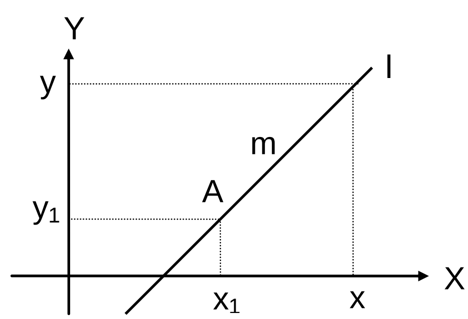
UNIDAD 3

LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno:

- Conocerá las distintas formas de representación de la recta e identificará cuál de ellas conviene usar.
- Encontrará la ecuación de una recta, dados distintos elementos que la definen.
- Dada la ecuación de una recta, encontrará los elementos que la definen y trazará su gráfica.
- Dada la ecuación de dos rectas. Determinará si se cortan, si son paralelas o perpendiculares.



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad \Rightarrow \qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

UNIDAD 3. LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

3.1. La recta ubicada en el Plano Cartesiano

3.1.1. Localización de una recta en el plano. Condiciones necesarias y suficientes.

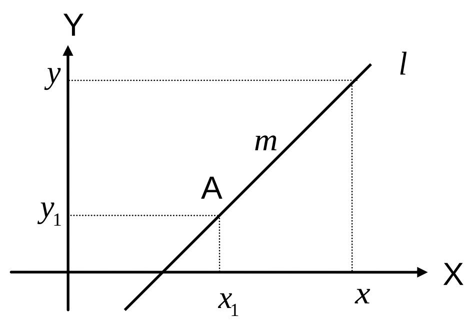
Iniciamos recordando el hecho de que existen varias definiciones de la línea recta. La más común de estas dice que es la distancia más corta entre dos puntos, pero esta definición se apoya en el significado del término distancia y si tratamos de definir la distancia, al dar cualquier explicación retornamos al punto de partida. Es esta la razón del porque en este apartado se admitirá la definición en la que se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que una recta se localice en el plano cartesiano.

Definición. Se le llamará línea reta al lugar geométrico de los puntos de tal forma que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el valor de la pendiente m siempre es la misma.

3.2. La Ecuación Cartesiana de la Recta, cuando se conocen:

3.2.1. Su pendiente y la coordenada de uno de sus puntos

Supongamos que la recta "l" pasa por el punto $A(x_1, y_1)$ y que tiene pendiente m.



De donde, la pendiente de la recta "l" es:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad \Rightarrow \qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

por lo tanto la ecuación de una recta dado un punto y su pendiente es :

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

3.2.2. Las coordenadas de dos de sus puntos

Si la recta "l" pasa por los puntos: $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Luego al sustituir la pendiente en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$. Obtenemos que la ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos sea:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Ejemplos

Obtener las ecuaciones de las rectas que se dan, considerando los datos indicados.

1. Pasa por el punto $A(1, 2)$ y su pendiente es $m = 2$.

   Al sustituir en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, se tiene lo siguiente:

$$y - 2 = 2(x - 1)$$
$$y - 2 = 2x - 2$$
$$\therefore \text{ La ecuacion es: } -2x + y = 0$$

2. Pasa por el punto $B(-3, 5)$ y su pendiente es $m = -3$.

   Se sustituyen los valores en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$$y - 5 = -3(x - (-3))$$
$$y - 5 = -3(x + 3)$$
$$y - 5 = -3x - 9$$
$$\therefore \text{ La ecuacion es: } 3x + y + 4 = 0$$

3. Pasa por el punto $C(-1,-6)$ y su pendiente es $m = \frac{-2}{7}$.

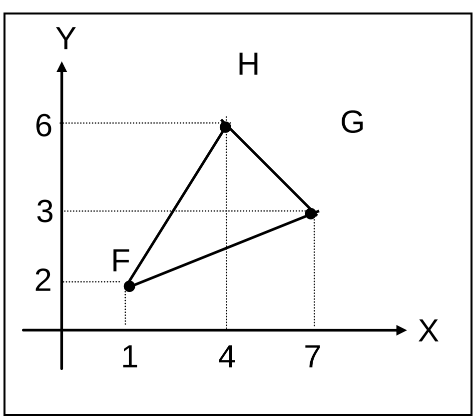
$$y-(-6)=\frac{-2}{7}(x-(-1))$$
$$y+6=\frac{-2}{7}(x+1)$$
$$7(y+6)=-2(x+1)$$
$$7y+42=-2x-2$$
$$\therefore\quad 2x+7y+44=0$$

4. Pasa por los puntos $D(3,5)$ y $E(5,11)$

Ahora se sustituyen valores en la ecuación

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$y-5=\frac{11-5}{5-3}(x-3)$$
$$y-5=\frac{6}{2}(x-3)$$
$$y-5=3(x-3)$$
$$y-5=3x-9$$
$$\therefore\quad -3x+y+4=0$$

5. Supongamos que $F(1,2)$, $G(7,3)$ y $H(4,6)$ son los vértices de un triángulo. Obtener la ecuación de cada uno de sus lados.



Ecuación de la recta que pasa por los puntos $F(1,2)$ y $G(7,3)$:

$$y-2=\frac{3-2}{7-1}(x-1)$$
$$y-2=\frac{1}{6}(x-1)$$
$$6(y-2)=1(x-1)$$
$$6y-12=x-1$$
$$\boxed{-x+6y-11=0}$$

Ecuación de la recta que pasa por los puntos $G(7,3)$ y $H(4,6)$:

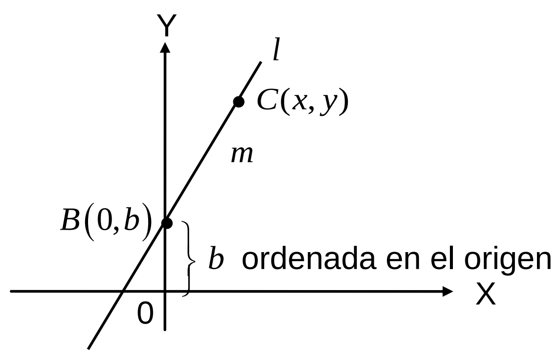
$$y-3=\frac{6-3}{4-7}(x-7)$$
$$y-3=\frac{3}{-3}(x-7)$$
$$y-3=-1(x-7)$$
$$y-3=-x+7$$
$$\boxed{x+y-10=0}$$

Ecuación de la recta que pasa por los puntos $F(1,2)$ y $H(4,6)$:

$$y-2=\frac{6-2}{4-1}(x-1)$$
$$y-2=\frac{4}{3}(x-1)$$
$$3(y-2)=4(x-1)$$
$$3y-6=4x-4$$
$$\boxed{-4x+3y-2=0}$$

3.2.3. Ecuación de una recta en su forma de pendiente y ordenada al origen

Consideremos una recta "l" cuya pendiente es "m" y que pasa por el punto $B(0,b)$.



A la distancia que hay del origen al punto en el que la recta "l" interseca al eje Y, se le llama ordenada en el origen; es decir, b es la ordenada en el origen.

Ahora para obtener la ecuación de la recta, se hace lo siguiente:

$$m=\frac{y-b}{x-0}=\frac{y-b}{x} \qquad \Rightarrow \qquad mx=y-b \qquad \Rightarrow \qquad mx+b=y$$

$$\therefore \quad \boxed{y=mx+b}$$

Ecuación de una recta en su forma de pendiente y ordenada en el origen.

Ejemplos

Obtener la pendiente y la ordenada en el origen para cada recta que se da:

1) $x+y=0$

$$y=-x$$

$$\therefore \qquad m=-1 \qquad \text{y} \qquad b=0.$$

2) $3x+y-7=0$

$$y=-3x+7$$

$$\therefore \qquad m=-3 \qquad \text{y} \qquad b=7.$$

3) $-x+2y+10=0$

$$2y=x-10$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{10}{2}=\frac{1}{2}x-5$$

$$\therefore \qquad m=\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad b=-5.$$

4) $3x+5y-9=0$

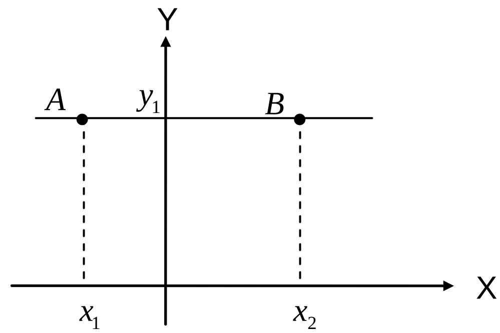
$$5y=-3x+9$$

$$y=\frac{-3}{5}x+\frac{9}{5}$$

$$\therefore \qquad m=-\frac{3}{5} \qquad \text{y} \qquad b=\frac{9}{5}.$$

3.2.4. Ecuación de una recta cuando es paralela a uno de los ejes de coordenadas.

Sabemos que una recta paralela al eje X, es una recta horizontal y dichas rectas se generan si pasan por dos puntos cuyas ordenadas sean la misma; es decir, si una recta pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_1)$. La recta generada es horizontal, como se muestra en la siguiente figura.

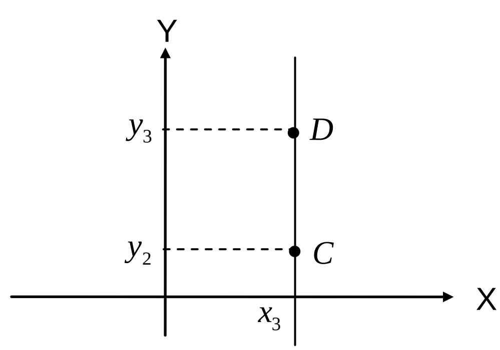


La ecuación de la recta paralela al eje X es:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - y_1 = 0(x - x_1)$$
$$y - y_1 = 0$$
$$\therefore \boxed{y = y_1}$$

Observemos que la ecuación de una recta paralela al eje X, se obtiene al igualar “ y ” con el punto de intersección con el eje Y.

De igual forma una recta es paralela al eje Y, si es vertical y esto ocurre si las abscisas de dos puntos por donde pasa son iguales; es decir, la recta que pasa por los puntos $C(x_3, y_2)$ y $D(x_3, y_3)$ es vertical, como se muestra en la figura que se da:



Como la pendiente de esta recta vertical está indefinida, no podemos utilizar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos. Y la ecuación de rectas de este tipo, es similar a la ecuación para rectas paralelas al eje Y. Es decir, la variable "x" se iguala con el punto que interseca al eje X; es decir:

$$x = x_3$$

Ejemplos

1. Obtenga la ecuación de una recta paralela al eje X y que pasa por el punto $A(1,4)$.

   Su ecuación es: $y=4$ o $y-4=0$.

2. Obtenga la ecuación de una recta paralela al eje Y y que pasa por el punto $B(-3,5)$

   Su ecuación es: $x=-3$ o $x+3=0$.

3.3. Ecuación general de una recta

La ecuación de primer grado:

$$Ax+By+C=0$$

representa la ecuación general de una recta, en donde $A,\ B\ y\ C$ son constantes, x y y son variables.

Si en la ecuación general $Ax+By+C=0$ se despeja y, se tiene:

$$By=-Ax-C$$
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

de donde se deduce que : $m=-\frac{A}{B}$ y $b=-\frac{C}{B}$.

es decir, dada la recta $Ax+By+C=0$, su pendiente es menos el coeficiente de la variable x entre le coeficiente de la variable y, y la ordenada en el origen es menos el término independiente entre el coeficiente de y.

Ejemplos

Obtener la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas:

1) $x-y+8=0$

A=1, B= -1 y C=8

$\therefore \quad m=-\frac{1}{-1}=1 \quad y \quad b=-\frac{8}{-1}=8.$

2) $3x+6y+7=0$

A=3, B=6 y C=7

$\therefore \quad m=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad b=-\frac{7}{6}.$

3) $-9x+10y-11=0$

A= -9, B=10 y C= -11

$\therefore \quad m=-\frac{-9}{10}=\frac{9}{10} \quad \text{y} \quad b=-\frac{-11}{10}=\frac{11}{10}.$

4) $-5x-7y-13=0$

A= -5, B= -7 y C= -13

$\therefore \quad m=-\frac{-5}{-7}=-\frac{5}{7} \quad \text{y} \quad b=-\frac{-13}{-7}=-\frac{13}{7}.$

3.4. Tratamiento analítico para determinar a partir de la ecuación de una o dos rectas.

3.4.1. Los elementos geométricos que la definen: ángulo de inclinación y uno de sus puntos o dos de sus puntos que la definen.

En la sección anterior fueron trabajadas las ecuaciones cartesianas de una recta desde el punto de vista algebraico, cuando se conoce un punto y su pendiente (o tangente del ángulo de inclinación), cuando se conocen dos puntos, se conoce la pendiente y la ordenada al origen y la ecuación general de una recta. Ahora se trabajarán desde el punto de vista geométrico los elementos que la definen.

Supongamos que se tienen las rectas que se muestran en cada figura:

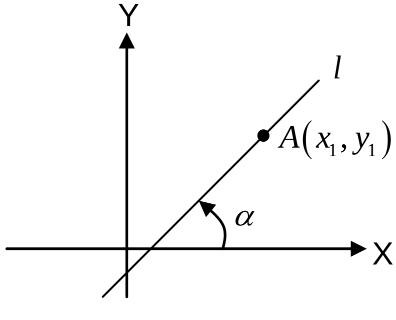


Figura 1

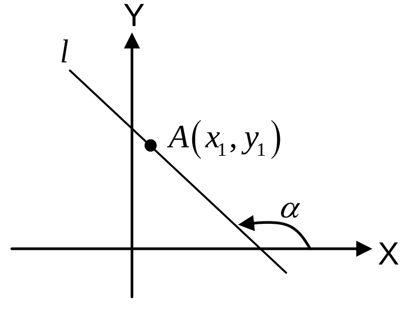


Figura 2

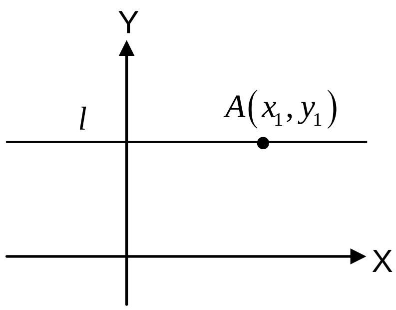


Figura 3

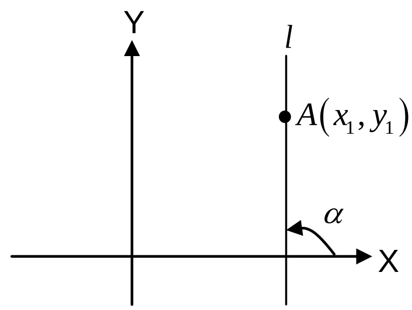


Figura 4

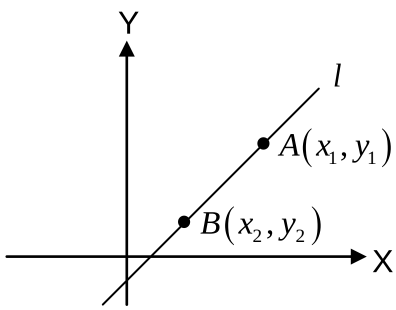


Figura 5

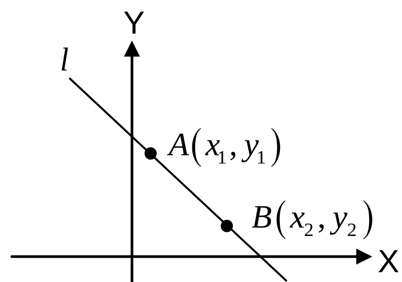


Figura 6

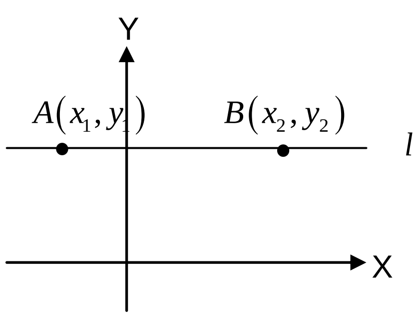


Figura 7

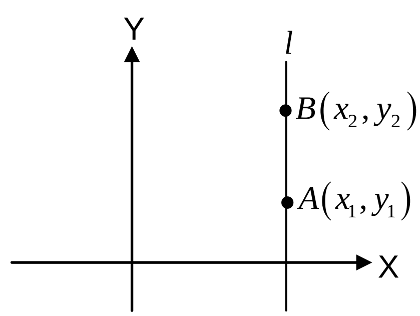


Figura 8

Observemos que en las ocho figuras se muestran líneas rectas, en las primeras cuatro se conoce un punto y el ángulo de inclinación. Además se observa que en la figura 1 el ángulo de inclinación hace que la pendiente sea positiva, en la figura 2 la pendiente es negativa, en la figura 3 el ángulo de inclinación es cero, lo cuál provoca que la pendiente sea cero y para la figura 4 el ángulo es de 90^0, de donde se deduce que la pendiente es infinita o no está definida.

Para las figuras 5, 6, 7 y 8 en cada recta se conocen dos puntos, como se observa en la figura 7, la recta es horizontal o es paralela al eje X y en la figura 8, la recta es vertical; es decir, es paralela al eje Y.

3.4.2. Si un punto pertenece o no a una recta.

Geométricamente sabemos que un punto pertenece a una recta, si dicho punto está sobre la línea recta. En este apartado, verificaremos cuando un punto está o no sobre una línea recta desde el punto de vista algebraico.

Por ejemplo, si se da la ecuación de la recta:

$$2x+3y-5=0$$

Sustituya cada uno de los puntos en la ecuación: $A(2,-1),\quad B(1,2)\quad y\quad C(1,1)$.

Para el punto $A(2,-1)$

$$\begin{aligned} 2(2)+3(-1)-5&=0\\ 4-3-5&=0\\ 4-8&=0\\ -4&=0 \end{aligned}$$

Para el punto $B(1,2)$

$$\begin{aligned} 2(1)+3(-2)-5&=0\\ 2-6-5&=0\\ 2-11&=0\\ -9&=0 \end{aligned}$$

Para el punto $C(1,1)$

$$\begin{aligned} 2(1)+3(1)-5&=0\\ 2+3-5&=0\\ 5-5&=0\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Se observa que al sustituir en la ecuación los puntos $A\ y\ B$, se obtuvieron contradicciones y al sustituir en la ecuación el punto C, se llegó a una igualdad. Esto indica que el punto C pertenece la recta dada. Luego para que un punto pertenezca a una recta es necesario que dicho punto sea solución de la ecuación de primer grado que representa a la línea recta.

Ejemplos

Verificar si los puntos que se dan en cada caso pertenecen o no a las rectas indicadas.

1. $2x + y - 5 = 0$. Los puntos son: $A(1,3)$, $B(2,1)$, $C(3,-1)$ y $D(0,1)$

Punto $A(1,3)$

$$\begin{aligned} 2(1)+3-5&=0 \\ 2+3-5&=0 \\ 5-5&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto si pertenece a la recta.

Punto $B(2,1)$

$$\begin{aligned} 2(2)+1-5&=0 \\ 4+1-5&=0 \\ 5-5&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto si pertenece a la recta.

Punto $C(3,-1)$

$$\begin{aligned} 2(3)-1-5&=0 \\ 6-1-5&=0 \\ 5-5&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto si pertenece a la recta.

Punto $D(0,1)$

$$\begin{aligned} 2(0)+1-5&=0 \\ 0+1-5&=0 \\ 1-5&=0 \\ -4&=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto no pertenece a la recta.

2. Obtenga tres puntos que estén sobre la recta $6x+3y+9=0$.

   Para obtener puntos que estén sobre una línea recta, se despeja la "y" en términos de la "x" y posteriormente se le dan valores a la variable "x" para obtener los valores que se corresponden a "y" (También se puede despejar la "x" en términos de la "y").

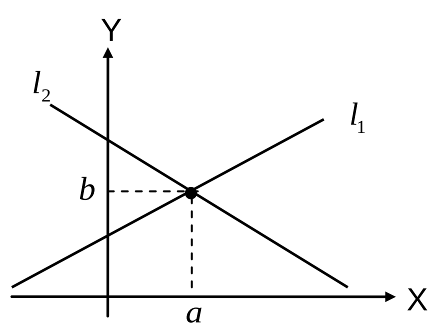
$$6x+3y+9=0$$
$$3y=-9-6x$$
$$y=\frac{-9-6x}{3}$$
$$y=-3-2x$$

   Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad y=-3-2(0)=-3$.
   Si $x=-1 \quad \Rightarrow \quad y=-3-2(-1)=-3+2=-1$.
   Y si $x=-2 \quad \Rightarrow \quad y=-3-2(-2)=-3+4=1$.

   Por lo tanto los puntos: $A(0,-3)$, $B(-1,-1)$ y $C(-2,1)$ están sobre la recta indicada.

3.4.3. Intersección de dos rectas que se cortan.

Supongamos que la recta l_1 y l_2 son las que se muestran en la gráfica siguiente:



El punto de intersección de la restas es (a,b). Y dicho punto está sobre la recta l_1 y sobre la recta l_2. Ahora para obtener el punto de intersección se le da solución al sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que representan la pareja de rectas l_1 y l_2.

Ejemplos

Obtenga el punto de intersección para cada pareja de rectas que se dan:

1. $x + y - 3 = 0 \quad y \quad 2x + 3y - 8 = 0$.

   Se resuelve el sistema de ecuaciones usando el método de suma y resta.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \quad \cdots \quad (1) \\ 2x + 3y &= 8 \quad \cdots \quad (2) \end{aligned}$$

   Se multiplica la ecuación (1) por -2 y se suma con la ecuación (2).

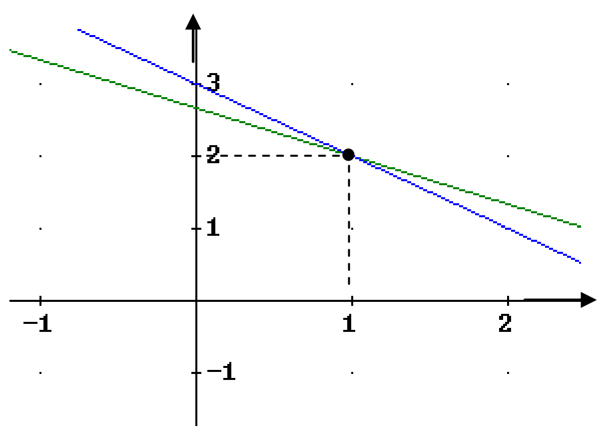
$$\begin{aligned} -2x - 2y &= -6 \\ 2x + 3y &= 8 \\ \hline y &= 2 \end{aligned}$$

   Se sustituye $y = 2$ en la ecuación (1) para obtener el valor de x.

$$\begin{aligned} x + 2 &= 3 \\ x &= 3 - 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   Por lo tanto el punto de intersección de las rectas es: $(1, 2)$.

   Gráfica ilustrativa.



2. $3x - y - 3 = 0 \quad y \quad -4x + 3y - 1 = 0$.

   Se resuelve el sistema de ecuaciones usando el método de suma y resta.

$$\begin{aligned} 3x - y &= 3 \quad \cdots \quad (1) \\ -4x + 3y &= 1 \quad \cdots \quad (2) \end{aligned}$$

Se multiplica la ecuación (1) por 3 y se suma con la ecuación (2).

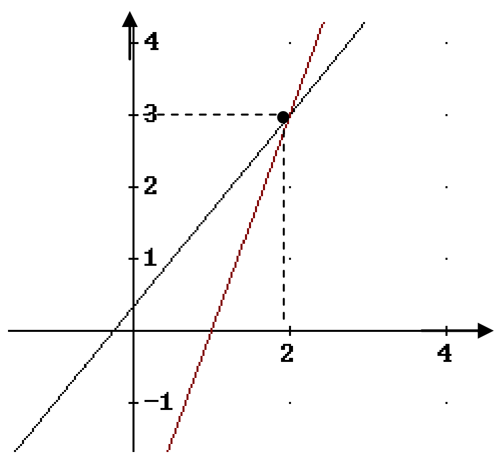
$$\begin{array}{rl} 9x - 3y &= 9 \\ -4x + 3y &= 1 \\ \hline 5x \qquad &= 10 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \end{array}$$

Se sustituye $x = 2$ en la ecuación (1) para obtener el valor de y.

$$\begin{aligned} 3(2) - y &= 3 \\ -y &= 3 - 6 \\ -y &= -3 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

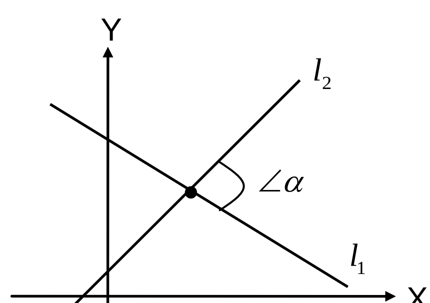
Por lo tanto el punto de intersección de las rectas es: $(2,3)$.

Gráfica ilustrativa.



3.4.4. Ángulo entre de dos rectas que se cortan.

Supongamos que las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente y que forman el ángulo α, como se muestra en la figura.



El ángulo α está dado por la fórmula:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}, \qquad m_2 \cdot m_1 \neq -1$$

Ejemplos

1. Obtenga el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(4,7)$ con la recta que pasa por los puntos $C(-3,1)$ y $D(-4,2)$.

   Respuesta: $m_1 = \frac{7-1}{4-1} = \frac{6}{3} = 2 \quad y \quad m_2 = \frac{2-1}{-4-(-3)} = \frac{1}{-1} = -1$.

   $$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{-1-2}{1+2(-1)} = \frac{-3}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad \Rightarrow \quad \angle\alpha = 71^0\ 33'54".$$

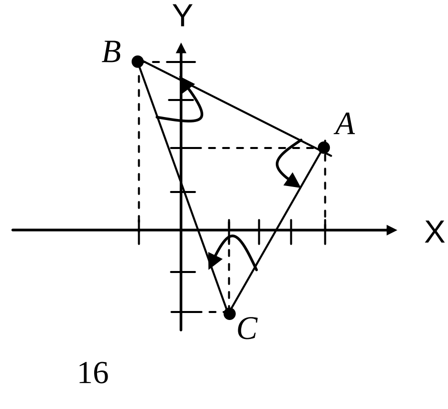
2. Obtenga el ángulo que forma la recta $2x+3y-1=0$ y la recta $3x-5y+4=0$.

   Respuesta: $m_1 = -\frac{2}{3} \quad y \quad m_2 = \frac{3}{5}$.

   $$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{\frac{9+10}{15}}{1-\frac{6}{15}} = \frac{\frac{19}{15}}{\frac{15}{15}-\frac{6}{15}} = \frac{\frac{19}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{19}{9}$$

   $$\therefore \qquad \angle\alpha = 64^0\ 39'13"$$

3. Obtenga los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son: $A(4,2)$, $B(-1,4)$ y $C(1,-2)$.



Respuesta: $m_{AB} = -\frac{2}{5}, \quad m_{AC} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \quad y \quad m_{BC} = \frac{-6}{2} = -3.$

Para el ángulo en A: $m_1 = m_{AB} = -\frac{2}{5} \quad y \quad m_2 = m_{AC} = \frac{4}{3}.$

$$\tan A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{5}}{1 + \left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{20+6}{15}}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{\frac{26}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{26}{7} \quad \Rightarrow \quad \angle\alpha = 74^0\ 55'53"$$

Para el ángulo en B: $m_1 = m_{BC} = -3 \quad y \quad m_2 = m_{BA} = m_{AB} = -\frac{2}{5}.$

$$\tan B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{-\frac{2}{5} + 3}{1 + (-3)\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{13}{5}}{1 + \frac{6}{5}} = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{13}{11} \quad \Rightarrow \quad \angle B = 49^0\ 45'49".$$

Para el ángulo en C: $m_1 = m_{CA} = m_{AC} = \frac{4}{3} \quad y \quad m_2 = m_{CB} = m_{BC} = -3.$

$$\tan C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{-3 - \frac{4}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)(-3)} = \frac{\frac{-13}{3}}{1 - \frac{12}{3}} = \frac{\frac{-13}{3}}{-\frac{9}{3}} = \frac{13}{9} \quad \Rightarrow \quad \angle C = 55^0\ 18'17".$$

Observemos que todos lo ángulos se consideró la dirección contraria a las manecillas del reloj y dicha dirección se toma como positiva.

3.4.5. Relación de paralelismo o perpendicularidad de dos rectas.

Si se tienen las rectas l_1 y l_2 cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente se cumplen los resultados siguientes:

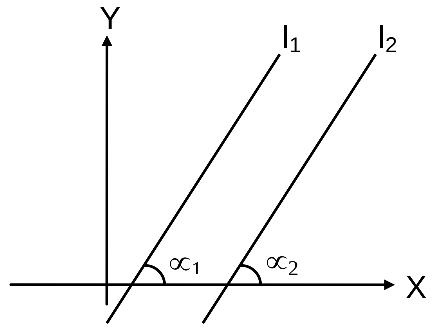
- Las rectas l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$; es decir :

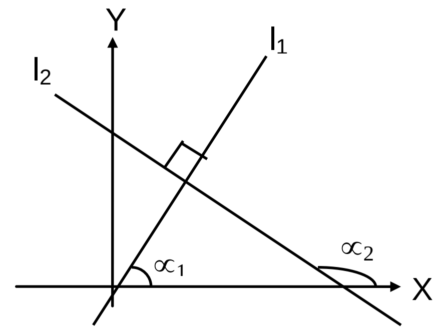
$$l_1 \,||\, l_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

- Las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1 ; es decir :

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{m}_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

La ilustración geométrica de ambos resultados es:





Ejemplos

1. La recta que pasa por A(-6,-4) y B(-3,2) es paralela a la que pasa por C(1,1) y D(0, y). Obtener el valor de y.

   Como las rectas son paralelas, entonces: $m_{AB} = m_{CD}$

$$m_{AB} = \frac{2-(-4)}{-3-(-6)} = \frac{2+4}{-3+6} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \text{y} \qquad m_{CD} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{y-1}{-1}$$

Luego: $\frac{y-1}{-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y-1 = 2(-1) \quad \Rightarrow \quad y = -2+1$

$\therefore \quad y = -1.$

2. La recta que pasa por A(1,2) y B(2,4) es perpendicular a la que pasa por C(3,5) y D(x ,7). Obtener el valor de x.

   Como las rectas son perpendiculares, entonces: $m_{AB} \cdot m_{CD} = -1$

$$m_{AB} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{y} \qquad m_{CD} = \frac{7-5}{x-3} = \frac{2}{x-3}$$

Luego:

$$2\left(\frac{2}{x-3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{x-3} = -1 \quad \Rightarrow \quad 4 = -1(x-3)$$

$$4 = -x+3 \quad \Rightarrow \quad 4-3 = -x \quad \Rightarrow \quad 1 = -x \quad \therefore \quad x = -1.$$

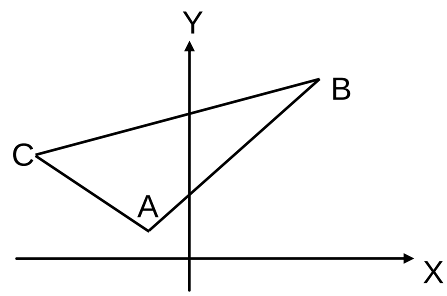
3. Empleando el concepto de pendiente, demostrar que los puntos A(3,3), B(0,1) y C (9,7) son colineales.

   Es suficiente con verificar que: $m_{AB} = m_{AC}$ y $m_{AB} = m_{BC}$.

$$m_{AB} = \frac{1-3}{0-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}, \qquad m_{AC} = \frac{7-3}{9-3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$\text{y} \qquad m_{BC} = \frac{7-1}{9-0} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

   Por lo tanto: $m_{AB} = m_{AC}$ y $m_{AB} = m_{BC}$. Luego A, B y C son colineales.

4. Verificar si los puntos A(-1,1), B(4,6) y C(-4,4) forman un triángulo rectángulo.



   Respuesta: El triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos interiores es recto y el ángulo es recto siempre y cuando dos de sus lados sean perpendiculares. Además para que dos segmentos de recta sean perpendiculares, es necesario que el producto de sus pendientes sea igual a -1 o que sus pendientes son negativamente recíprocas.

$$m_{AB} = \frac{6-1}{4+1} = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{m}_{\mathrm{AC}} = \frac{4-1}{-4+1} = \frac{3}{-3} = -1$$
$$\therefore \quad m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

   Por lo tanto, el Δ ABC es un triángulo rectángulo.

Los resultados vistos anteriormente para rectas paralelas y rectas perpendiculares pueden resumirse utilizando la ecuación general de la recta, en el siguiente teorema:

***Teorema**. Las rectas*
$$Ax + By + C = 0$$
$$Ax + By + C_1 = 0$$
son paralelas, y las rectas

$$Ax + By + C = 0$$
$$Bx - Ay + C_2 = 0$$
son perpendiculares.

Obsérvese que los coeficientes de x y y en dos rectas paralelas son iguales y que los coeficientes de x y y en dos rectas perpendiculares se intercambian los coeficientes y se realiza en uno de ellos el cambio de signo.

La importancia de este teorema radica en que proporciona un camino muy directo para, dada una recta obtener rectas paralelas y rectas perpendiculares a ella.

Ejemplos

1. Dada la recta $3x + 5y - 1 = 0$. Obtener :
   a) La ecuación de una recta paralela a ésta que pasa por A(1,0).

   La recta es de la forma:

$$3x + 5y + \_\_\_\_ = 0$$

   en donde únicamente hace falta obtener el término independiente , y para esto x y y se sustituyen por las coordenadas del punto A(1,0) y finalmente el término independiente que hace falta es el valor que es necesario agregar para que se cumpla la igualdad con cero.

$$3(1) + 5(0) + \_\_\_ = 0$$
$$3 + 0 + \_\_\_ = 0$$
$$3 + \underline{(-3)} = 0$$

   Por lo tanto la recta paralela es: $\boxed{3x + 5y - 3 = 0}$

   b) La ecuación de una recta perpendicular a ésta que pasa por A(1,0).

   La recta es de la forma:

$$5x - 3y + \_\_\_\_ = 0$$

$$\begin{aligned} 5(1) - 3(0) + \underline{\quad} &= 0 \\ 5 - 0 + \underline{\quad} &= 0 \\ 5 + \underline{(-5)} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la recta perpendicular es: $\boxed{5x - 3y - 5 = 0}$

2. Dada la recta $7x - 9y + 15 = 0$. Obtener:

   a) La ecuación de una recta paralela a ésta que pasa por B(2,3).

   La recta es de la forma:

$$7x - 9y + \underline{\quad\;} = 0$$

$$\begin{aligned} 7(2) - 9(3) + \underline{\quad} &= 0 \\ 14 - 27 + \underline{\quad} &= 0 \\ -13 + \underline{(13)} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la recta paralela es: $\boxed{7x - 9y + 13 = 0}$

   b) La ecuación de una recta perpendicular a ésta que pasa por B(2,3).

   La recta es de la forma:

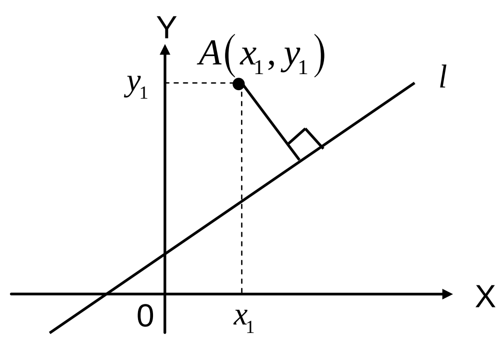
$$9x + 7y + \underline{\quad\;} = 0$$

$$\begin{aligned} 9(2) + 7(3) + \underline{\quad\;} &= 0 \\ 18 + 21 + \underline{\qquad\quad} &= 0 \\ 39 + (-39) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la recta perpendicular es: $\boxed{9x + 7y - 39 = 0}$

3.4.6. Distancia de un punto a una recta.

Supongamos que se tiene la recta "l" y un punto $A(x_1, y_1)$



La distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta "l" que tiene como ecuación $Ax + By + C = 0$ es:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Ejemplos

1. Obtener la distancia de la recta $4x + 3y - 1 = 0$ al punto D(3,0).

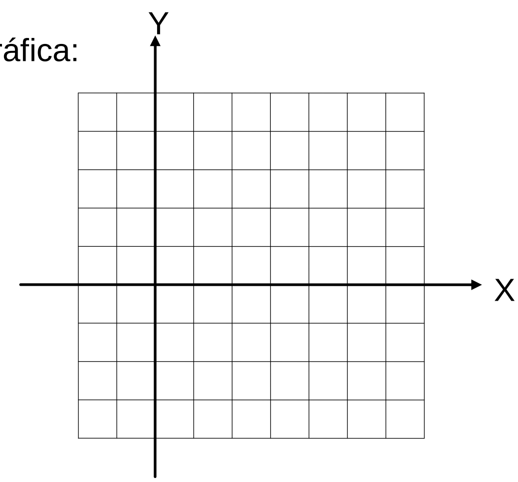
$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{4(3) + 3(0) - 1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = \left| \frac{12 - 1}{\sqrt{16 + 9}} \right| = \left| \frac{11}{\sqrt{25}} \right| = \frac{11}{5}.$$

¿Cuál será la descripción geométrica de la recta y el punto, así como de su distancia?

Desarrollo:

Gráfica:



2. Obtener la distancia de la recta $x - 2y + 3 = 0$ al punto E(-1,5).

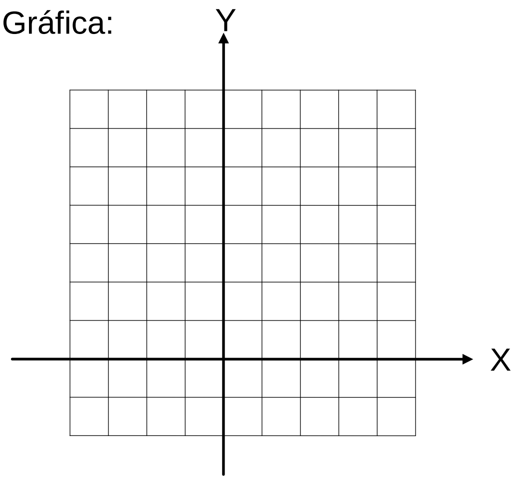
$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{1(-1) - 2(5) + 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{-1 - 10 + 3}{\sqrt{1 + 4}} \right| = \left| \frac{-8}{\sqrt{5}} \right| = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

¿Cuál será la representación geométrica?

Desarrollo:

Gráfica:



3. Obtener la distancia que separa las rectas

$$x+2y-3=0.........(1)$$
$$x+2y+5=0.........(2)$$

Como se puede observar, las dos rectas son paralelas, entonces el problema será resuelto al encontrar un punto sobre una de las dos rectas y obtener la distancia de dicho punto a la otra recta.

De la ecuación (1) se despeja x :

$$x=-2y+3$$
$$\therefore \quad \text{si } y=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

de donde se sabe que el punto $M(3,0)$ está en la recta (1). Ahora el problema consiste en obtener la distancia del punto $M(3,0)$ a la recta (2) $x+2y+5=0.$

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

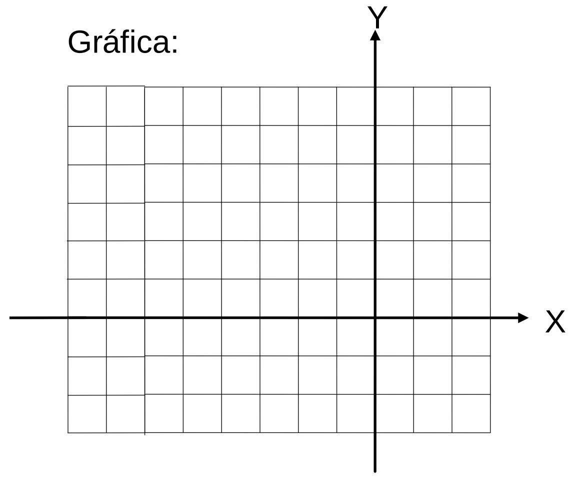
$$d=\left|\frac{3+2(0)+5}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|=\left|\frac{8}{\sqrt{1+4}}\right|=\left|\frac{8}{\sqrt{5}}\right|=\frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Por lo tanto la distancia que separa las rectas es $\frac{8}{\sqrt{15}}$.

¿Construir la gráfica?

Desarrollo:

Gráfica:



4. Obtener la distancia que separa las rectas

$$2x-3y-5=0.........(1)$$
$$2x-3y=0.........(2)$$

De la ecuación (2) se despeja x

$$2x=3y$$
$$x=\frac{3}{2}y$$
$$\therefore \quad \text{si } y=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

de donde el punto $N(0,0)$ está en la recta (2). Ahora se obtendrá la distancia del punto $N(0,0)$ a la recta (1) $2x-3y-5=0$.

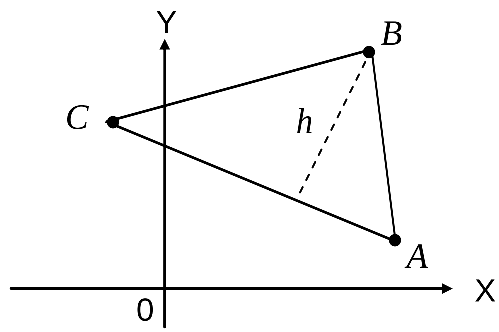
$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$
$$d=\left|\frac{2(0)-3(0)-5}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{-5}{\sqrt{4+9}}\right|=\left|\frac{-5}{\sqrt{13}}\right|=\frac{5}{\sqrt{13}}.$$

Por lo tanto la distancia que separa las rectas es $\frac{5}{\sqrt{13}}$.

3.5. Solución analítica de problemas de corte euclidiano.

3.5.1. Cálculo del área de un triángulo.

Supongamos que se tiene un triángulo cuyos vértices son los puntos: $A, B \ y \ C$, como se muestra en la figura.



Para obtener el área del triángulo planteado, se utilizará la fórmula:

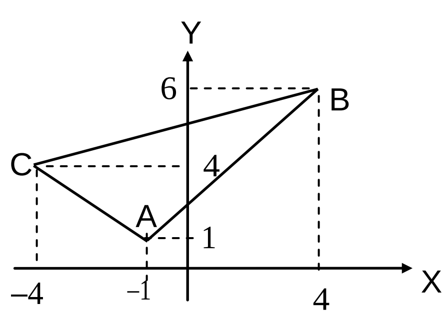
$$Area \Delta ABC = \frac{(base)(altura)}{2}$$

La base puede ser cualquier lado, en particular consideraremos el lado AC; es decir, la base es la distancia del punto A al punto C. También para la altura se puede considerar cualquiera de las tres alturas, en particular se considerará la altura que forma el lado AC con el vértice B. Es decir, la altura se puede obtener evaluando la distancia del punto B a la recta que pasa por los puntos A y C (Distancia de la recta a un punto).

Ejemplos

Obtenga el área del triángulo indicado en cada caso.

1. Los vértices del triángulo son: A(-1,1), B(4,6) y C(-4,4).



Ya sabemos que $Area\Delta ABC = \dfrac{(base)(altura)}{2}$.

Supongamos que la base es la distancia del punto B al punto C:

$$\text{Base} = d_{BC} = \sqrt{(-4-4)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

La Ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C es:

$$y-6 = \frac{4-6}{-4-4}(x-4)$$

$$y-6 = \frac{-2}{-8}(x-4)$$

$$y-6 = \frac{1}{4}(x-4)$$

$$4y-24 = x-4$$

$$\therefore \quad -x+4y-20=0$$

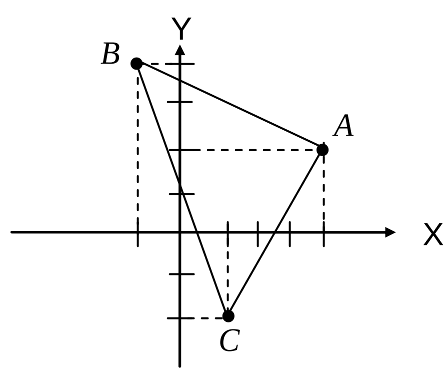
Y la altura es la distancia del punto A a la recta $-x+4y-20=0$.

$$\text{La altura} = d = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{-(-1)+4(1)-20}{\sqrt{(-1)^2+(4)^2}}\right| = \left|\frac{-15}{\sqrt{17}}\right| = \frac{15}{\sqrt{17}}$$

Luego el área del triángulo es:

$$\text{Área}\,\Delta ABC = \frac{(base)(altura)}{2} = \frac{\sqrt{68}\left(\frac{15}{\sqrt{17}}\right)}{2} = \frac{15\left(\sqrt{\frac{68}{17}}\right)}{2} = \frac{15\sqrt{4}}{2} = 15u^2$$

2. Los vértices del triángulo son: $A(4,2)$, $B(-1,4)$ y $C(1,-2)$.



Supongamos que la base es la distancia del punto A al punto C:

$$\text{Base} = d_{AC} = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

La Ecuación de la recta que pasa por los puntos $A\ y\ C$ es:

$$y - 2 = \frac{-2-2}{1-4}(x-4)$$
$$y - 2 = \frac{-4}{-3}(x-4)$$
$$y - 2 = \frac{4}{3}(x-4)$$
$$3y - 6 = 4x - 16$$
$$\therefore \quad -4x + 3y + 10 = 0$$

Y la altura es la distancia del punto B a la recta $-4x+3y+10=0$.

$$\text{La altura} = d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{-4(-1)+3(4)+10}{\sqrt{(-4)^2+(3)^2}}\right| = \left|\frac{26}{\sqrt{25}}\right| = \frac{26}{5}$$

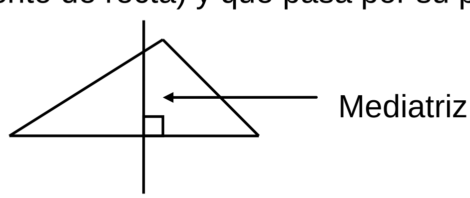
Luego el área del triángulo es:

$$\text{Área}\,\Delta ABC = \frac{(base)(altura)}{2} = \frac{5\left(\frac{26}{5}\right)}{2} = \frac{26}{2} = 13u^2$$

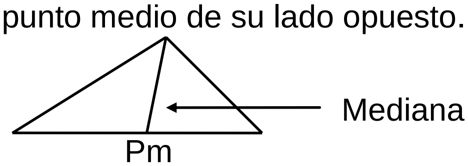
3.5.2. Congruencia de las mediatrices de un triángulo.

Rectas y puntos en todo triángulo

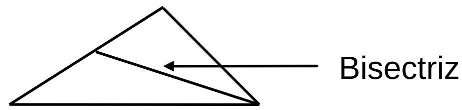
a) **Mediatriz.** Es la recta perpendicular a un lado de un triángulo (o a cualquier segmento de recta) y que pasa por su punto medio.



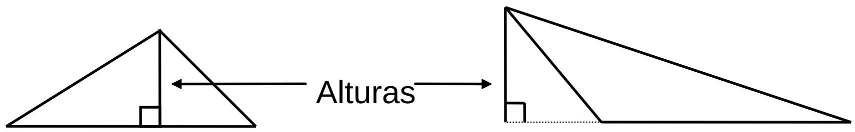
b) **Mediana**. Es el segmento de recta que une cualquier vértice de un triángulo con el punto medio de su lado opuesto.



c) **Bisectriz**. Es el segmento de recta que divide en dos partes iguales a un ángulo.



d) **Altura**. Es el segmento de recta que une un vértice de un triángulo con su lado opuesto o su prolongación, formando un ángulo de 90°.



e) **Circuncentro**. Es el punto donde se intersecan las mediatrices.

f) **Baricentro**. Es el punto donde se intersecan las medianas.

g) **Incentro.** Es el punto donde se intersecan las bisectrices.

h) **Ortocentro**. Es el punto donde se intersecan las alturas.

Ejemplos

1) Si A(-2,1), B(4,7) y C(6,-3) son los vértices de un triángulo. Obtener :
   a) Las pendientes de cada uno de los lados.
   b) El punto medio de cada lado.
   c) Las ecuaciones de las medianas para los puntos A y B.
   d) El baricentro.
   e) Las mediatrices para los lados BC y AC.
   f) El circuncentro (Congruencia de las mediatrices en un triángulo).

   Respuesta:

a) $$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-1}{4-(-2)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$m_{AC} = \frac{-3-1}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{y} \quad m_{BC} = \frac{-3-7}{6-4} = \frac{-10}{2} = -5$$

b) Punto medio entre A y B.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore \quad Pm(1,4).$$

Punto medio entre A y C.

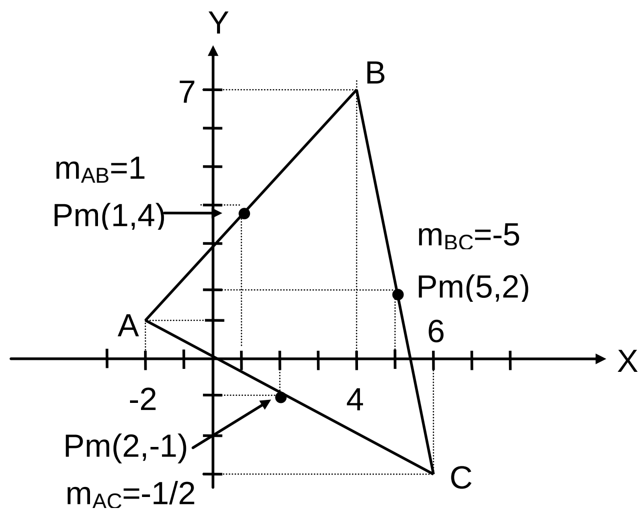
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\therefore \quad Pm(2,-1).$

Punto medio entre B y C.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore \quad Pm(5,2).$



c) Para la ecuación de la mediana en el punto A, se considera el punto $A(-2,1)$ y el punto medio del lado opuesto que es Pm(5,2).

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{2-1}{5-(-2)}(x-(-2))$$

$$y - 1 = \frac{1}{7}(x+2)$$

$$7(y-1) = 1(x+2)$$

$$7y - 7 = x + 2$$

$$\therefore \quad \boxed{-x + 7y - 9 = 0}$$

Para la ecuación de la mediana en el punto B, se considera el punto B(4,7) y el punto medio del lado opuesto que es Pm(2,-1).

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 7 = \frac{-1-7}{2-4}(x-4)$$
$$y - 7 = \frac{-8}{-2}(x-4)$$
$$y - 7 = 4(x-4)$$
$$y - 7 = 4x - 16$$
$$\therefore \quad \boxed{-4x + y + 9 = 0}$$

d) Para obtener el baricentro, se encuentra el punto de intersección de las ecuaciones de las dos medianas que ya se obtuvieron.

$$\begin{array}{l} -x + 7y - 9 = 0 \\ -4x + y + 9 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -x + 7y = 9 \cdots\cdots (1) \\ -4x + y = -9 \cdots \ (2) \end{array}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se despeja a la "x" de la ecuación (1) y se sustituye en la ecuación (2):

$$x = 7y - 9 \quad \Rightarrow$$
$$-4(7y-9) + y = -9$$
$$-28y + 36 + y = -9$$
$$-27y = -45$$
$$\therefore \quad y = \frac{45}{27} \quad y \quad x = 7\left(\frac{45}{27}\right) - 9 = \frac{72}{27}$$

Por lo tanto, el baricentro es el punto $\left(\frac{72}{27}, \frac{45}{27}\right)$.

e) La mediatriz del lado BC, pasa por el punto medio y este es Pm(5,2) y es perpendicular a la recta que pasa por B y C. Además como m_{BC}=-5, entonces la pendiente de la mediatriz es m=1/5.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = \frac{1}{5}(x-5)$$
$$5(y-2) = 1(x-5)$$
$$5y - 10 = x - 5$$
$$\therefore \quad \boxed{-x + 5y - 5 = 0.}$$

La mediatriz del lado AC, pasa por el punto medio y este es Pm(2,-1) y es perpendicular a la recta que pasa por A y C. Además como m_{AC}=-1/2, entonces la pendiente de la mediatriz es m=2.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 1 = 2(x - 2)$$
$$y + 1 = 2x - 4$$
$$\therefore \quad \boxed{-2x + y + 5 = 0.}$$

f) La ecuación del circuncentro se obtiene al encontrar el punto de intersección de las mediatrices anteriores.

$$\begin{matrix} -x + 5y - 5 = 0 \\ -2x + y + 5 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} -x + 5y = 5 \cdots\cdots (1) \\ -2x + y = -5 \cdots \ (2) \end{matrix}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se despeja a la "x" de la ecuación (1) y se sustituye en la ecuación (2):

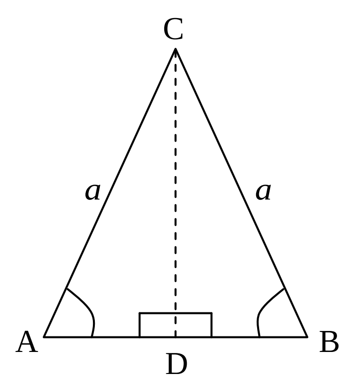
$$x = 5y - 5 \quad \Rightarrow$$
$$-2(5y - 5) + y = -5$$
$$-10y + 10 + y = -5$$
$$-9y = -15$$
$$\therefore \quad y = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad x = 5\left(\frac{5}{3}\right) - 5 = \frac{10}{3}$$

Por lo tanto, el circuncentro es el punto $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Actividad para el alumno
Obtener el ortocentro para el triángulo dado anteriormente. Se sugiere encontrar las ecuaciones de dos de las alturas y posteriormente encontrar la intersección.

3.5.3. Igualdad de los ángulos en un triángulo isósceles.

Supongamos que se tiene el triángulo isósceles que se muestra a continuación



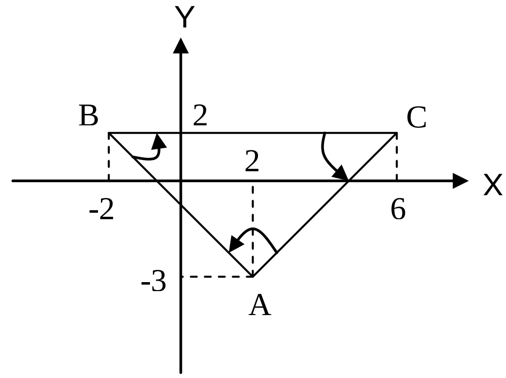
El triángulo isósceles ABC se dividió en dos triángulos congruentes, estos son: el triángulo ADC y el triángulo DBC. Como estos dos triángulos son congruentes sus ángulos deben ser respectivamente iguales; es decir, tienen dos ángulos rectos que son iguales, los ángulos formados en el vértice C son iguales por haberse formado triángulos congruentes y finalmente se deduce que

$$\angle A = \angle B$$

De donde se deduce la igualdad en los ángulos de un triángulo isósceles.

Ejemplo

1. Obtenga los ángulos del triángulo isósceles cuyos vértices son: $A(2,-3)$, $B(-2,2)$ y $C(6,2)$. Además verifique que dos de los ángulos son iguales.



Respuesta: $m_{AB} = \dfrac{2+3}{-2-2} = -\dfrac{5}{4}, \quad m_{AC} = \dfrac{2+3}{2+2} = \dfrac{5}{4} \quad y \quad m_{BC} = 0$.

Para el ángulo en A: $m_1 = m_{AC} = \dfrac{5}{4} \quad y \quad m_2 = m_{AB} = -\dfrac{5}{4}$.

$$\tan A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{-\frac{5}{4} - \frac{5}{4}}{1 + \left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{10}{4}}{1 - \frac{25}{16}} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{9}{16}} = \frac{40}{9}.$$

$\therefore \qquad \angle A = 77^0\ 19'10''$

Para el ángulo en B: $m_1 = m_{AB} = -\dfrac{5}{4} \quad y \quad m_2 = m_{BC} = 0$.

$$\tan B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{0 + \frac{5}{4}}{1 + \left(-\frac{5}{4}\right)(0)} = \frac{\frac{5}{4}}{1} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \angle B = 51^0\ 20'24''.$$

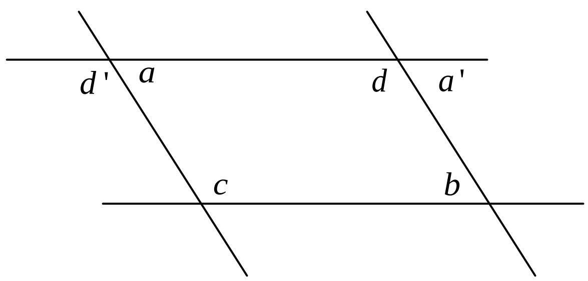
Para el ángulo en C: $m_1 = m_{BC} = 0 \quad y \quad m_2 = m_{AC} = \frac{5}{4}$.

$$\tan C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{\frac{5}{4} - 0}{1 + 0\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{4}}{1} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \angle C = 51^0\ 20'\,24''.$$

Por lo tanto $\angle B = \angle C$.

3.5.4. Igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo.

Supongamos que se tiene un paralelogramo en el que se prolongaron sus lados.



Se demostrará que los ángulos opuestos en un paralelogramo son iguales; es decir, que:

$$\angle a = \angle b \quad \text{y} \quad \angle c = \angle d$$

$\angle a = \angle a'$ por ser correspondientes

$\angle b = \angle a'$ por ser alternos internos

$\therefore \quad \angle a = \angle b$

De igual forma:

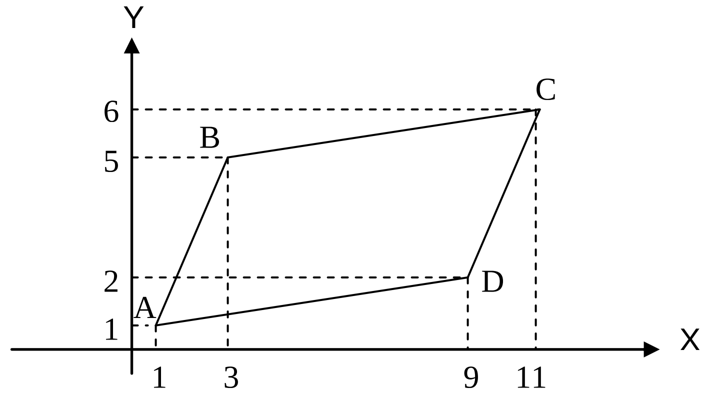
$\angle d = \angle d'$ por ser correspondientes

$\angle c = \angle d'$ por ser alternos internos

$\therefore \quad \angle c = \angle d$

Ejemplo

1. Los puntos $A(1,1), B(3,5), C(11,6)\ y\ D(9,2)$ forman un paralelogramo. Verifique que los ángulos opuestos son iguales.



$$m_{AB}=\frac{5-1}{3-1}=\frac{4}{2}=2,\quad m_{CD}=\frac{2-6}{9-11}=\frac{-4}{-2}=2,\quad m_{BC}=\frac{6-5}{11-3}=\frac{1}{8}$$

y $m_{AD}=\dfrac{2-1}{9-1}=\dfrac{1}{8}$.

Para el ángulo en A: $m_1=m_{AD}=\dfrac{1}{8}$ $\;y\;$ $m_2=m_{AB}=2$.

$$\tan A=\frac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1}=\frac{2-\frac{1}{8}}{1+\left(\frac{1}{8}\right)(2)}=\frac{\frac{15}{8}}{1+\frac{2}{8}}=\frac{\frac{15}{8}}{\frac{10}{8}}=\frac{15}{10}\quad\Rightarrow\quad\angle A=56^0\,18'\,35''.$$

Para el ángulo en C: $m_1=m_{BC}=\dfrac{1}{8}$ $\;y\;$ $m_2=m_{CD}=2$.

$$\tan C=\frac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1}=\frac{2-\frac{1}{8}}{1+\left(\frac{1}{8}\right)(2)}=\frac{\frac{15}{8}}{1+\frac{2}{8}}=\frac{\frac{15}{8}}{\frac{10}{8}}=\frac{15}{10}\quad\Rightarrow\quad\angle C=56^0\,18'\,35''.$$

Por lo tanto: $\angle A=\angle C$.

Para el ángulo en B: $m_1=m_{AB}=2$ $\;y\;$ $m_2=m_{BC}=\dfrac{1}{8}$.

$$\tan B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{\frac{1}{8} - 2}{1 + (2)\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{-\frac{15}{8}}{1 + \frac{2}{8}} = \frac{-\frac{15}{8}}{\frac{10}{8}} = -\frac{15}{10} \quad \Rightarrow \quad \angle A = 123^0\ 41'\ 24''$$

Para el ángulo en D: $m_1 = m_{AD} = \frac{1}{8}$ y $m_2 = m_{DC} = 2$.

$$\tan D = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \frac{\frac{-21}{8}}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)(2)} = \frac{-\frac{15}{8}}{1 + \frac{2}{8}} = \frac{-\frac{15}{8}}{\frac{10}{8}} = -\frac{15}{10} \quad \Rightarrow \quad \angle D = 123^0\ 41'\ 24''.$$

Por lo tanto: $\angle B = \angle D$.

3.6. Ejercicios

1) Encontrar las ecuaciones de las rectas, considerando los datos que se dan:
   a) Pasa por A(0,0) y su pendiente es 4.
   b) Pasa por B(3,4) y su pendiente es -5
   c) Pasa por C(-1,-3) y su pendiente es $\frac{3}{5}$.
   d) Pasa por D(-2,7) y su pendiente es $\frac{-5}{2}$.
   e) Pasa por A(0,3) y B(-1,0).
   f) Pasa por A(1,1) y B(3,-3).
   g) Pasa por A(4,-5) y B(-1,-1).
   h) Pasa por $A\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ y $B(3,5)$.

2) Encontrar la pendiente y la ordenada al origen para cada recta que se da :

a) $x + y = 0$	b) $x + 3y = 0$
c) $x + y + 1 = 0$	d) $3x + y - 3 = 0$
e) $x + 2y - 7 = 0$	f) $9x - 8y + 11 = 0$
g) $11x + 10y - 9 = 0$	h) $-x + 12y + 13 = 0$
i) $5x - 7y + 21 = 0$	j) $-7x - 35y - 20 = 0$

3) Encuentre la ecuación que es paralela a una de los ejes y que pasa por el punto indicado en cada inciso.
   a) Es paralela al eje X y pasa por el punto A(2,-3).
   b) Es paralela al eje Y y pasa por el punto A(2,-3).
   c) Es paralela al eje X y pasa por el punto B(-5,4).
   d) Es paralela al eje Y y pasa por el punto B(-5,4).

4) Verifique si los puntos indicados pertenecen o no a la recta que se da.
   a) $x+2y-8=0$: $A(6,1)$, $B(-2,7)$, $C(4,2)$ y $D(2,3)$.
   b) $3x-y+1=0$: $A(1,4)$, $B(-1,-2)$, $C(0,1)$ y $D(4,-1)$.
   c) $-6x-2y+10=0$: $A(0,10)$, $B(1,7)$, $C(0,0)$ y $D(-1,13)$

5) Obtenga cuatro puntos que pertenezcan a cada recta.
   a) $2x-4y+6=0$.
   b) $x+y+5=0$.
   c) $5x+3y-9=0$.

6) Obtenga el punto de intersección de las rectas:

   a) $\begin{aligned} x-2y+1&=0 \\ 2x+y-3&=0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x+3y-7&=0 \\ x-y-1&=0 \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} 3x+y-8&=0 \\ -x+y&=0 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x+2y-1&=0 \\ -3x+y-4&=0 \end{aligned}$

7) Encuentre el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos A(1,0) y B(3,4) con la recta que pasa por C(-1,2) y D(4,1).

8) Los vértices de un triángulo son: A(2,-3), B(-2,2) y C(6,2). Obtenga:
   a) El ángulo en A.
   b) El ángulo en B.
   c) El ángulo en C.
   d) ¿Es un triángulo isósceles?

9) Los vértices de un triángulo son: A(2,-3), B(5,4) y C(0,2). Obtenga:
   a) La medida de cada uno de los ángulos interiores.
   b) ¿Es un triángulo isósceles?

10) Empleando el concepto de pendiente verificar en cada caso si los puntos que se dan son vértices de un triángulo rectángulo.
   a) A(2,1), B(10,5) y C(1,3)

b) A(6,-2), B(4,3) y C(-1,1)
c) A(-3,-3), B(0,3) y C(2,2)
d) A(7,9), B(1,1) y C(5,-2)

11) Verificar si los puntos son vértices de un paralelogramo, en caso de que lo sea compruebe que los ángulos opuestos son iguales.

a) A(-8,-3), B(-2,6), C(8,5) y D(2,-4)
b) A(4,1), B(1,4), C(-2,3) y D(1,0)
c) A(3,1), B(6,4), C(0,3) y D(-3,0)

12) Verificar si los puntos que se dan son colineales.

a) A(12,1), B(-3,-2) y C(2,-1)
b) A(-2,-2), B(0,0) y C(4,4)
c) A(1,2), B(-1,0) y C(3,4)

13) La pendiente de una recta es 2. Obtener:

a) La ecuación de la recta paralela a ésta que pasa por A(3,4).
b) La ecuación de la recta perpendicular a ésta que pasa por A(3,4).

14) La pendiente de una recta es -3. Obtener:

a) La ecuación de la recta paralela a ésta que pasa por B(-1,0).
b) La ecuación de la recta perpendicular a ésta que pasa por B(-1,0).

15) La pendiente de una recta es $-\frac{9}{5}$. Obtener:

a) La ecuación de la recta paralela a ésta que pasa por C(-9,-10).
b) La ecuación de la recta perpendicular a ésta que pasa por $C(-9,-10)$.

16) Dada la recta $5x+9y-21=0$. Obtener:

a) La ecuación de una recta paralela a ésta que pase por el punto A(2,5).
b) La ecuación de una recta perpendicular a ésta que pase por el punto A(2,5).

17) Dada la recta $7x-9y+15=0$. Obtener:

c) La ecuación de una recta paralela a ésta que pase por el punto B(-4,1).
d) La ecuación de una recta perpendicular a ésta que pase por el punto B(-4,1).

18) Dada la recta $-11x+2y-6=0$. Obtener:

e) La ecuación de una recta paralela a ésta que pase por el punto C(1,3).

f) La ecuación de una recta perpendicular a ésta que pase por el punto C(1,3).

19) Dada la recta $-x-6y+7=0$. Obtener:

g) La ecuación de una recta paralela a ésta que pase por el punto D(-1,7).

h) La ecuación de una recta perpendicular a ésta que pase por el punto D(-1,7).

20) Encontrar la distancia de las rectas que se dan a cada uno de los puntos indicados en cada caso:

a) $-2x+4y-10=0$ al punto A(0,-1).

b) $3x-6y+44=0$ al punto B(6,-5).

c) $8x-6y-20=0$ al punto C(1,10).

d) $-5x+3y+5=0$ al punto D(3,2).

21) Obtenga la distancia que separa las parejas de rectas paralelas que se dan:

a) $-2x+4y-10=0$ y $-2x+4y-4=0$.

b) $x-2y+5=0$ y $x-2y-7=0$.

c) $3x+y+9=0$ y $3x+y-1=0$

22) Encontrar el área de los triángulos cuyos vértices son:

a) A(1,1), B(4,2) y C(2,3).

b) A(-1,2), B(3,1) y C(1,4).

c) A(-2,-2), B(3,-1) y C(0,4).

d) A(-6,1), B(-1,4) y C(2,1).

23) Los puntos A(-2,3), B(2,-3) y C(6,5) son vértices de un triángulo. Obtener :

a) La ecuación de cada uno de sus lados.
b) La recta que pasa por A y es paralela con el lado BC.
c) La recta que pasa por B y es paralela con el lado AC.
d) La recta que pasa por C y es paralela con el lado AB.
e) Las mediatrices de cada lado.
f) El circuncentro.
g) Las medianas de cada lado.
h) EL baricentro.
i) Las alturas de cada vértice.
j) El ortocentro.

3.7. Examen propuesta para la unidad 3.

1) Los puntos A(-3,-3), B(0,3) y C(2,2) forman un triángulo. (**valor 3 puntos**)

a) Verifique si es un triángulo rectángulo.

b) Obtenga el ángulo en A.
c) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por A y B.

2) La pendiente de una recta es $m = \frac{-9}{5}$. Obtenga: (**Valor 2 puntos**)
a) La ecuación de la recta paralela a ésta que pasa por A(-3,-4)
b) La ecuación de la recta perpendicular a ésta que pasa por A(-3,-4)

3) Obtenga la pendiente y la ordenada al origen para la recta: $9x - 8y + 11 = 0$. (**Valor 1 punto**).

4) Los puntos A(-3,-3), B(0,3) y C(2,2) forman un triángulo: (**Valor 2 puntos**)
a) Obtenga a mediatriz para el lado AC.
b) Obtenga la mediatriz para el lado AB.

5) Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son: A(-1,2), B(3,1) y C(1,4). (Use como base el lado AB). (**Valor 2 puntos**)

3.8. Solución de de los ejercicios.

1)
a) $-4x + y = 0$ b) $5x + y - 19 = 0$ c) $-3x + 5y + 12 = 0$
d) $5x + 2y - 4 = 0$ e) $-3x + y - 3 = 0$ f) $2x + y - 3 = 0$
g) $-4x - 5y - 9 = 0$ h) $-26x + 15y + 3 = 0$

2)
a) $m = -1 \; y \; b = 0$ b) $m = -\frac{1}{3} \; y \; b = 0$ c) $m = -1 \; y \; b = -1$
d) $m = -3 \; y \; b = 3$ e) $m = -\frac{1}{2} \; y \; b = \frac{7}{2}$ f) $m = \frac{9}{8} \; y \; b = \frac{11}{8}$
g) $m = -\frac{11}{10} \; y \; b = \frac{9}{10}$ h) $m = \frac{1}{12} \; y \; b = -\frac{13}{12}$ i) $m = \frac{5}{7} \; y \; b = \frac{21}{7}$
j) $m = -\frac{1}{5} \; y \; b = -\frac{4}{7}$

3)
a) $y = -3$ b) $x = 2$ c) $y = 4$ d) $x = -5$

4)
a) A, C y D si, B no. b) A, B y C si, D no. c) A, B, C y D no

5)
a) (-3,0), (-1,1), (1,2) y (3,3) b) (0,-5), (1,-6), (-1,-4) y (2,-7)
c) (0,3), $\left(1, \frac{4}{3}\right)$, $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ y (3,-2)

6)
a) (1,1) b) (2,1) c) (2,2) d) (-1,1)

7) $\angle\alpha = 114^0\ 26'\,38"$

8) $\angle A = 90^0, \quad \angle B = 51^0\ 20'\,24" \quad y \quad \angle C = 51^0\ 20'\,24"$

9) $\angle A = 45^0, \quad \angle B = 45^0 \quad y \quad \angle C = 90^0$

10)
a) si b) si c) si d) si

11)
a) si b) si c) si

12)
a) si b) si c) si

13) a) $-2x + y + 2 = 0$ y b) $x + 2y - 11 = 0$

14) a) $3x + y + 3 = 0$ y b) $-x + 3y - 1 = 0$

15) a) $9x + 5y + 131 = 0$ y b) $-5x + 9y + 45 = 0$

16) a) $5x + 9y - 55 = 0$ y b) $9x - 5y + 7 = 0$

17) a) $7x - 9y + 37 = 0$ y b) $9x + 7y + 29 = 0$

18) a) $-11x + 2y + 5 = 0$ y b) $2x + 11y - 35 = 0$

19) a) $-x - 6y + 41 = 0$ y b) $6x - y + 13 = 0$

20)
a) $\frac{14}{\sqrt{20}}$ b) $\frac{92}{\sqrt{45}}$ c) $\frac{36}{5}$ d) $\frac{4}{\sqrt{34}}$

21)
a) $\frac{6}{\sqrt{20}}$ b) $\frac{12}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{10}{\sqrt{10}}$

22)
a) $\frac{5}{2}u^2$ b) $5u^2$ c) $14u^2$ d) $12u^2$

23)
a) $3x + 2y = 0, \quad -x + 4y - 14 = 0 \quad y \quad -2x + y + 7 = 0$
b) $-2x + y - 7 = 0$
c) $-x + 4y + 14 = 0$
d) $3x + y - 28 = 0$
e) $-2x + 3y = 0, \quad 4x + y - 12 = 0 \quad y \quad x + 2y - 6 = 0$
f) $\left(\frac{18}{7}, \frac{12}{7}\right)$
g) $-5x + 6y = 0, \quad x - 2 = 0 \quad y \quad x + 3y - 7 = 0$
h) $\left(2, \frac{5}{3}\right)$

i) $x + 2y - 4 = 0, \quad 4x + y - 5 = 0 \quad y \quad -2x + 3y - 3 = 0$

j) $\left(\frac{6}{7}, \frac{11}{7}\right)$

3.9. Solución del examen propuesto

1) a) si b) $\angle A = 18^0\ 26'\,5''$ c) $-2x + y - 3 = 0$

2) a) $9x + 5y + 47 = 0$ b) $-5x + 9y + 21 = 0$

3) $m = \dfrac{9}{8} \quad y \quad b = \dfrac{11}{8}$

4) a) $x + y + 1 = 0$ b) $x + 2y + \frac{3}{2} = 0$

5) $\dfrac{15}{2}u^2$