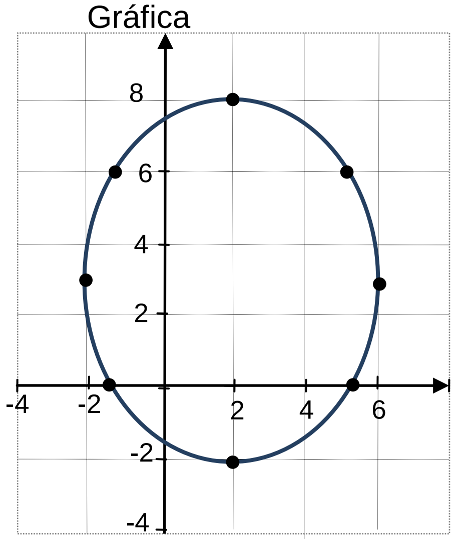
$$V_1(h,\, k-a) = V_1(2,\, -2)$$

$$V_2(h,\, k+c) = V_2(2,\, 8)$$

$$U_1(h-b,\, k) = U_1(-2,\, 3)$$

$$U_2(h+b,\, k) = U_2(6,\, 3)$$

Gráfica



Para un mejor trazo, localice también los extremos de los lados rectos: $(2 \pm 3.2,\, 6)$ y $(2 \pm 3.2,\, 0)$. Es más "redonda" que la del ejemplo 2, debido a que su excentricidad es menor. Pero que conste, está alargada verticalmente.

. . .

ECUACIÓN GENERAL.

La ecuación estándar de la elipse es muy fácil de recordar, alargada horizontalmente o verticalmente, pero podemos ponerla de otra forma. Veámoslo con la forma horizontal, ecuación (4.6). Al multiplicarla por a^2b^2, desarrollando las potencias y reacomodando términos, resulta

$$\begin{aligned} b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 &= a^2b^2 \\ b^2\left(x^2 - 2hx + h^2\right) + a^2\left(y^2 - 2ky + k^2\right) &= a^2b^2 \\ b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2ky + a^2k^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2 &= 0 \end{aligned}$$

De la misma manera, la ordinaria vertical queda

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Para algunos no es fácil memorizar las estructuras anteriores. Por ello, siempre es conveniente desarrollar los pasos algebraicos y llegar al resultado. Se puede ver el hecho de que los coeficientes de x^2 y y^2 siempre son positivos. Además, ambas tienen la misma estructura algebraica: una ecuación de segundo grado en dos variables. Es decir, tienen la misma **forma general**:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{con } A \text{ y } B > 0 \tag{4.8}$$

El brincarnos el coeficiente C es debido a que está reservado para el término cuadrático con las dos variables, Cxy (las elipses con ejes inclinados contienen este término). También podemos afirmar, el valor mayor observado en los términos cuadráticos indica que la elipse está alargada en la otra variable.

Ejemplo 4) Analice la ecuación general $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$.

También se acompaña de una práctica en GeoGebra.

Los coeficientes cuadráticos son positivos y de diferente valor, la ecuación representa a una elipse vertical (el coeficiente cuadrático mayor esta en la x). Una forma de obtener los parámetros es desarrollar la forma ordinaria para después comparar; o bien, utilizar la técnica de completar trinomio cuadrado perfecto. Sigamos la segunda opción, el término independiente se pasa al otro lado y se factoriza el coeficiente cuadrático de cada una de las variables

$$9\left(x^2 - 2x \quad\right) + 4\left(y^2 + 4y \quad\right) = 11$$

Para completar el trinomio en el primer paréntesis: piense en el coeficiente lineal, -2; ahora obtenga su mitad, -1; al final, elévelo al cuadrado, +1. Este último valor es el que se agrega en el primer paréntesis. Para el segundo paréntesis, siga la misma secuencia y agregará el 4. Para recompensar la alteración de la ecuación, se agregan también en el segundo lado de la igualdad pero deben de ir afectados por el coeficiente cuadrático correspondiente.

$$9\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4\left(y^2 + 4y + 4\right) = 11 + (9)(1) + (4)(4)$$

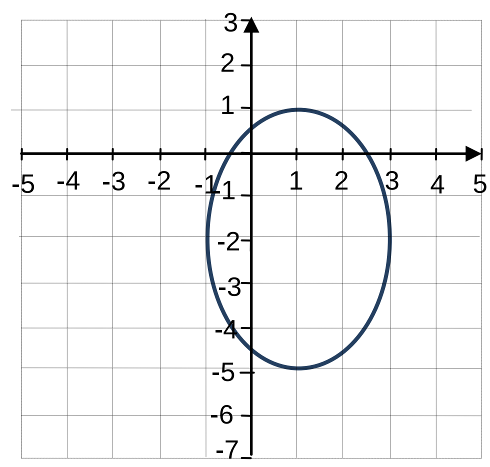
Cada trinomio cuadrado perfecto se factoriza como el cuadrado de un binomio, de donde

$$9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36$$

Se divide por 36, quedando

$$\frac{9(x-1)^2}{9\times 4} + \frac{4(y+2)^2}{9\times 4} = \frac{36}{36} \quad \to \quad \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Es una elipse alargada a lo vertical, se compara con la ordinaria y en forma directa se obtiene: $C(1, -2)$, $a = 3$ y $b = 2$.



Lo demás, es fácil de calcular, ya tenemos práctica

Eje mayor = 6

Eje menor = 4

Distancia focal = $2\sqrt{5}$

Excentricidad, $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Lado recto, $\frac{8}{3}$

. . .

4.1.3. APLICACIONES.

Concluyamos el estudio de las elipses con algunas de sus aplicaciones y con más ejemplos resueltos.

ÓRBITAS.

La **primera Ley de Kepler** afirma: la trayectoria de los planetas es como una elipse donde el Sol está en uno de sus focos.

Ejemplo 5) El planeta más cercano al Sol es Mercurio, cuya excentricidad es de 0.206 y eje mayor de 115 millones de kilómetros. ¿Determine la distancia máxima y mínima de Mercurio al Sol?

Como: $e = 0.206$ y $a = \dfrac{115\times 10^6 km}{2} = 57.5\times 10^6 km$

Además, $e = c/a \;\rightarrow\; c = ea = 0.206\times 57.5\times 10^6 km = 11.845\times 10^6 km.$

De donde,

$$\text{Dis.mínima} = a - c = 57.5\times 10^6 km - 11.845\times 10^6 km = 45.655\times 10^6 km.$$

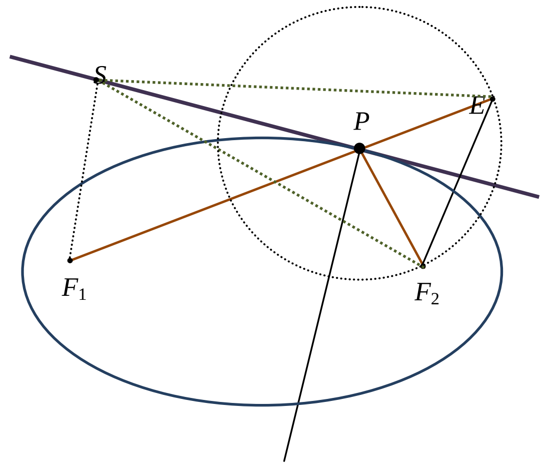
y

$$\text{Dis.máxima} = a + c = 57.5\times 10^6 km + 11.845\times 10^6 km = 69.345\times 10^6 km$$

RECTA TANGENTE.

En tres pasos es posible construir rectas tangentes a la elipse en cualquiera de sus puntos. Primero, se trazan segmentos desde el punto P a los focos. Segundo, se determina la bisectriz al ángulo F_1PF_2. Tercero, por el punto P se traza la perpendicular a la bisectriz. No es difícil demostrar que esta perpendicular es la tangente deseada.

Utilicemos la siguiente figura para realizar la demostración. Construyamos la circunferencia con centro en P y que pase por el foco más cercano, digamos F_2. Se prolonga el segmento F_1P hasta que coincida con la circunferencia en un punto más allá de la elipse, le llamaremos E. El triángulo F_2PE es isósceles, ya que los lados F_2P y PE son radios de la misma circunferencia. Ahora, tracemos la bisectriz SP al ángulo F_2PE (S es cualquier punto de la bisectriz diferente a P), en consecuencia es perpendicular a la bisectriz al ángulo F_1PF_2; ya que son bisectrices a dos ángulos adyacentes y suplementarios. Como F_2PE es isósceles, la recta SP también es mediatriz al lado F_2E, por lo tanto S está a la misma distancia de F_2 que de E. O sea $\left|\overline{F_2S}\right| = \left|\overline{SE}\right|$.



Por la construcción del punto E, tenemos: $\left|\overline{F_1E}\right| = \left|\overline{F_1P}\right| + \left|\overline{F_2P}\right|$. Como la longitud de un lado del triángulo debe ser menor que la suma de los otros dos lados, tenemos la desigualdad: $\left|\overline{F_1E}\right| < \left|\overline{F_1S}\right| + \left|\overline{SE}\right| = \left|\overline{F_1S}\right| + \left|\overline{F_2S}\right|$

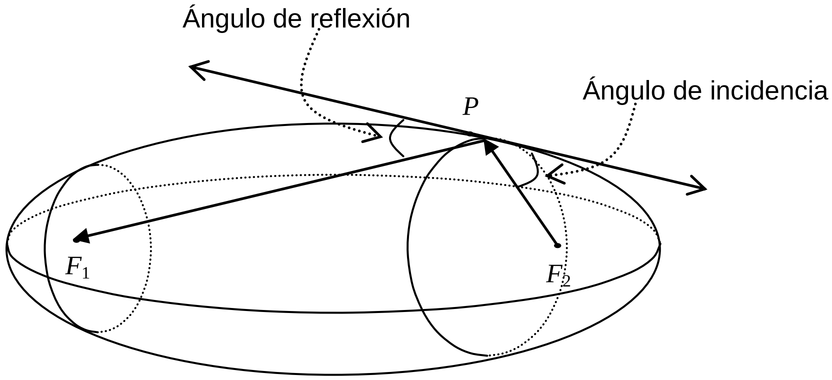
De donde al combinar los resultados, queda

$$\left|\overline{F_1P}\right| + \left|\overline{F_2P}\right| < \left|\overline{F_1S}\right| + \left|\overline{F_2S}\right|$$

¿Qué indica este resultado? Que la recta SP efectivamente es la recta tangente a la curva. Pues, únicamente el punto P cumple con la condición de pertenecer a la elipse y cualquier otro punto de la recta SP está por fuera de ella. La recta toca a la elipse en uno y sólo un punto, en P.

REFLEXIONES.

Si una elipse se hace girar alrededor de su eje mayor genera una superficie, llamada superficie de revolución (como los balones de fútbol americano). Lo interesante de estas superficies es que si se coloca una fuente de radiación en uno de los focos, entonces todo rayo que parta de él se reflejará en la superficie y pasará por el otro foco —propiedad de la recta tangente a la elipse, pues el ángulo de incidencia de un foco sobre un punto es igual al ángulo de reflexión al otro foco. Esta propiedad es la explicación de las “cámaras de los secretos”, donde un sonido emitido en uno de los focos puede ser escuchado perfectamente en otro, pero no necesariamente en los puntos intermedios. Se utiliza también en estudios de la radiación, en donde la emanación total de alguna fuente se realiza en uno de los focos y se concentra en el otro (así se pueden destruir cálculos biliares sin utilizar el bisturí).



Alrededor del mundo hay varias cámaras de los secretos. Por ejemplo en el convento del Desierto de los Leones, en el D. F., se encuentra “la galería de los murmullos”, en ella una persona colocada en un lugar muy especial (foco) puede hablar con voz muy baja y otra persona colocada en la otra posición especial (el otro foco) la puede escuchar. Esta curiosidad también está en el convento de Actopan, Hidalgo; en el juego de pelota en Chichén Itza. En la construcción árabe del siglo XIII, la Alambra que se encuentra en la ciudad de Granada, España. Etc.

REGIONES EN EL PLANO.

Cuando la forma ordinaria de la elipse se transforma a la forma general, siempre queda la misma forma, ecuación (4.8). Lo recíproco, al pasar de la forma general a la ordinaria tiene tres comportamientos diferentes —al completar el trinomio, el lado derecho puede ser positivo negativo o cero—. En consecuencia, al dividir por el valor del lado derecho (excepto con el 0), se tendría el lado derecho igualado a: 1, 0 o -1. Veamos el resumen de los casos en la forma canónica —la representación canónica tiene la misma forma en la posición que este, ya que no está referida al sistema cartesiano. Sólo depende del centro de la elipse—:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\begin{cases} 1, & \text{se trata de una elipse.} \\ 0, & \text{es un punto.} \\ -1, & \text{es una elipse no real, no hay gráfica.} \end{cases}$$

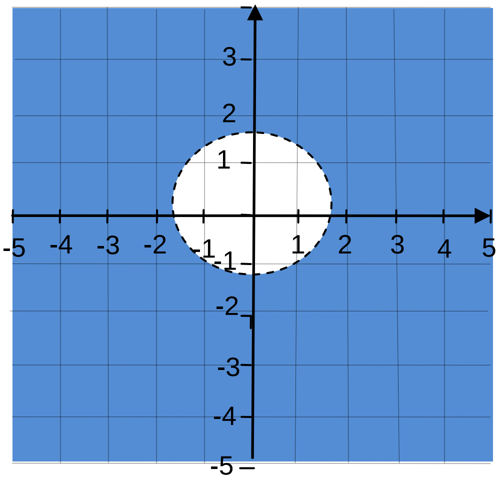
Aprovechando el contorno lineal de la elipse, al utilizar la desigualdad es posible representar regiones del plano cuya frontera es la elipse.

Ejemplo 6) Grafique en el plano: $2x^2 + 3y^2 - 6y - 3 > 0.$

A muchos se les complica trabajar con las desigualdades. Para ellos, es mejor analizar la igualdad y después localizar la región al evaluar la desigualdad.

Al considerar $2x^2 + 3y^2 - 6y - 3 = 0$, tenemos que es una elipse. Se transforma a la forma ordinaria, quedando

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$



Al estar igualada a 1, sabemos que hay toda una curva elíptica como frontera. Para saber la región correspondiente, se sustituye el centro (0, 1) en la desigualdad original, $2(0)^2 + 3(1)^2 - 6(1) - 3 > 0$. Al simplificar, $-6 > 0$. Como esto es falso, se tiene que la parte interna de la elipse no cumple con la desigualdad. En consecuencia, la gráfica es la región externa de la elipse.

En este caso, la elipse es frontera de la región y no es parte de la gráfica, por eso está punteado. En los casos en que se incluya la frontera, se utilizarán las desigualdades: $\leq$ o $\geq$.

. . .

4.2. LA CIRCUNFERENCIA.

Comprendida la elipse, en su forma canónica y ordinaria, la circunferencia ya nos será relativamente fácil. La circunferencia puede considerarse como un caso límite de la elipse al colocar los focos en su centro. En esta consideración, el eje mayor es de igual tamaño que el eje menor, se les llama diámetro. Aplicando la anterior idea, tenemos

4.2.1. LA CIRCUNFERENCIA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

Para el trazo de la circunferencia no se necesitan dos puntos fijos, ahora basta con uno. Por ello tenemos la siguiente:

DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA.

Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos tales que su distancia a un punto fijo es constante.

Donde, los elementos fundamentales para determinar la circunferencia, son:

El punto fijo C, llamado centro.
La distancia constante r, se llama radio.

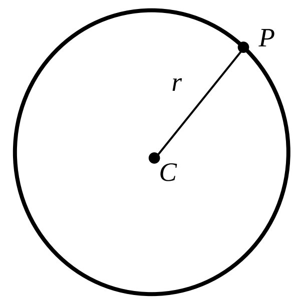


Fig. 4.7. La circunferencia.

La relación geométrica para la circunferencia, está dada por:

$$d(C, P) = r. \tag{4.9}$$

En particular para la circunferencia, $a = b = r$, su ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 \tag{4.10}$$

La ecuación canónica, sin echar mano de la obtenida con la elipse, es posible deducirla directamente a partir de los desplazamientos del punto P, tanto el horizontal como el perpendicular sobre uno de sus diámetros. En la figura 4.8, se aplica directamente el Teorema de Pitágoras y se logra la misma ecuación canónica (se acostumbra ponerla sin fracciones). Ahora queda una relación pitagórica entre los desplazamientos y el radio de la circunferencia.

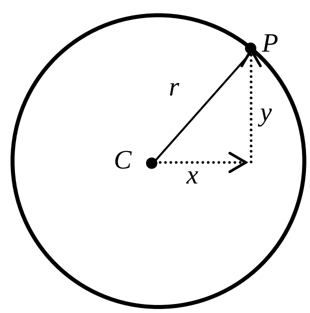


Fig. 4.8. Relación pitagórica

Su excentricidad es 0, ya que al coincidir los focos con el centro $c = 0$ y $e = 0$. El lado recto es igual al tamaño del diámetro y la recta tangente en un punto de ella es la perpendicular al diámetro correspondiente (pues los radios focales coinciden).

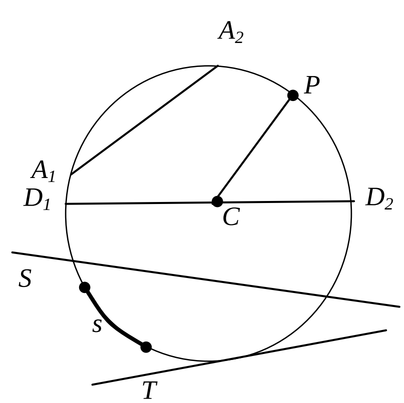
ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA.

C: Centro de la circunferencia.

$\left|\overline{CP}\right|$: Radio, segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.

$\left|\overline{D_1D_2}\right|$: Diámetro, segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

$\left|\overline{A_1A_2}\right|$: Cuerda, segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.



S, Secante, es una recta que corta en dos puntos a la circunferencia.

T: Tangente, es una recta que toca en un solo punto a la circunferencia. Es perpendicular al radio.

s: Arco, es la parte de la circunferencia limitada por dos puntos.

4.2.2. ECUACIÓN CARTESIANA.

Una circunferencia localizada en el plano cartesiano tiene la ventaja de que es simétrica a cualquiera de sus diámetros, la forma de la ecuación ordinaria es la misma esté en la posición que esté.

ECUACIÓN ESTÁNDAR.

En la figura 4.9, tenemos una circunferencia centrada en (h, k) y de radio r. Ahora, al considerar $P(x, y)$ como un punto de la circunferencia, podemos determinar la distancia entre los puntos C y P.

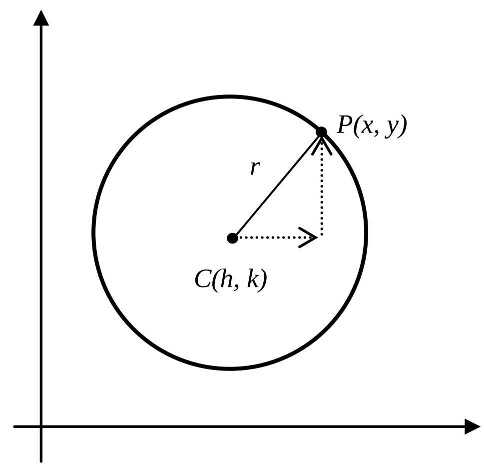


Fig. 4.9. Circunferencia centrada en (h, k).

$$d(C,P)=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

Aquí, también se cumple la condición para la circunferencia

$$d(C,P)=\left|\overline{CP}\right|=r.$$

Al Igualarlas

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Se eleva al cuadrado ambos lados y se obtiene la llamada **forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia centrada en (h, k)**.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{4.11}$$

Ejemplo 7) Obtenga la ecuación ordinaria de una circunferencia, si uno de sus diámetros se forma con los puntos (-2, 5) y (4, -3).

Procedimiento. Para determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia es necesario conocer las coordenadas del centro y el valor del radio. Ninguno de ellos se conoce, debemos determinarlos primero.

Cálculo del centro. Se conoce los extremos de un diámetro, entonces el punto medio de ellos es el centro de la circunferencia.

Datos:	Fórmulas:	Sustitución:	Conclusión
$D_1(-2,5) \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 5 \end{cases}$	$h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$	$h = \dfrac{-2+4}{2} = 1$	$C(1,1)$
$D_2(4,-3) \rightarrow \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -3 \end{cases}$	$k = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$	$k = \dfrac{5+(-3)}{2} = 1$	

Cálculo del radio. El radio es la mitad de la distancia entre los extremos del diámetro. O bien, es la distancia del centro a cualquiera de los extremos.

Datos	Fórmula	Sustitución
$C(1,1) \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$	$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-1)^2}$ $r = \sqrt{9+16}$
$D_1(-2,5) \rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 5 \end{cases}$		Conclusión $r = 5$

Cálculo de la ecuación en forma ordinaria. Conociendo $C(1,\ 1)$ y $r = 5$, se sustituye en la forma (4.11), quedando

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

. . .

ECUACIÓN GENERAL.

Al desarrollar las potencias de la forma ordinaria y reordenando términos, se llega a la forma general de la ecuación de la circunferencia

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + +h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Si se efectúan los cambios, entre los parámetros constantes

$$D = -2h, \quad E = -2k \quad \text{Y} \quad F = h^2 + k^2 - r^2$$

Se llega a la forma general de la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (4.12)$$

Si alguno de los nuevos parámetros está fraccionario, se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores y resulta

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{con } A = B.$$

Si la comparamos con la forma general de la elipse se tiene la misma estructura. Sólo que los coeficientes cuadráticos deben ser iguales. Nuevamente puede pasar que dada una ecuación de segundo grado tipo circunferencia, al pasarla a la ordinaria quede: circunferencia real, un punto o una circunferencia imaginaria.

Ejemplo 8) Determine la forma general de la circunferencia si su forma ordinaria es $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 25 \quad \text{Se desarrollan los binomios.}$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \quad \text{Reordenando y simplificando.}$$

. . .

Ejemplo 9) Discuta la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17 = 0$.

En esta ocasión aplicaremos el procedimiento de desarrollar la forma ordinaria para después comparar con la forma general. Cuando los coeficientes cuadráticos de las variables son 1 (o se pueden hacer 1) la ecuación representa una circunferencia. En este caso, consúltelo más arriba de la página, tenemos que: $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$. Al resolverlas:

$$h = -\frac{D}{2}, \quad k = -\frac{E}{2} \quad y \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}.$$

Al sustituirle valores, queda

$$h = -\frac{-4}{2} = 2, \quad k = -\frac{6}{2} = -3 \quad y \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (6)^2 - 4(17)} = \frac{1}{2}\sqrt{-16} \notin \Re$$

Conclusión la ecuación representa una circunferencia centrada en (2, -3), pero su radio no es número real, $r = 2i$. En consecuencia, si graficamos no se verá gráfica en el plano, sólo se aprecia el centro de la circunferencia (en este caso el centro no es parte de la circunferencia.

4.2.3. APLICACIONES.

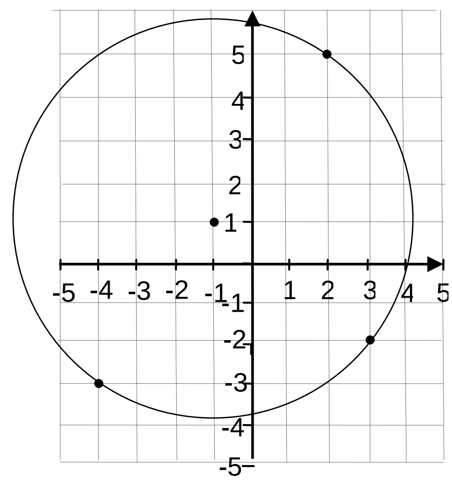
Ahora concluyamos el tema de la circunferencia con algunos ejemplos de aplicación.

CIRCUNFERENCIA SUJETA A CONDICIONES DADAS.

Tanto la ecuación ordinaria como la general tienen tres parámetros en sus fórmulas. Por lo tanto, son necesarias tres condiciones independientes para determinar la ecuación de una circunferencia.

Ejemplo 10) Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2, 5), (3, -2) y (-4, -3).

Para entender el problema es adecuado construir un modelo geométrico que nos permita darnos la idea de lo que trata el problema. Se localizan los tres puntos y se "adivina" por donde quedaría el centro. Entendido el problema, tenemos que los puntos deben de satisfacer su ecuación ordinaria, se plantean las ecuaciones:



Para (2, 5): $(2-h)^2+(5-k)^2=r^2$

Para (3, -2): $(3-h)^2+(-2-k)^2=r^2$

Para (-4, -3): $(-4-h)^2+(-3-k)^2=r^2$

Se tiene un sistema de ecuaciones no lineal y debe resolverse.

Igualamos las dos primeras, $(2-h)^2+(5-k)^2=(3-h)^2+(-2-k)^2$

Desarrollo de binomios, $4-4h+h^2+25-10k+k^2=9-6h+h^2+4+4k+k^2$

Se simplifica, $2h-14k=-16 \quad \to \quad h-7k=-8$ (a)

Se repite el procedimiento con las dos últimas

$$(-4-h)^2+(-3-k)^2=(3-h)^2+(-2-k)^2$$
$$16+8h+h^2+9+6k+k^2=9-6h+h^2+4+4k+k^2$$
$$14h+2k=-12$$

Se simplifica aún más, $7h+k=-6$ (b)

Ahora (a) y (b) forman un sistema lineal con dos variables, se despeja k de (b): $k = -7h - 6$. Se sustituye en (a) y se resuelve

$$h - 7(-7h - 6) = -8$$
$$h + 49h + 42 = -8$$
$$50h = -50 \quad \Rightarrow \quad h = -1$$

Ya se conoce la abscisa del centro, se sustituye este valor en la ecuación (a)

$$(1 - 7k = -8 \quad \rightarrow \quad -7k = -7 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

Con estos valores, se sustituyen en la primera y tendremos el valor del radio

$$(2+1)^2 + (5-1)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad r = 5$$

Teniendo los elementos fundamentales concluimos: la ecuación ordinaria de la circunferencia de radio 5 y centrada en (-1, 1) es

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

. . .

RECTAS TANGENTES.

La recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos es la recta tangente al radio correspondiente al punto de tangencia. Su pendiente es el recíproco negativo de la pendiente entre el centro y el punto de tangencia.

Ejemplo 11) Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 1 = 0$ en el punto (1, -1).

Para determinar la ecuación de la recta nos hace falta su pendiente. Para determinarla es necesario conocer el centro de la circunferencia.

Parámetros de la circunferencia.

$$h = -\frac{D}{2} = -\frac{-6}{2} = 3, \quad k = -\frac{E}{2} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

y

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 - 4(1)} = \frac{\sqrt{41}}{2} \approx 3.20156.$$

Cálculo de la pendiente. Datos: $C(3, \frac{3}{2})$ y $P(1, -1)$.

$$m_{CP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-\frac{3}{2}}{1-3} = \frac{-\frac{5}{2}}{-2} = \frac{5}{4}$$

$$m_{tan\,g} = -\frac{4}{5}$$

Cálculo de la ecuación.

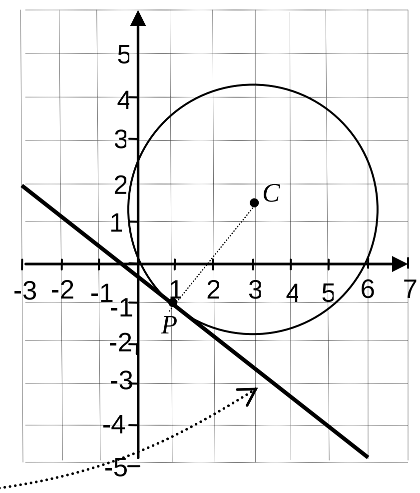
Datos: $P(1,-1)$ y $m = -\frac{4}{5}$.

Ecuación: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$$y-(-1) = \frac{-4}{5}(x-1)$$

$$5y+5 = -4x+4$$

$$4x+5y+1=0$$



. . .

INTERSECCIONES.

Se conoce ya que dos rectas pueden coincidir en todos los puntos, en uno o en ninguno. Así, dos circunferencias pueden coincidir en todos sus puntos, en dos, en uno o en ninguno. Y, ¿una recta con una circunferencia?

Ejemplo 12) Determine los puntos de intersección entre la recta $x-y+3=0$ y la circunferencia $x^2+y^2-8y+7=0$.

Los puntos de intersección deben ser aquellos que satisfacen a las dos ecuaciones. Por lo que debemos resolver el sistema no lineal. Al despejar x de la ecuación de la recta, tenemos: $x = y - 3$.

Se sustituye en la circunferencia, $(y-3)^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$

Se desarrollan los binomios, $y^2 - 6y + 9 + y^2 - 8y + 7 = 0$

Se simplifica, $2y^2 - 14y + 16 = 0$ o $y^2 - 7y + 8 = 0$

Se resuelve, $y = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$

Esto indica que hay dos posibles intersecciones, pero falta conocer sus abscisas. Se logra al sustituirlos en $x = y - 3$.

$$x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}-\frac{6}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Conclusión. La recta y la circunferencia coinciden $\left(\frac{1\pm\sqrt{17}}{2},\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}\right)$,son dos puntos. El más de la ordenada es con el más de la abscisa.

. . .

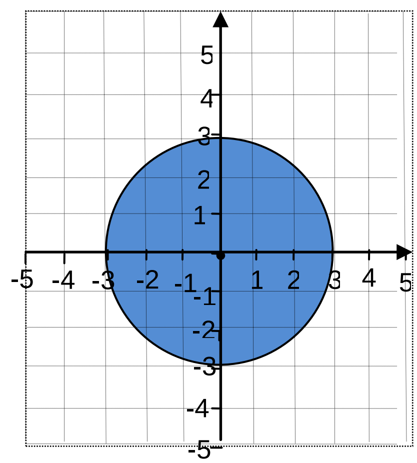
REGIONES.

El tratamiento para las regiones en el plano se hace identificando primero la frontera al considerarla con la igualdad. Se obtienen sus elementos y se grafica. Se determina la región solución con el centro de la circunferencia al sustituirla en la desigualdad original. Se sombrea la región solución.

Ejemplo 13) Obtenga la región solución de $x^2+y^2\le 9$.

Se considera la igualdad, $x^2+y^2=9$.

Se identifica la curva, es una circunferencia real. $C(0,0)$ y $r=3$.



Se elige un punto interior a la curva, de preferencia el centro y se sustituye en la desigualdad original.

$$0^2+0^2\le 9 \quad\rightarrow\quad 0\le 9.$$

Se elige la región, la desigualdad se satisface para un punto interior. Entonces la región que se sombrea es el interior de la circunferencia. En este caso también se incluye la frontera.

. . .

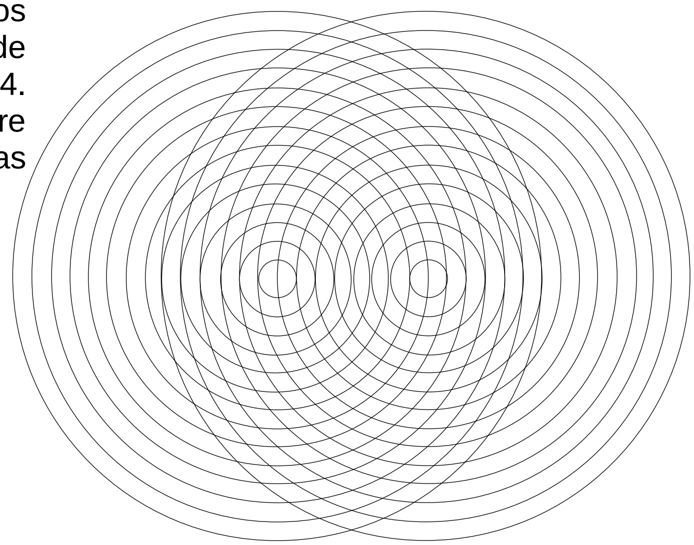
4.3. EJERCICIOS.

1) Otras formas de construir la elipse:

- Tome una hoja de papel transparente, en ella dibuje una circunferencia y un punto dentro de ella (que no sea el centro). Doble la hoja de manera que un punto de la circunferencia coincida con el punto dibujado y desdoble la hoja. Ahora repita el procedimiento con otros puntos de la circunferencia (entre más sean se aprecia mejor). Las marcas de los dobleces han formado una elipse en su parte interna, en donde el punto dibujado y el centro de la circunferencia son los focos.
- Tome un cono de unicel, ahora realice un corte plano de lado a lado de sus paredes sin llegar a la base. El perímetro del corte será una elipse. Mientras más paralelo sea a la base del cono, la elipse será más parecida a la circunferencia.
- Dado el diagrama con circunferencias concéntricas a dos puntos, dibuje una elipse de excentricidad 0.8 y otra de 0.4. Suponga que la separación entre dos circunferencias concéntricas y próximas es de una unidad.

  ¿Dónde colocaría los focos?

  ¿Cuál es el tamaño del eje mayor?



2) Una generalización de la primera ley de Kepler se obtiene con la “Ley inversa de los cuadrados” de la gravitación universal y puede demostrarse con el cálculo. La trayectoria de cualquier satélite natural o artificial alrededor de un cuerpo es normalmente una elipse, excepto cuando es alterada por alguna causa externa.

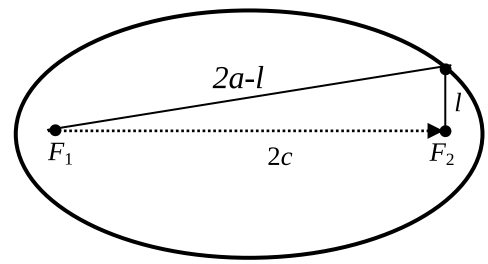
i. Se coloca un satélite en una órbita elíptica alrededor de la Tierra, su distancia más cercana a la superficie terrestre es de 300 km, llamado perigeo; y la más lejana de 500 km, apogeo. Encontrar la excentricidad de la órbita.

ii. Cuando un planeta está más lejos del Sol se llama afelio y cuando está más próximo se llama perihelio. Si el afelio de la Tierra es de 152.0×10^6 km (por el 4 de julio) y el perihelio de 147.5×10^6 km (por el 4 de enero), determine la distancia ínter focal (un foco es el Sol el otro es imaginario, el afelio y el perihelio son los vértices de la elipse generada). Determine el tamaño del eje mayor así como el del eje menor. Si el diámetro del Sol es de 1 400 000 km, ¿el foco imaginario queda dentro o fuera del Sol?

iii. Demuestre que el afelio $Q = a\,(1 + e)$ y el perihelio $P = a\,(1 - e)$.

3) Deduzca la fórmula (4.5) para el lado recto. Siga el procedimiento aplicado en el caso particular, pero poniendo los parámetros en forma general.

Para ello, obtenga $l = \frac{b^2}{a}$ y el lado recto será el doble de l.



4) Construya una elipse y marque tres puntos de ella, que no sean los vértices. Con regla y compás, trace las rectas tangentes en cada uno de los puntos (ponga los trazos auxiliares muy ligeros para que no se afee el dibujo).

5) Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, muestre que los puntos: $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(-3, 16/5)$, $D(-3, -16/5)$; son puntos de una elipse cuyos focos son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3,0)$.

6) La ecuación de la elipse también puede obtenerse a partir de la fórmula de distancia entre dos puntos. Como un ejercicio algebraico, obtenga la ecuación de la elipse centrada en el origen y con eje mayor paralelo al eje *y*. Considere: los focos $(0, -c)$ y $(0, c)$; con el eje mayor $2a$. Como se cumple d(F_1, P) + d(F_2,P)=$2a$, al utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos, resulta

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=2a$$

Despeje uno de los términos que lleve la raíz cuadrada, eleve al cuadrado ambos lados de la igualdad. Al simplificar queda por desgracia un término con la raíz cuadrada, despéjela y eleve al cuadrado nuevamente. Simplifique y utilice la relación pitagórica para obtener la ecuación conocida $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

7) Las siguientes elipses tienen su centro en el origen, determine todos sus parámetros, la ecuación ordinaria, todos los puntos notables, su ecuación general, y su gráfica; de modo que satisfagan las siguientes condiciones:

i. Vértice (-4, 0) y foco (2,0).
ii. Foco en (0, -4) con eje mayor igual a 10.
iii. Vértice mayor (10, 0) y $e = 0.6$.
iv. Vértice menor (0, -6) y $l.r. = 8$.
v. Foco (5, 0) y $\left|\overline{F_1P}\right|+\left|\overline{F_2P}\right|=14$.
vi. Foco (0, 10.5) y pasa por (12, -5.5).
vii. Vértice menor (0, 2) y eje mayor = 6.
viii. Vértice mayor (0, 3) y vértice menor (2, 0).
ix. Vértice menor (3, 0) y c = 3.
x. Vértice mayor (4, 0) y $l.r.$ = 4.

8) Analice las siguientes elipses (hallar todos sus elementos), que satisfacen las siguientes condiciones:

i. Centro (0, 1), foco (3, 1) Vértice (5, 1).
ii. Vértices (2, 6), (7, 10) (7, 2) y (12, 6).
iii. Vértices mayores (5, 2) y (5, -6), con eje menor = 4.
iv. Centro (0. 6), foco (0, 0) y excentricidad = 0.6.
v. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$
vi. $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{14}=1.$
vii. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{25}=1.$
viii. $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{1}=1.$
ix. $\frac{(x-2)^2}{8}+(y+4)^2=1.$
x. $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{10}=1.$

9) Discuta las siguientes ecuaciones cuadráticas (analice).

i. $2x^2+3y^2-8x+24y+44=0.$
ii. $x^2+2y^2-16=0.$
iii. $3x^2+2y^2-6x-3=0.$
iv. $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0.$
v. $4x^2+5y^2-24x+10y+61=0.$
vi. $3x^2+2y^2+48x-36y+354=0.$
vii. $3x^2+4y^2+12=0.$
viii. $3x^2+2y^2-6x-4y-1=0.$
ix. $2x^2+3y^2+4x-6y-1=0.$
x. $4x^2+3y^2-8x+6y-5=0.$

10) Grafique la región dada por:

i. $4x^2+y^2-16<0.$
ii. $\begin{cases}25x^2+9y^2-225\geq 0\\ 9x^2+25y^2-225\leq 0\end{cases}$

11) Construcciones. Los arcos elípticos se utilizan en las construcciones sólidas y rígidas con economía de material, como en puentes, bóvedas u otras estructuras.

i. La bóveda del techo de un recinto tiene la forma de una semi-elipse de revolución. Las paredes tienen una altura de 1.52 m y la distancia entre ellas es de 10 m. La altura mayor entre el techo y el piso es de 3.7 m ¿a que distancia de las paredes deben situarse dos personas para conversar en voz baja y se escuchen aún sin estar junta? Considere que sus cabezas están en los focos de la elipse o muy cercano a ellos.
ii. Un arco de 80 m de luz tiene forma semi-elíptica. Sabiendo que su altura es de 30 metros, hallar la altura del arco en un punto situado a 15 metros del centro.

12) Encontrar la ecuación de las siguientes circunferencias:

i. Centro en (2, 3) y radio 5.
ii. Radio $\sqrt{7}$ y centro en (-3, -2).
iii. Centro en (-1, 2) y pasa por el punto(5, 2).
iv. Pasa por el punto (-1, 0) y centro en (0, -4).
v. Los puntos extremos de un diámetro son (3, 6) y (-5, 2).
vi. Es tangente a los ejes de coordenadas de radio 3, en el primer cuadrante.
vii. Centro en (4, 5) y es tangente a la recta $3x - 4y - 2 = 0$.
viii. Centro en (3, 0) y es tangente a la recta $2x - 3y - 1 = 0$.
ix. Pasa por el punto (2, -3), el centro se encuentra en la intersección de las rectas: $2x - 5y + 9 = 0$ y $3x + y + 5 = 0$.
x. Pasa por la intersección de $3x + 5y - 1 = 0$ y $x + 5y + 3 = 0$, centro en (-3/2, 0)

13) Encuentre el radio y las coordenadas del centro de cada una de las circunferencias dadas::

i. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0.$
ii. $4x^2 + 4y^2 - 9 = 0.$
iii. $9x^2 + 9y^2 - 30y - 11 = 0.$
iv. $16x^2 + 16y^2 - 8x - 8 = 0.$
v. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0.$
vi. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0.$
vii. $64x^2 + 64y^2 - 64x - 96y + 43 = 0.$
viii. $2x^2 + 2y^2 + 12x - 4y - 3 = 0.$
ix. $16x^2 + 16y^2 - 24x - 8y + 14 = 0.$
x. $x^2 + y^2 + 14y + 18 = 0.$

14) Compruebe que la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$, es concéntrica con $3x^2 + 3y^2 - 6x - 18y - 78 = 0.$

15) Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 - 16 = 0$ está sobre la recta $y = x + 4$. Determine la longitud de la cuerda.

16) Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

i. (4, -5), (6, 1) y (0, 3).
ii. (-5, 2), (1, 2) y (3, 0).

17) Muestre que la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ tiene dos puntos en común con la elipse $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 21 = 0.$

18) Grafique la región solución de las desigualdades:

i. $x^2 + y^2 \geq 4.$
ii. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 < 0.$
iii. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$

Examen de la unidad.

1) Escriba la definición de:
  a) Elipse.
  b) Lado recto.
  c) Eje mayor.
  d) Excentricidad.

2) Escriba la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria e indique lo que significa cada parte.

3) Determine la ecuación de la elipse con centro en (6,1), un foco el punto (9, 1) y vértice el punto (11, 1). Construya su gráfica.

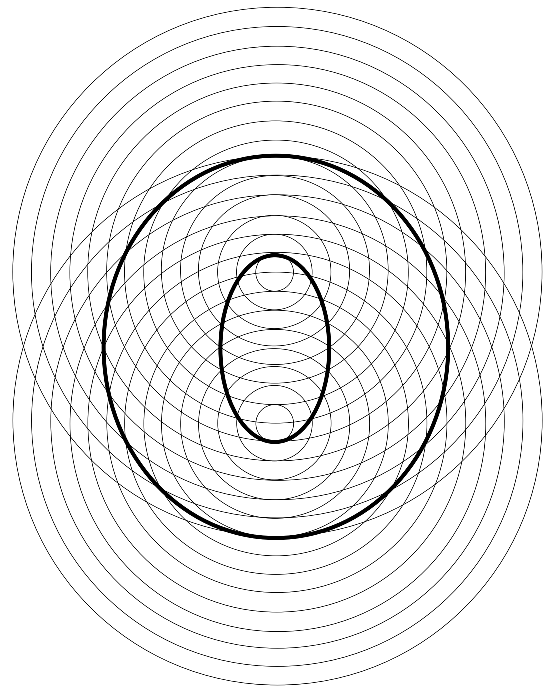
4) Construya la gráfica de la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0.$$

5) Construya la gráfica de la ecuación:

$$4x^2 + y^2 - 16x + 4y + 16 = 0$$

Unidad 4.



1) En las circunferencias concéntricas, los focos estarán en el centro de cada serie. La distancia focal mide 8 unidades.

   Eje mayor para $e = 0.8$ es de 10.

   Eje mayor para $e = 0.4$ es de 20.

   Nótese, entre menor sea la excentricidad, la elipse es más redonda.

2) i) e = 0.25
   ii) Distancia focal = $4.5\text{x}10^6$ km
   Eje mayor = $299.5\text{x}10^6$ km
   Eje menor = $299.47\text{x}10^6$ km
   El foco imaginario está fuera del Sol.

5) Los puntos cumplen con la relación geométrica, ecuación (4.1), en donde $2a = 10$.

7) i) $a = 4 \quad c = 2, \quad l.r. = 6, \qquad 3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$

   ii) $a = 5, \quad b = 3, \quad e = 0.6, \qquad 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

   iii) $a = 10, \quad b = 8, \quad l.r. = 12.8, \qquad 16x^2 + 25y^2 - 1600 = 0$

   iv) $a = 6, \quad b = \sqrt{24}, \quad e = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad 3x^2 + 2y^2 - 72 = 0$

   v) $a = 7, \quad c = 5, \quad l.r. = \frac{48}{7}, \qquad 24x^2 + 49y^2 - 1176 = 0$

   vi) $a = \frac{33}{2}, \quad b = \sqrt{162}, \quad e = \frac{21}{33}, \qquad 1089x^2 + 648y^2 - 176418 = 0$

   vii) $a = 3, \quad b = 2, \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

   viii) $a = 3, \quad b = 2, \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

   ix) $b = 3, \quad c = 3, \quad e = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071, \qquad 2x^2 + y^2 - 18 = 0$

   x) $a = 4, \quad b = \sqrt{8}, \quad e = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x^2 + 2y^2 - 16 = 0$

8) i) $C(0,1),\quad a=5,\quad b=4,\qquad 16x^2+25y^2-50y-375=0$

ii) $C(7,6),\quad a=5,\quad b=4,\qquad 16x^2+25y^2-224x-300y+1284=0$

iii) $C(5,-2),\quad a=4,\quad b=2,\qquad 4x^2+y^2-40x+4y+88=0$

iv) $C(0,6),\quad a=10,\quad b=8,\qquad 25x^2+16y^2-192y-1024=0$

v) $C(2,1),\quad a=3,\quad b=2,\qquad 4x^2+9y^2-16x-18y-11=0$

vi) $C(-2,-2),\quad a=5,\quad b=\sqrt{14},\qquad 14x^2+25y^2+56x+100y-194=0$

vii) $C(0,0),\quad a=5,\quad b=\sqrt{8},\qquad 25x^2+8y^2-200=0$

viii) $C(3,-1),\quad a=3,\quad b=1,\qquad x^2+9y^2-6x+18y+9=0$

ix) $C(2,-4),\quad a=\sqrt{8},\quad b=1,\qquad x^2+8y^2-4x+64y+124=0$

x) $C(-2,1),\quad a=\sqrt{10},\quad b=3,\qquad 10x^2+9y^2+40x-18y-41=0$

9) i) $C(2.-4),\quad a=\sqrt{6},\quad b=2,$ elipsehorizontal

ii) $C(0,0),\quad a=4,\quad b=\sqrt{8},$ elipsehorizontal

iii) $C(1,0),\quad a=\sqrt{3},\quad b=\sqrt{2},$ elipsevertical.

iv) $C(-2.1),\quad a=0,\quad b=0,$ esunpunto.

v) $C(3.-1),\quad a=\sqrt{5}i,\quad b=2i,$ elipseimaginaria

vi) $C(-8,9),\quad a=0,\quad b=0,$ esunpunto.

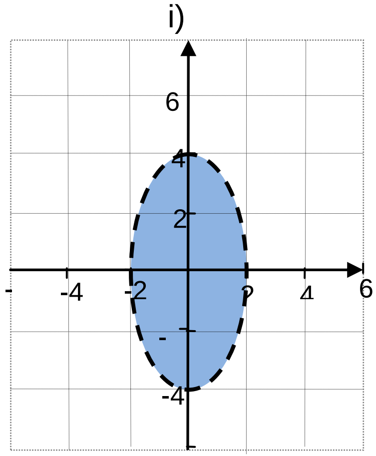
vii) $C(0,0),\quad a=2i,\quad b=\sqrt{3}i,$ elipseimaginaria

viii) $C(1,1),\quad a=\sqrt{3},\quad b=\sqrt{2},$ elipsevertical.

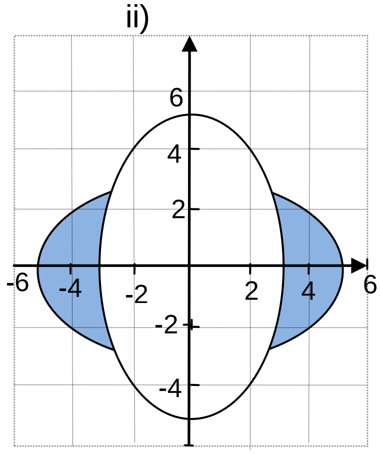
ix) $C(-1,1),\quad a=\sqrt{3},\quad b=\sqrt{2},$ elipsehorizontal

x) $C(1,-1),\quad a=2,\quad b=\sqrt{3},$ elipsevertical.

10) i)



ii)



11) Aproximadamente: i) medio metro. Ii) 27.81 metros.

12) Las ecuaciones generales son:

i. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

ii. $x^2+y^2+6x+4y+6=0$

iii. $x^2+y^2+2x-4y-31=0$

iv. $x^2+y^2+8y-1=0$

v. $x^2+y^2+2x-8y-3=0$

vi. $x^2+y^2-6x-6y+9=0$

vii. $x^2+y^2-8x-10y+37=0$

viii. $13x^2+13y^2-78x+92=0$

ix. $x^2+y^2+4x-2y-27=0$

x. $x^2+y^2+3x-11=0$

13) El centro y el radio son:

i. $C(2,-3), \quad r=1.$

ii. $C(0,0), \quad r=\frac{3}{2}.$

iii. $C(0,\frac{5}{3}), \quad r=2.$

iv. $C(\frac{1}{4},0), \quad r=\frac{3}{4}.$

v. $C(-3,2), \quad r=2.$

vi. $C(-2,-3), \quad r=0.$

vii. $C(\frac{1}{2},\frac{3}{4}), \quad r=\frac{3}{8}.$

viii. $C(-3,1), \quad r=\sqrt{11.5}.$

ix. $C(\frac{3}{4},\frac{1}{4}), \quad r=\frac{i}{2}.$

x. $C(0,-7), \quad r=\sqrt{31}.$

14) Tienen el mismo centro, $C(1, 3)$.

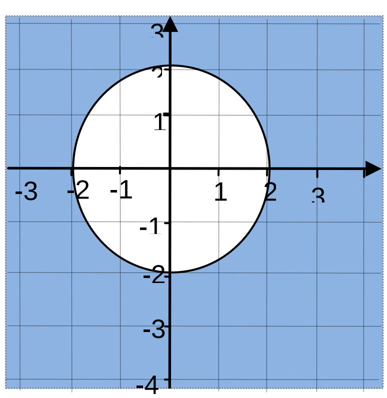
15) Longitud $=4\sqrt{2}$.

16) i) $x^2+y^2-4x+2y-15=0$ ii) $x^2+y^2+4x+6y-21=0$

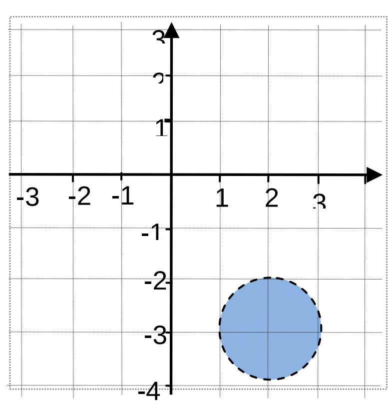
17) La circunferencia está inscrita a la elipse. Puntos comunes (-1, 1) y (-1, 5).

18)

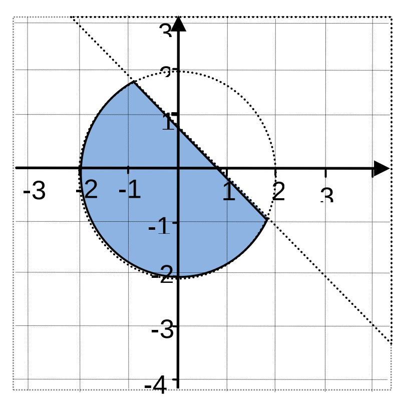
i)



ii)



iii)



Respuesta del examen.

1) Escriba la definición de:
   a) Elipse, es el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es igual a una constante.
   b) Lado recto, es la cuerda en una elipse que pasa por un foco y es perpendicular al eje mayor.
   c) Eje mayor, es la cuerda de mayor tamaño en una elipse.
   d) Excentricidad, es la razón de la distancia focal al eje mayor.

2) Escriba la ecuación de la circunferencia en su forma estándar e indique lo que significa cada parte.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Donde:
(x, y) son las coordenadas de cada punto de la circunferencia.
(h, k) son las coordenadas del centro de la circunferencia.
r es el radio de la circunferencia.

3) Determine la ecuación de la elipse con centro en (6,1), un foco el punto (9, 1) y vértice el punto (11, 1). Construya su gráfica.

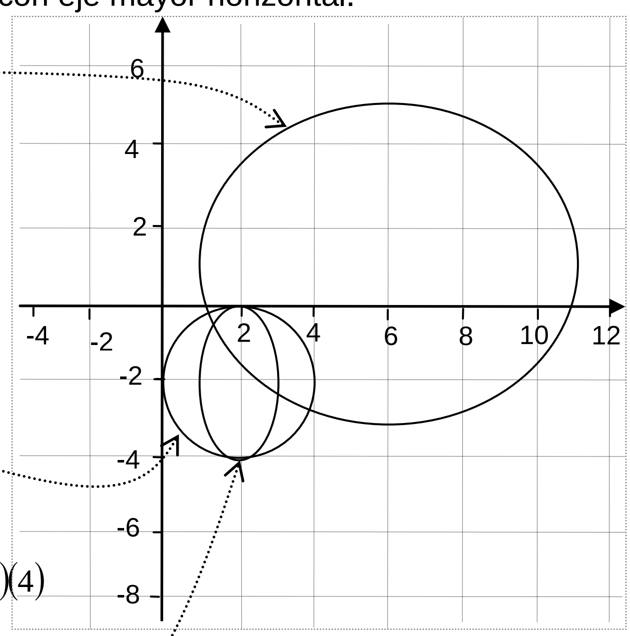
$$c=\left|\overline{CF}\right|=\sqrt{(9-6)^2+(1-1)^2}=3.$$

$$a=\left|\overline{CV}\right|=\sqrt{(11-6)^2+(1-1)^2}=5.$$

$$b=\sqrt{(5)^2-(3)^2}=4.$$

Elipse con eje mayor horizontal.

Ecuación: $\dfrac{(x-6)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$



4) Construya la gráfica de la ecuación:

$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0.$

$$\left(x^2-4x\quad\right)+\left(y^2+4y\quad\right)=-4$$

$$\left(x^2-4x+4\quad\right)+\left(y^2+4y+4\quad\right)=-4+4+4$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2=4.$$

Es circunferencia: $C(2, -2)$ y $r = 2$.

5) Construya la gráfica de la ecuación:

$4x^2 + y^2 - 16x + 4y + 16 = 0$

$$4\left(x^2-4x\quad\right)+\left(y^2+4y\quad\right)=-16$$

$$4\left(x^2-4x+4\quad\right)+\left(y^2+4y+4\quad\right)=-16+(4)(4)+(1)(4)$$

$$4(x-2)^2+(y+2)^2=4$$

$$\frac{(x-2)^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Es elipse vertical: $C(2, -2)$, $a = 2$ y $b = 1$