# UNIDAD 2

# SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

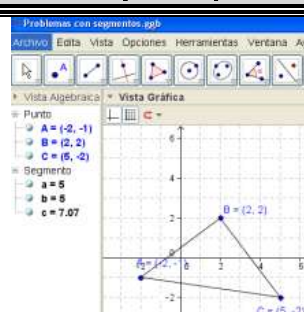
Al término de la unidad, el alumno:

Reconocerá que un aspecto relevante en el método de la Geografía Analítica, consiste en definir un sistema de referencia en un plano.

Encontrará las coordenadas de un punto en el plano utilizando los sistemas de referencia polar y cartesiana.

Reconocerá a una ecuación con dos variables como la expresión general que satisfacen las coordenadas de los puntos del lugar geométrico de una curva en el plano, considerando las condiciones de su representación.

Resolverá problemas geométricos de intersección entre rectas, circunferencias o entre estas y los ejes coordenados.



**Aprendizajes**

El alumno:

1. Reconoce que un aspecto relevante en el método de la Geometría Analítica, consiste en definir un sistema de referencia en un plano.
2. Encuentra las coordenadas de un punto en el plano utilizando los sistemas de referencia polar y cartesiano.
3. Localiza puntos en el plano cuando se proporcionan sus coordenadas polares o rectangulares.
4. Representa de manera correcta, en cualquier cuadrante del Plano Cartesiano, un conjunto cualesquiera de puntos.
5. Identifica las condiciones para representar un segmento rectilíneo en el plano cartesiano: las coordenadas de sus puntos extremos, o bien, las coordenadas de uno de ellos, la longitud del segmento y su ángulo de inclinación.
6. Entiende los pasos del proceso para obtener la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.
7. Calcula la longitud de un segmento dadas las coordenadas de sus puntos extremos.
8. Dadas las coordenadas de los puntos extremos de un segmento, calcula su ángulo de inclinación a través de su pendiente.
9. Resuelve analíticamente problemas que impliquen determinar un segmento apartir de algunas de las propiedades que lo definen.
10. Explica que significa que un punto divida a un segmento rectilíneo en una razón dada.
11. Dadas las coordenadas de los extremos de un segmento y las de un punto interior a el, calcula la razón en que este ultimo divide al segmento.
12. Encuentra las coordenadas del punto que divide a un segmento y las de un punto interior a el, calcula la razón en que este ultimo divide al segmento.
13. Encuentra las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada, en particular, las coordenadas del punto medio.
14. Dadas las coordenadas del punto medio y de uno de los extremos de un segmento rectilíneo encuentra las coordenadas del otro extremo.

15. Reconoce a una ecuación con dos variables como la expresión general que satisfacen las coordenadas de los puntos de una curva en el plano.
16. Resuelve problemas geométricos de intersección entre rectas, circunferencias o entre estas y los ejes coordenados.
17. Reduce algunas situaciones a otras más simples que ya sabe resolver, lo que reforzará esta estrategia de resolución de problemas.
18. Incrementa su capacidad de generalizar, tanto al obtener fórmulas generales a partir de analizar casos concretos, como al interpretar un concepto en dos representaciones distintas.
19. Identifica algunos de los procesos inversos que se presentan en esta unidad; lo que refuerza su capacidad de reversibilidad de pensamiento.

**Temática**

**Estudio analítico de un punto en el plano**

Representación numérica de un punto en el plano en:

1. El sistema de coordenadas rectangulares.

2. El sistema de coordenadas polares.

**Estudio analítico de un segmento rectilíneo en el plano cartesiano**

1. Localización de un segmento rectilíneo en el plano. Condiciones necesarias y suficientes.

2. Longitud del segmento. Distancia entre dos puntos.

3. Angulo de inclinación del segmento. Concepto pendiente.

4. Razón en que un segmento es dividido por uno de sus puntos.

5. Coordenadas del punto que divide al segmento en una razón.

**Estudio analítico de algunos lugares geométricos en el plano cartesiano.**

1. Lugares geométricos sencillos que dan lugar a rectas, circunferencias y parábolas

2. Su representación algebraica.

3. Intersección entre ellos o con los ejes cartesianos.

## GUÍA DIDÁCTICA

El material aquí presentado es una propuesta para desarrollar los contenidos temáticos y lograr que los alumnos adquieran los aprendizajes propuestos en la Unidad 2 del programa de Matemáticas III.

De acuerdo con el programa de la asignatura, este material se estudiará durante quince horas en el aula, correspondientes a 9 sesiones. Pero con el apoyo de las TIC's (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en particular de Internet, los ambientes computacionales construidos con los programas Geogebra y Autoplay, los tiempos pueden ser diferentes a las quince horas previstas para su desarrollo.

Se propone que las sesiones se desarrollen de la siguiente forma:

Realizar una exploración de los conocimientos previos que debe tener el estudiante, que servirá para hacer significativo su conocimiento y obtener información que va a ser útil para hacer un análisis de la eficacia de este material.

Propiciar el tránsito entre distintas formas de representación matemática como: papel y lápiz; esto es, desarrollo algorítmico de los problemas; realización de tablas de valores; gráficas en el sistema cartesiano, exploración de los ambientes computacionales diseñados expresamente para los temas del curso los cuales fueron realizados en el programa Geogebra y podrían ser explorados ya sea en Internet, en sus hogares o en el aula de la escuela.

**Sesión 1**

Temática

Estudio analítico de un punto en el plano

Representación numérica de un punto del plano en:

1. El sistema de coordenadas rectangulares.
2. El sistema de coordenadas polares.

En cursos anteriores, de matemáticas, has utilizado el plano cartesiano para ubicar o localizar puntos por medio de sus coordenadas rectangulares. Existen otros sistemas de coordenadas que se pueden utilizar, posiblemente el siguiente en importancia al sistema de coordenadas cartesianas sea el sistema de coordenadas polares.

En el sistema de coordenadas cartesianas un punto se representa por dos números llamados abscisa y ordenada los cuales son distancias dirigidas desde dos rectas fijas. En el sistema de coordenadas polares, las coordenadas están representadas por una distancia dirigida y la medida de un ángulo respecto a un punto fijo y a un rayo fijo (o semirrecta) y de una serie de circunferencias concéntricas con centro en el Polo cuyo radio se denomina con la letra r, o por el segmento *OP*.

El punto fijo se llama **polo** (u origen) y se designa por la letra O. el rayo fijo se le da el nombre de **eje polar** (o recta polar) el cual se representa por OA. El rayo OA generalmente se dibuja horizontalmente y se extiende a la derecha indefinidamente (ver figura). Para ubicar un punto P en el plano polar se considera la distancia del punto P al polo (O) y el ángulo que forma el eje polar con el segmento o radio *OP*. Por lo que las coordenadas del punto se definen con los valores del radio y del ángulo que se forma, esto es, $P(r, \theta)$. Estas dos cantidades se llaman las coordenadas polares del punto P; en particular, r se llama radio vector y $\theta$ ángulo polar, ángulo vectorial o argumento de P (ver figura 1), realizada en el programa Geogebra.

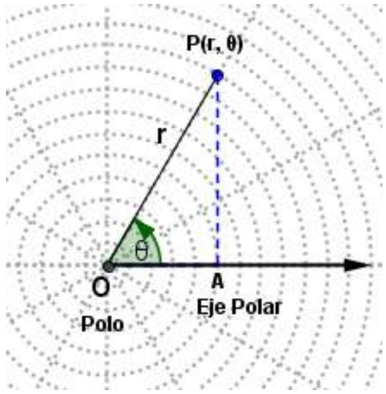



Figura 1

**Sesión 2**

Actividad

Con el programa Geogebra Abre el archivo ***1 Coordenadas Polares.ggb*** y arrastra los puntos azules a las posiciones siguientes:

A(2, 0º), B(4, 60º), C(8, 210º) y D(7, 330º)

Como indicador aparecerá la siguiente pantalla (ver figura 2) y el resultado que deberás obtener será similar a la figura 3

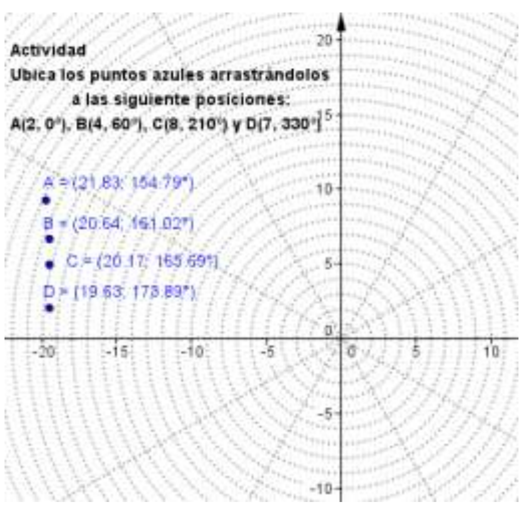



Figura 2

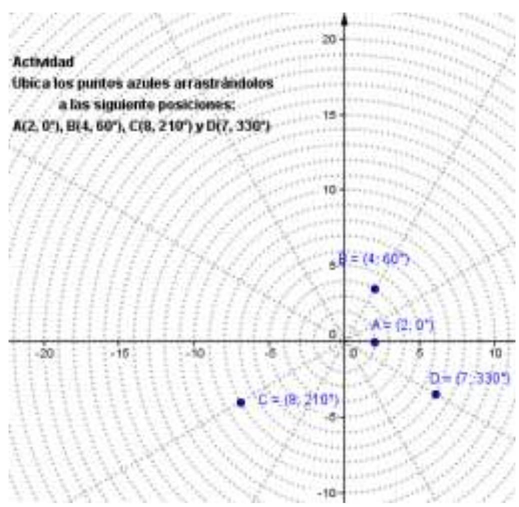



Figura 3

Paso de coordenadas polares a rectangulares y viceversa

Las coordenadas rectangulares (*x, y*) de cualquier punto de un plano involucran solamente dos variables ***x*** y ***y*** por lo que cualquier lugar geométrico en un sistema de coordenadas rectangulares en un plano involucra una o las dos variables, es por esto que es común llamar a esta clase de ecuación la ecuación rectangular del lugar geométrico. De forma similar se establece la ecuación polar para el lugar geométrico.

Por otro lado, para un lugar geométrico determinado, conviene transformar la ecuación polar en la ecuación rectangular, y viceversa. Para efectuar tal transformación se deben conocer las relaciones que existen entre las coordenadas rectangulares y las polares de cualquier punto del lugar geométrico. Se obtienen las relaciones en una forma simple cuando el polo y el eje polar del sistema polar se hacen coincidir, respectivamente, con el origen y la parte positiva del eje *X* del sistema cartesiano (ver figura 4).

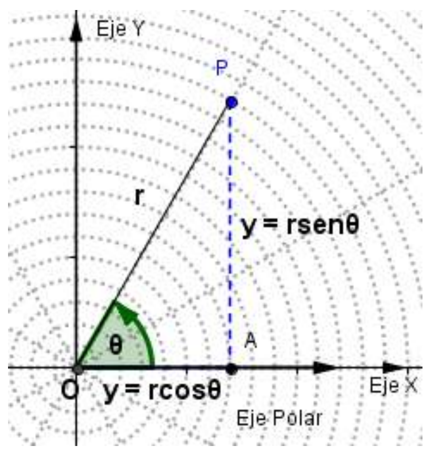



Figura 4

Sea **P** un punto cualquiera que tenga por coordenadas rectangulares (x, y) y por coordenadas polares (r, θ) de la figura anterior se tiene

$x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$, $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = arctg\,\frac{y}{x}$, $sen\theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ejemplos

1. Expresa en coordenadas rectangulares el punto A(4, 45°).

Solución

Como P(x, y) equivale a $P(rcos\theta, rsen\theta)$, al sustituir las coordenadas del punto dado se tiene:

$$P(4cos45°, 4sen45°) = P(4(0.7071), 4(0.7071)) = P(2.8284, 2.8284)$$

$$P(2.8284, 2.8284)$$

2. Expresar en coordenadas polares el punto B (-3,2).

Solución

Como P(r, θ). equivale a $P(\sqrt{x^2 + y^2}, arctg\,\frac{y}{x})$

al sustituir los valores de ***x*** y ***y*** se obtiene:

$P\left(\sqrt{(-3)^2 + (2)^2}, arctg\,\frac{2}{-3}\right) = P(\sqrt{13}, 146°)$

Ejercicios

1. Transforma las coordenadas de los siguientes puntos a la forma rectangular:

   a) (10, 30°)

   b) (5, 60°)

   c) (-4, 90°)

   d) (-5, 120°)

   e) (9, -300°)

2. Transforma las coordenadas de los siguientes puntos a la forma polar:

   a) (3, 10)

   b) (3, 4)

   c) (-3, 8)

   d) (8, -5)

   e) (-4, -4)

**Sesión 3**

**Estudio analítico de un segmento rectilíneo en el plano cartesiano**

**Segmento rectilíneo dirigido**

La porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama segmento rectilíneo o simplemente segmento. Los dos puntos se llaman extremos del segmento. Así, en la figura 5, para la recta $l$, AB es un segmento cuyos extremos son A y B. La longitud del segmento AB se representa por $\overline{AB}$


Figura 5

El estudiante ya está familiarizado con el concepto geométrico de segmento rectilíneo. Para los fines de la Geometría analítica se añade al concepto geométrico de segmento, la idea de sentido. Desde este punto de vista consideramos que el segmento *AB* es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta $l$, de A hacia B. Decimos entonces que el segmento AB está dirigido de A a B, e indicamos esto por medio de una flecha como en la figura 1.

En este caso, el punto A se llama origen o punto inicial y el punto B extremo o punto final. Podemos también obtener el mismo segmento dirigiéndolo de *B* a *A*; entonces *B* es el origen y *A* el extremo, y el segmento se designa por *BA.* El sentido de un segmento dirigido se indica siempre escribiendo primero el origen o punto inicial.

Desde el punto de vista de la Geometría elemental, las longitudes de los segmentos dirigidos, *AB* y *BA*, son las mismas. En Geometría analítica, sin embargo, se hace una distinción entre los *signos* de estas longitudes. Así, especificamos, arbitrariamente, que un segmento dirigido en un sentido será considerado de longitud *positiva,* mientras que otro, dirigido en sentido opuesto será considerado como un segmento de longitud *negativa.* De acuerdo con esto, si especificamos que el segmento dirigido *AB* tiene una longitud positiva, entonces el segmento dirigido *BA* tiene una longitud negativa, y escribimos

$$\overline{AB} = -\overline{AB}$$

En un sistema coordenado lineal, la longitud del segmento dirigido que une dos puntos dados se obtiene, en magnitud y signo, restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo.

La distancia entre dos puntos se define como el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. Si representamos la distancia por *d* podemos escribir:

$$d = |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1|$$

o también

$$d = |\overline{P_2P_1}| = |x_1 - x_2|$$

Ejemplo.

Hallar la distancia entre los puntos $P_1(5)$ y $P_2(-3)$

Solución

Las longitudes de los segmentos dirigidos son:

$$\overline{P_1P_2} = -3 - 5 = -8$$

y

$$\overline{P_2P_1} = 5 - (-3) = 8$$

Entonces, para cualquiera de los dos segmentos dirigidos, la distancia está dada por

$$d = |-8| = |8| = 8$$

Distancia entre dos puntos dados.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera (ver figura 6)

Vamos a determinar la distancia ***d*** entre $P_1$ y $P_2$, siendo $d = |\overline{P_1P_2}|$

Considerando las proyecciones perpendiculares de los puntos en los ejes coordenados se forma el triángulo rectángulo $P_1AP_2$, la distancia entre $P_1$ y $P_2$

viene a ser la hipotenusa del triángulo (ver figura 6). Al aplicar el teorema de Pitágoras se tiene

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

de donde

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

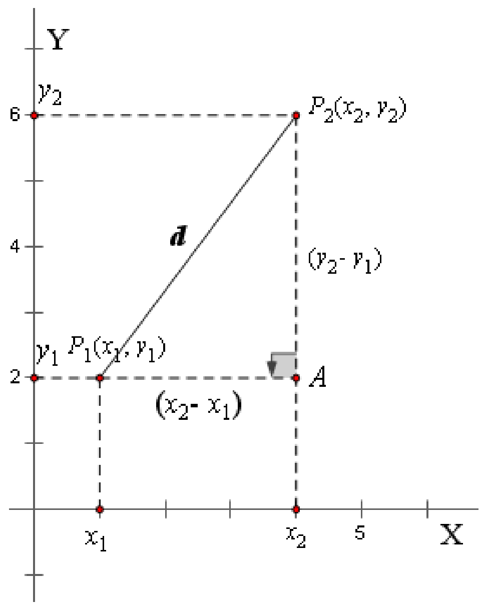



Figura 6

Problema

1. Demuestra que los puntos A(-2, -1), B(2, 2), C(5, -2), son los vértices de un triángulo isósceles y determina su perímetro.

Actividad

1. Abre el archivo en Geogebra ***2 Problemas con segmentos.ggb*** (figura 7)

2. Arrastra los puntos hasta la posición indicada por lascoordenadas dadas en el problema (figura 8)

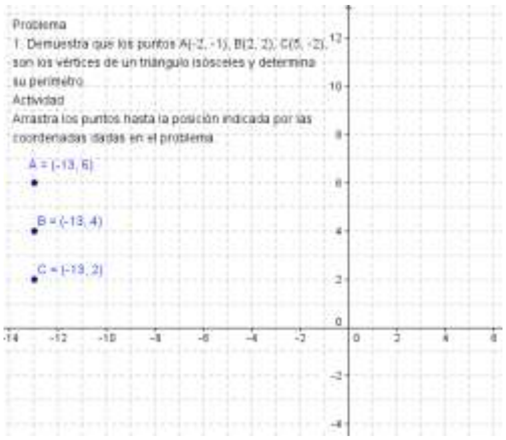



Figura 7

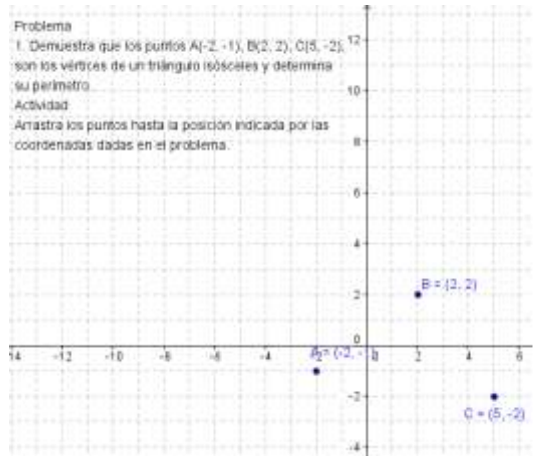



Figura 8

Para construir los segmentos del triángulo da un clic en el tercer botón de la barra de Menús y selecciona ***"Segmento entre Dos Puntos"*** (ver figuras 9 y 10) luego da clic en un punto y luego en el segundo, esto construye el segmento, repite el proceso para los otros dos segmentos

Observa en la columna izquierda ***"Vista Algebraica"*** que automáticamente se muestran las longitudes de los segmentos.


Figura 9

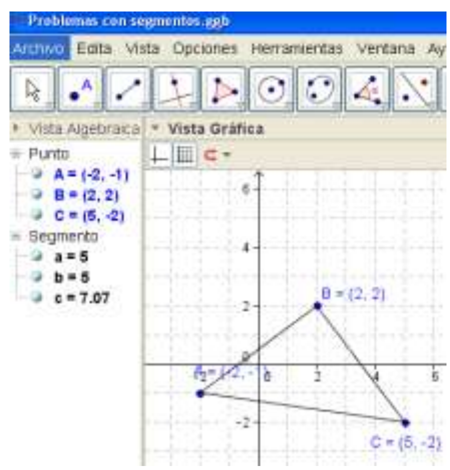



Figura 10

En la parte inferior se encuentra la región de captura, ***"Entrada"***, donde se introducen las expresiones que se desean manipular, 

, en este caso introducimos las letras de los segmentos que se muestran arriba en la misma columna (ver figura). Al dar **"*enter*"** aparece en la vista algebraica una etiqueta que dice ***"Número"*** con valor ***d = 17.07*** Que corresponde al perímetro del triángulo (ver figura 11).

Un ambiente ya elaborado para que explores otros ejercicios con solo mover los puntos, se tiene abriendo el archivo ***3 Áreas y perímetros.ggb*** (ver figura 12)

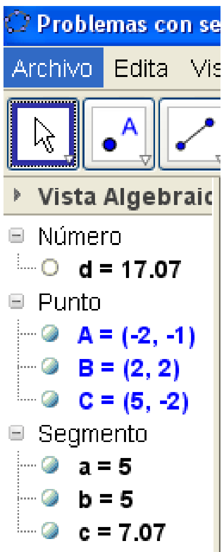



Figura 11

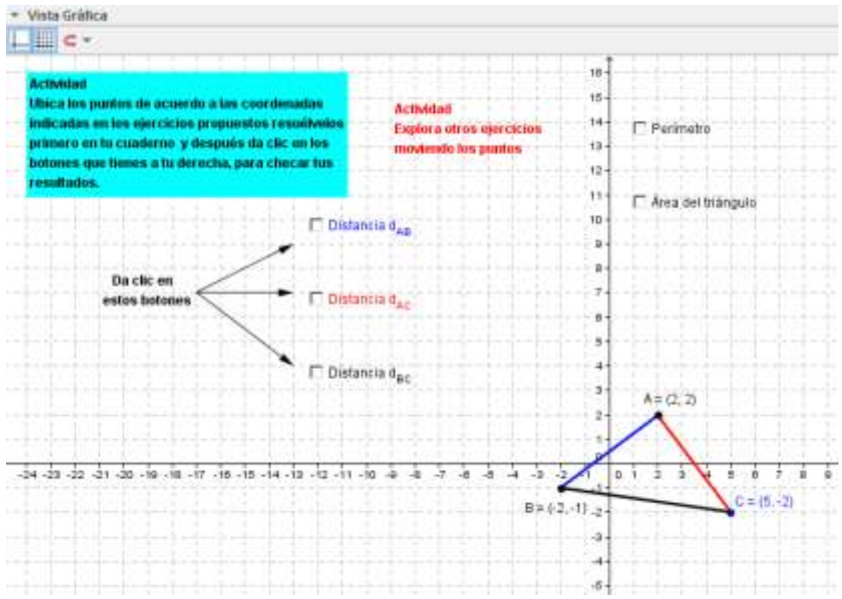



Figura 12

Dando clic en los botones se muestra el desarrollo de los ejercicios y su resultado (ver figura 13)

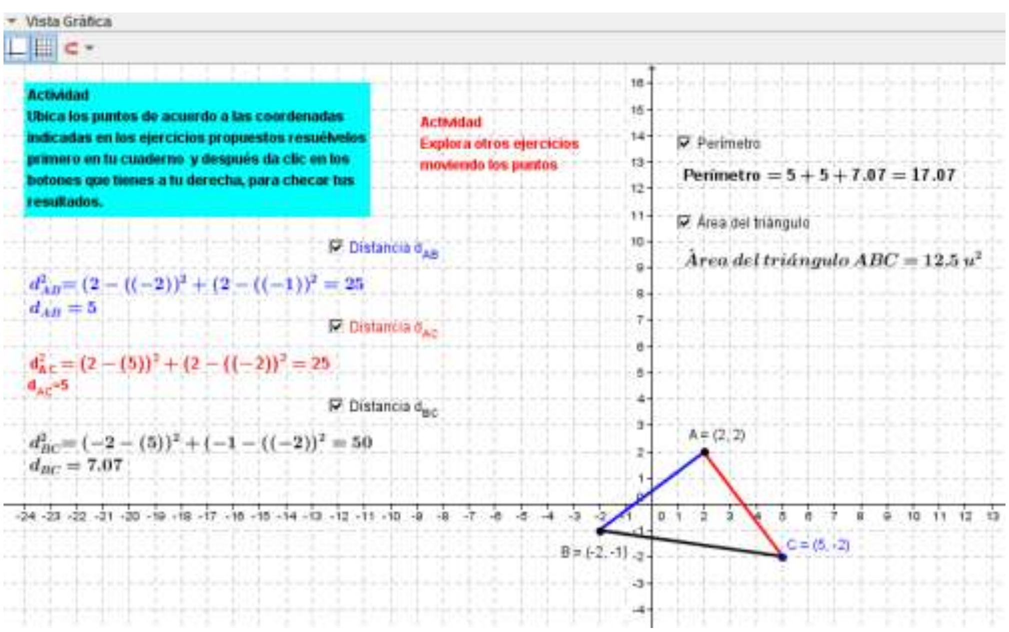



Figura 13

**Ejercicios**

Te puedes apoyar en el ambiente anterior como ayuda para resolver los siguientes problemas.

1.- Demostrar que los puntos (-2, -1), (2, 2), (5, -2), son los vértices de un triángulo isósceles.

2.- Demostrar que los tres puntos (2, -2), (-8, 4), (5, 3), son los vértices de un triángulo rectángulo y hallar su área.

3.- Los vértices de un triángulo son *A* (3, 8), *B* (2, -1) y *C* (6. -1).Si *D* es el punto medio del lado *BC.* Calcular la longitud de la mediana *AD.*

4.- Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto (3, -2). Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada. (Dos soluciones).

## Sesión 4

## Concepto de pendiente. Ángulo de inclinación de un segmento.

### Concepto de pendiente

En el curso de Matemáticas I se estudió el tema de la variación directamente proporcional, en el que al graficar una función lineal se observa que la razón que existe entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas de dos puntos pertenecientes a la recta es siempre la misma lo cual corresponde a la tangente trigonométrica del ángulo que forma una línea horizontal con el segmento de la línea (ver figura 14 y 15).

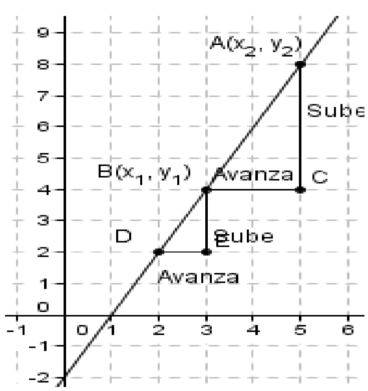



Figura 14

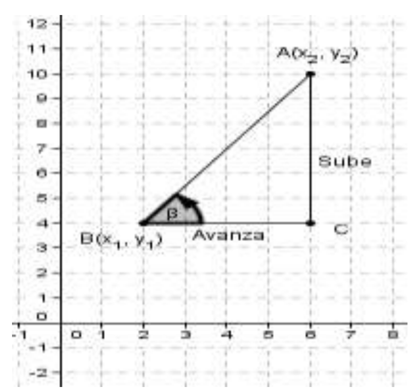



Figura 15

$$m = \tan\beta = \frac{cat.op.}{hip.} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{sube}{avanza}$$

A esta razón se le denomina pendiente y se simboliza con la letra ***m.***

Según la inclinación de una recta o segmento de recta, la pendiente se puede clasificar en positiva (**m > 0**) si la inclinación es menor de 90° o negativa (***m < 0***) si es mayor de 90° y menor de 180°. Si la recta o un segmento de recta es horizontal su ***m = 0*** y si es vertical ***m*** se dice que está indefinida debido a que el cateto adyacente del triángulo $\boldsymbol{x_2 - x_1 = 0}$**,** o sea queda cero en el denominador.

Ejemplo

Determina la pendiente de los segmentos que forman los lados del triángulo dado por los puntos

a) A(6, 10), B(2, 4) y C(6,4) (figura 16)

b) D(-3, 6), E(1, -4) y F(5, 2)

Desarrollo del ejemplo (a)

Aplicando la expresión anterior se tiene

$$m_{AB} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{sube}{avanza} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \qquad tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31°$$

$$m_{AC} = \frac{10-4}{6-6} = \frac{sube}{avanza} = \frac{6}{0} = indefinido \quad (vertical \quad \alpha = 90°)$$

$$m_{BC} = \frac{4-4}{6-2} = \frac{sube}{avanza} = \frac{0}{4} = 0 \quad (horizontal\ 0°)$$

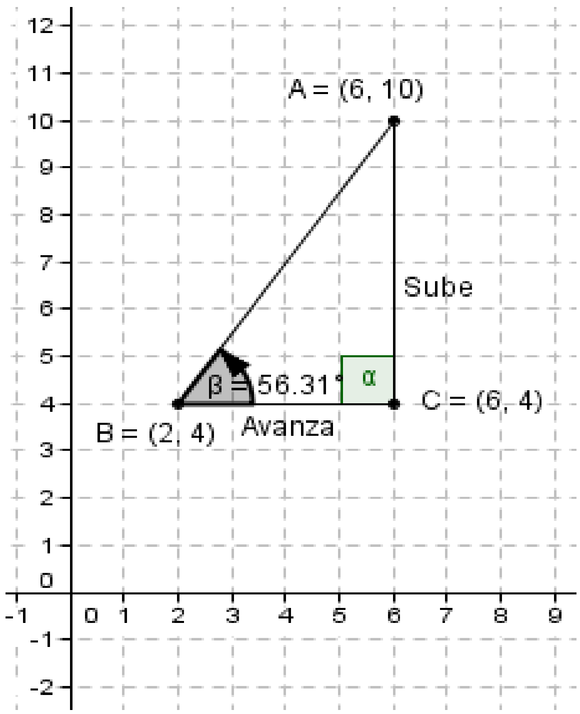



Figura 16

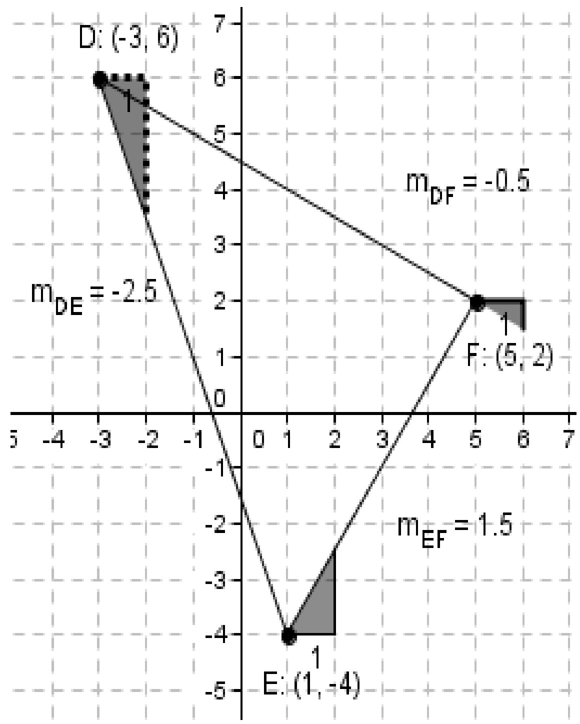



Figura 17

Desarrollo del ejemplo (b) (ver figura 17)

$$m_{DE} = \frac{6-(-4)}{-3-1} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}, \qquad tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right) = 111.80°$$

$$m_{DF} = \frac{6-2}{-3-5} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}, \qquad tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 153.43°$$

$$m_{EF} = \frac{-4-2}{1-5} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}, \qquad tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31°$$

**¡Ojo!** en los ejemplos anteriores no se está calculando los ángulos interiores del triángulo Sino la pendiente de los segmentos (inclinación respecto a una línea o segmento horizontal, ver figura 18)

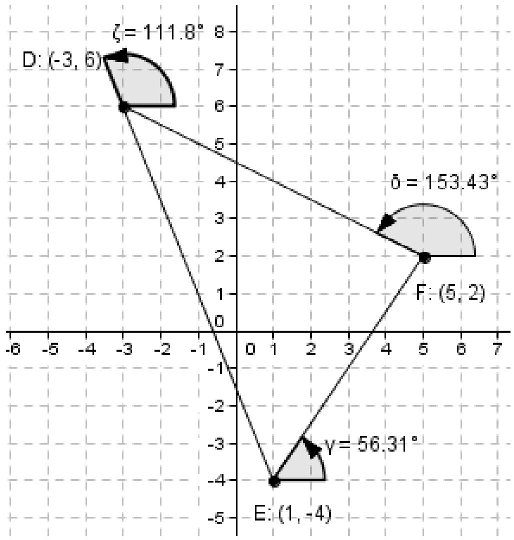



Figura 18

Ejercicios

1. Por medio de las pendientes demuéstrese que los tres puntos (6, -2), (2, 1) y (-2, 4) son colineales.

2. Demuestra que los tres puntos (2, 5), (8, -1) y (-2, 1) son los vértices de un triangulo rectángulo.

3. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de los lados de los triángulos formados por los siguientes puntos:

   Nota te puedes apoyar abriendo en el programa Geogebra. El archivo
   ***4 Segmentos y pendientes.ggb*** (ver figura 20).

   a) A(3,5), B(-2, -3) y C(5, 6)

   b) A(-1,-5), B(-2, 4) y C(5, 1)

   c) A(0,-2), B(4, 3) y C(5, -2)

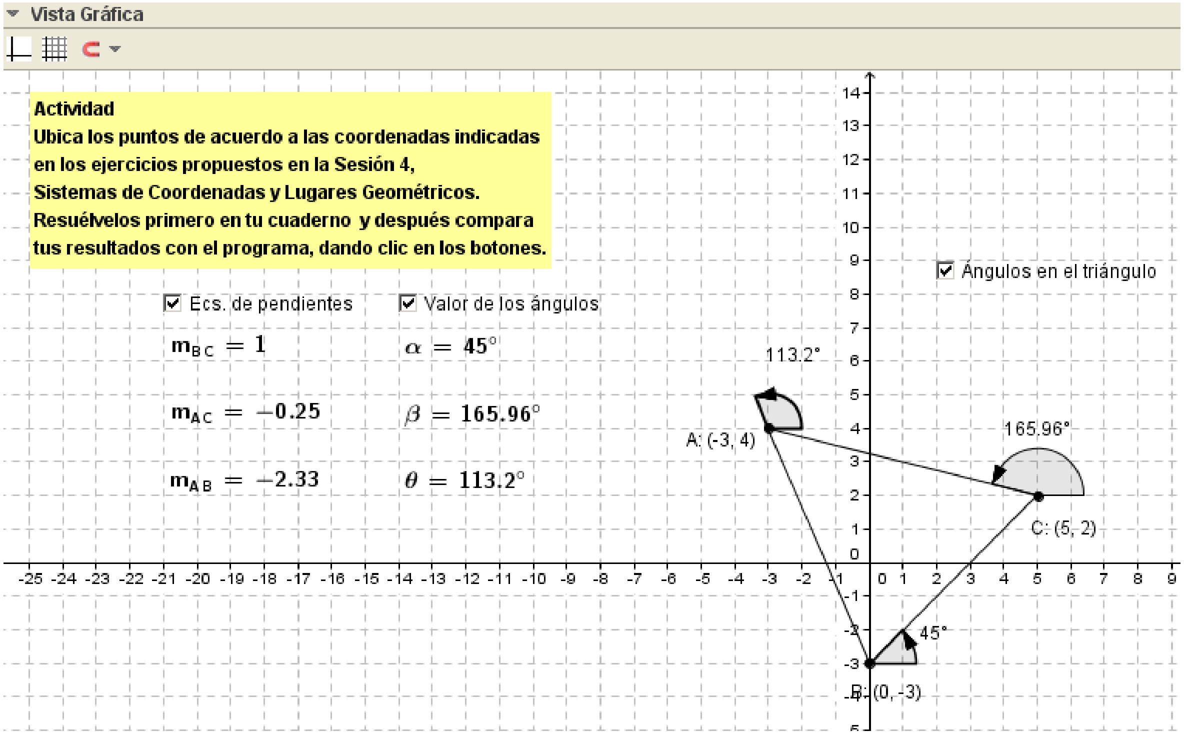



Figura 20

## Sesión 5

**Razón en que un segmento es dividido por uno de sus puntos.**

En el curso de matemáticas II se vieron los temas de semejanza y congruencia de triángulos, para ello se abordó el concepto de razón como la comparación de dos cantidades esto es, el valor que determina cuántas veces cabe una en la otra.

En la siguiente comparación $r = \frac{12}{3} = 4$ se tiene que el 3 cabe 4 veces en 12, concepto que hemos utilizado desde la primaria con la siguiente notación $3\overline{)12}$=4

En geometría analítica el tema se desarrolla de la siguiente forma

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento $P_1P_2$, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ son

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad con\ r \neq -1$$

Las cuales son sencillas de obtener de la siguiente figura 21

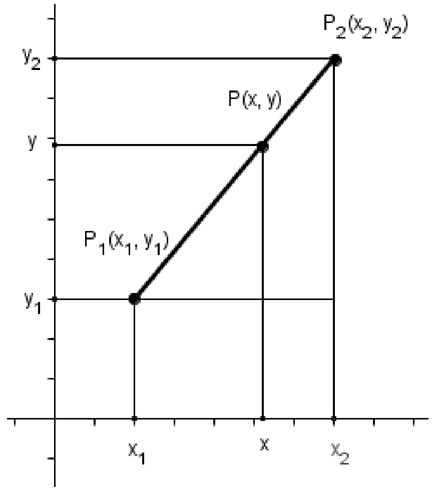



Figura 21

$$r = \frac{\overline{x_1 x}}{\overline{x x_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

De la ecuación anterior se tiene

$$(x_2 - x)r = x - x_1$$

Distribuyendo r

$$-xr - x = -x_1 - x_2 r$$

Multiplicando por menos ambos lados de la ecuación, factorizando y despejando x

Se tiene

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \quad con\ r \neq -1$$

En forma similar se obtiene

$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r} \quad con\ r \neq -1$$

El punto que divide al segmento en dos partes iguales es el punto medio esto es,

$r = \frac{\overline{P_1 P}}{\overline{P P_2}} = 1$ (la razón es igual a uno).

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores ***r=1***

Se tienen las expresiones para obtener las coordenadas del punto medio

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplos

1. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos (-2, 3) y (6, -3)

Solución

Para apoyarte en la solución abre el archivo ***5 Dividir un segmento en una razón dada.ggb*** con el programa Geogebra y sigue las indicaciones (ver figura)

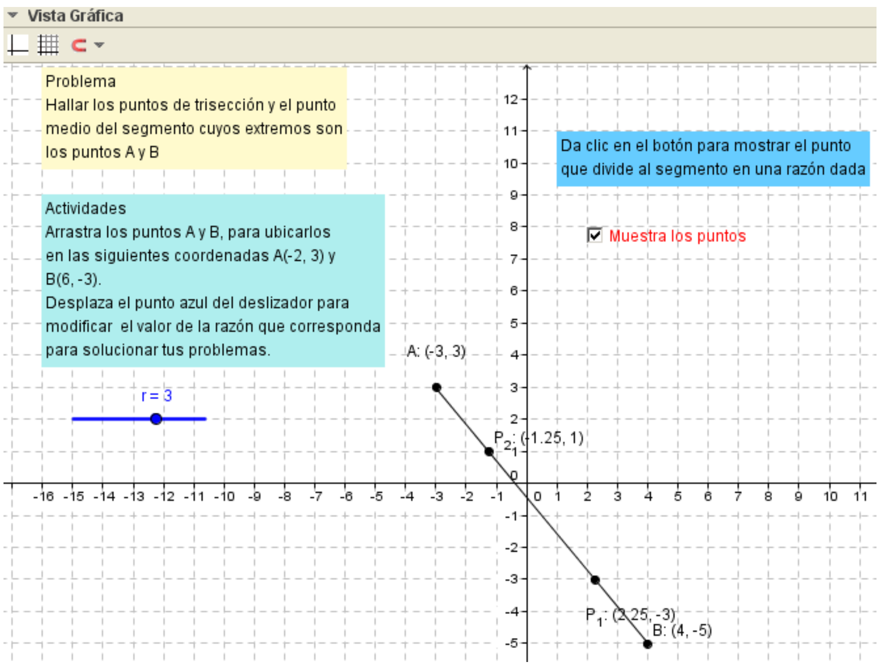



Figura 22

**Sesión 6**

2. Los puntos medios de los lados de un triángulo son (2, 5), (4, 2) y (1, 1). Hallar las coordenadas de los tres vértices.

Solución

Etiquetando los puntos por A(2, 5), B(4, 2), C(1, 1) y sustituyendo en las expresiones del punto medio

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Se tiene para el punto A(2, 5)

$$2 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad 5 = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

Para el punto B(4, 2)

$$4 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad 2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Para el punto C(1, 1)

$$1 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad 1 = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

De las expresiones anteriores, se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para las abscisas y lo mismo para las ordenadas

$$x_1 + x_3 = 4, \qquad y_1 + y_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 8, \qquad y_1 + y_2 = 4$$

$$x_1 + x_3 = 2, \qquad 1y_1 + y_3 = 2$$

Donde la solución es $x_1 = 5$, $y_1 = 6$ para el punto D

$X_2 = 3$, $y_1 = -2$ para el punto E

$X_3 = -1$, $y_3 = 4$ para el punto F

Actividades

Abre con el programa Geogebra el archivo ***6 Dados los puntos medios obtener el triángulo.ggb*** y sigue las indicaciones. (ver figuras 23, 24 y 25)

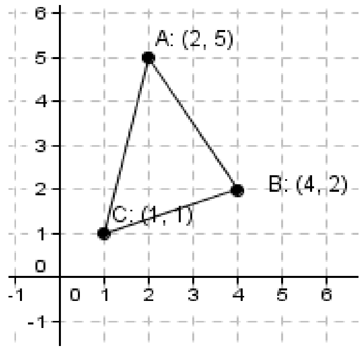



Figura 23

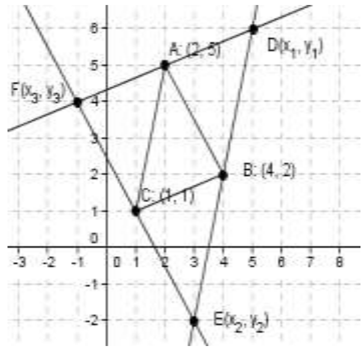



Figura 24

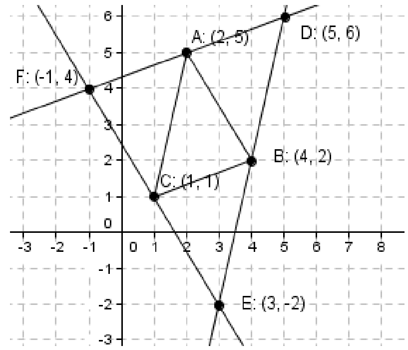



Figura 25

Ejercicios

1. Determina los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales donde A(-2, 3) y B(6, -3).

2. Los vértices de un triángulo son *A* (3, 8), *B* (2, -1) y *C* (6. -1). Si *D* es el punto medio del lado BC. Calcular la longitud de la mediana AD.

**Sesión 7**

**Lugares geométricos sencillos que dan lugar a rectas, circunferencias y parábolas.**

En Geometría analítica se plantean dos problemas fundamentales, que son:

1. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la grafica correspondiente.

2. Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Estos problemas son esencialmente inversos entre si. Estrictamente hablando sin embargo, ambos problemas están tan estrechamente relacionados que ***constituyen juntos el problema fundamental de toda la Geometría analítica***. Veremos más adelante que, después de obtener la ecuación para una condición geométrica dada, es posible, frecuentemente, determinar por un estudio de esta ecuación posteriores características geométricas y propiedades para la condición dada.

Primer problema fundamental. Gráfica de una ecuación.

Supongamos que se nos da una ecuación de dos variables, ***x*** y ***y*** que podemos escribirla, brevemente, como:

$$f(x, y) = 0$$

Una parte de la Geometría Analítica estudia los lugares geométricos utilizando las ecuaciones que los representan y viceversa, si se conoce un lugar geométrico se obtiene su ecuación.

En general, hay un número infinito de pares de valores de **x** y **y** que satisfacen esta ecuación. Cada uno de tales pares de valores ***reales*** se toma como las ***coordenadas* (x, *y) de un punto en el plano.*** Este convenio es la base de la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 1** El conjunto de los puntos, y ***solamente*** de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación anterior, se llama ***gráfica de la ecuación*** o, bien, su ***lugar geométrico.***

Otro concepto importante está dado por la

**DEFINICIÓN 2** Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación anterior ***pertenece a la gráfica de la ecuación.***

Lo importante es que si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, ese punto pertenece a la gráfica de esa ecuación y, recíprocamente si un punto está sobre la gráfica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación. Esto es, evidentemente, el enunciado de una condición necesaria y suficiente como las coordenadas de los puntos de un lugar geométrico están restringidas por su ecuación tales puntos estarán localizados, en general, en posiciones tales que, tomadas en conjunto, formen un trazo definido llamado curva, gráfica, o lugar geométrico.

En otras palabras se denomina Lugar Geométrico al conjunto de puntos en el plano que satisfacen una ecuación.

Se debe tener en cuenta que no toda ecuación (en los números reales) tiene una gráfica. Por ejemplo

$$x^2 + y^2 + 4 = 0$$

En esta ecuación no hay valores reales que tomen ***x*** o ***y*** y que cumplan con la igualdad.

Por esto no se puede trazar ningún punto cuyas coordenadas satisfagan esta ecuación, ya que estamos restringidos a puntos cuyas coordenadas sean ambas números reales

Se dice entonces que la ecuación anterior no tiene gráfica en el sistema coordenado rectangular real.

**Lugares geométricos que dan lugar a rectas**

Ejemplo

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se encuentran de tal forma que siempre equidistan (igual distancia) de dos puntos dados A (-1, 2) y B(4, -1). Te puedes apoyar abriendo el archivo ***7 Lugar geométrico Mediatriz.ggb***

Solución

Sea P(x, y) de la condición se tiene $d_{PA} = d_{PB}$

Expresando la condición mediante las fórmulas de distancia

$$d_{PA} = \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-2)^2} = d_{PB} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-(-1))^2}$$

$$\sqrt{(x-(-1))^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-(-1))^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad se tiene

$$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-(-1))^2$$

Desarrollando los binomios y simplificando obtenemos

$$5x - 3y - 6 = 0$$

Que representa una recta tema visto en el curso de matemáticas I (ver figura 26) y, en matemáticas II cuando se trató el tema construcciones básicas con regla y compás como la mediatriz de un segmento (AB).

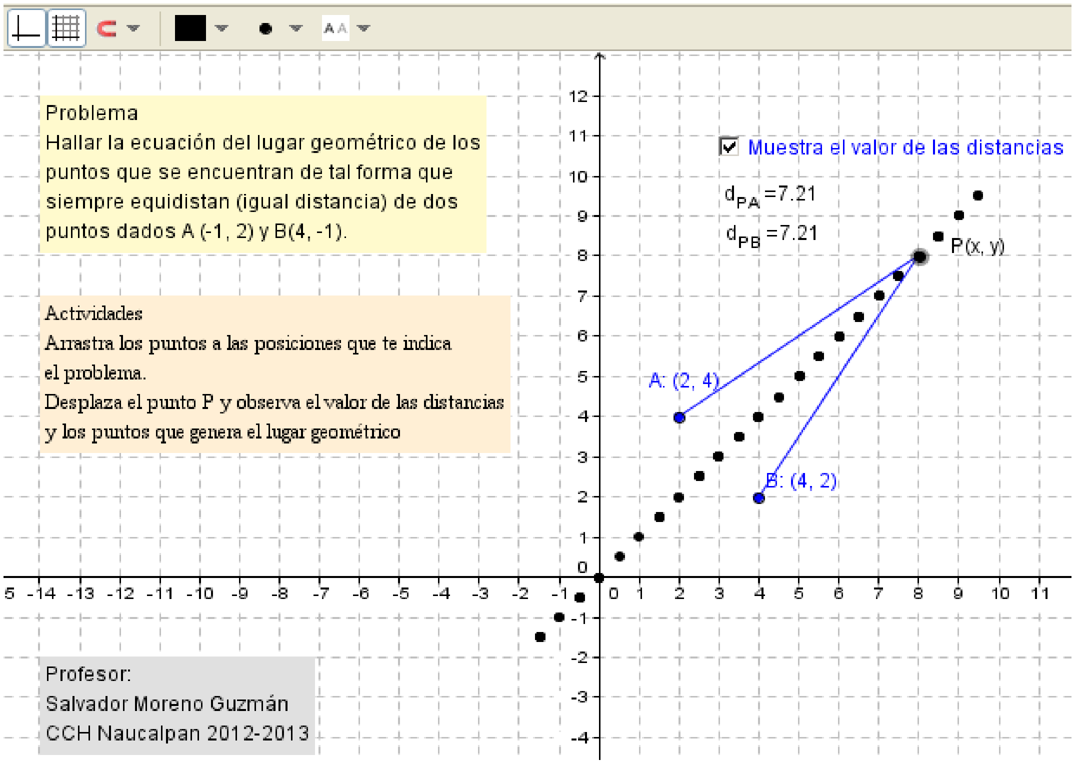



Figura 26

2. Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que cumplen que su distancia al origen es siempre igual a 3.

Solución

Consideramos un punto P(x, y) que cumpla la condición y aplicando la fórmula de distancia se tiene

$$d_{OP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3$$

Elevando al cuadrado

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

Al despejar ***y*** y tabular algunos valores comprendidos entre 0 y 3, se tienen dos expresiones

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

| x | -3 | -2 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | $\pm\sqrt{5}$ | $\pm 3$ | $\pm\sqrt{5}$ | 0 |

Que proporcionan el siguiente lugar geométrico

Una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 3 (ver figura 27)

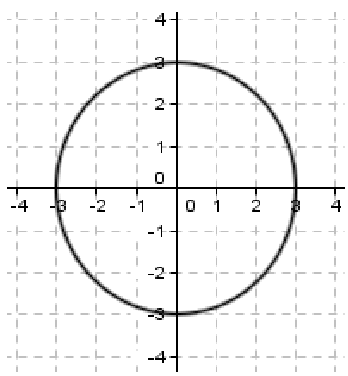



Figura 27

**Sesión 8**

Obtención del Lugar Geométrico y la ecuación de una Parábola.

Esta estrategia tiene la intención de obtener el lugar geométrico y la ecuación de la Parábola.

El tema será tratamiento en forma más amplia en la unidad 5.

Ejemplo

Determinar el lugar geométrico del conjunto de puntos que se encuentran en un plano de tal forma que la distancia de un punto P(x, y) a un punto fijo llamado foco es igual a la distancia a una recta fija llamada directriz (ver figura 28).

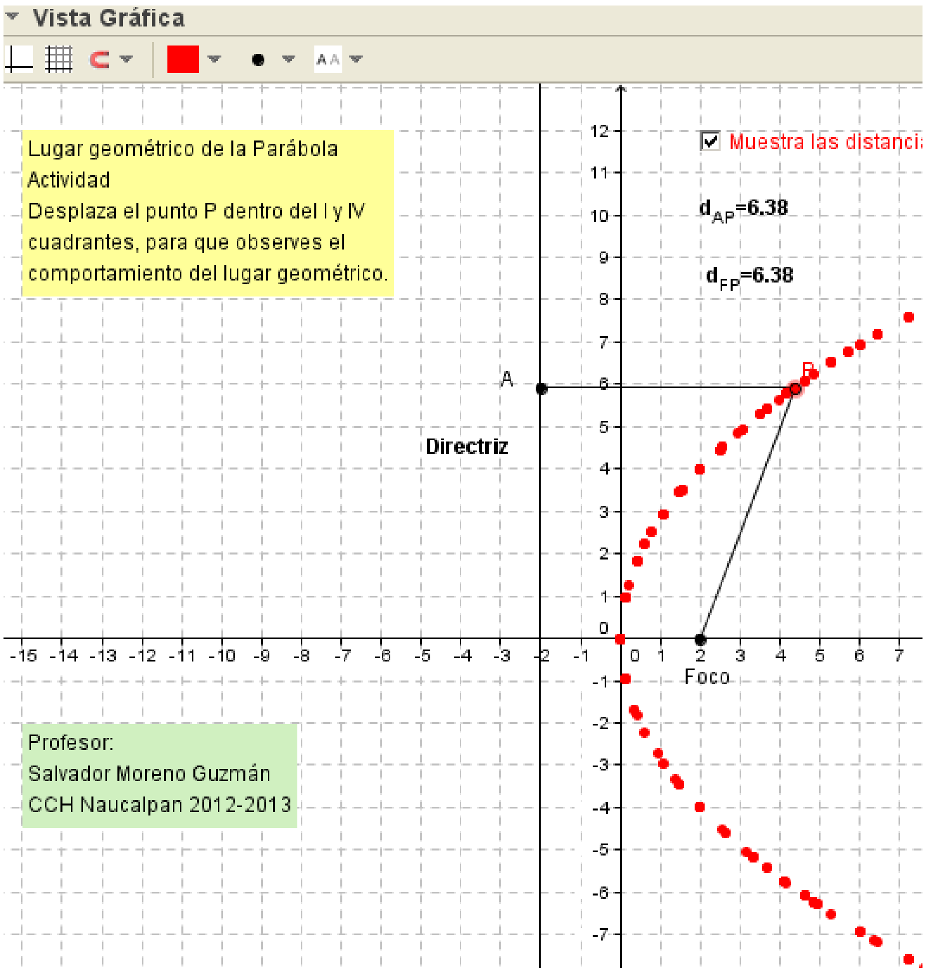



Figura 28

Simbolizando, en forma algebraica, la condición que deben de cumplir los puntos en el plano se tiene

$$d_{PA} = d_{PF}$$

$$\sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando

$$(x+p)^2 + (0)^2 = (x-p)^2 + (y)^2$$

Desarrollando los binomios y simplificando se tiene

$$2px = -2px + y^2$$

Simplificando

$$y^2 = 4px$$

Que es la ecuación de la parábola la cual se estudiará en la unidad 5 (ver figura 29)

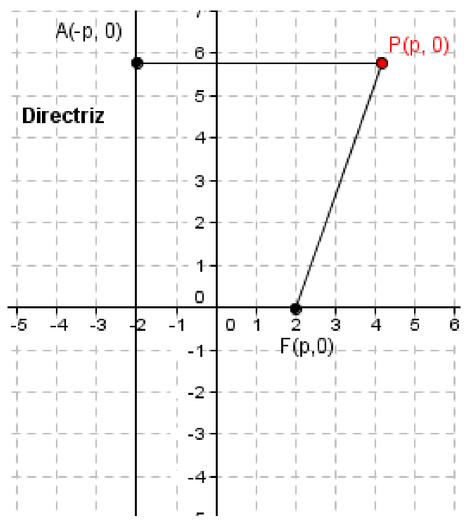



Figura 29

**Sesión 9**

**Intersecciones entre lugares geométricos o con los ejes cartesianos.**

**Intersección de una recta y una circunferencia**

En este tema es conveniente tomar la aclaración que hace Charles H. Lehmann en su libro de geometría analítica sobre los conceptos de las palabras intercepciones e intersecciones (página 34, reimpresión 1972).

***Definiciones*** *llamaremos* ***intercepción*** *de una curva con el eje X a la abscisa del punto de intersección de la curva con el eje. Análogamente, la intercepción con el eje Y es la ordenada del punto de intersección de la curva con dicho eje.*

*El método para obtener las intercepciones es evidente a partir de la definición. Como la intercepción con el eje X es la abscisa de un punto que está sobre el eje de las X, la ordenada de ese punto es cero.*

*Por tanto, haciendo* ***y*** *= 0 en la ecuación de la curva, las soluciones reales de la ecuación resultante en* ***x*** *nos darán las intercepciones con el eje de las X. Análogamente, haciendo en la ecuación* ***x*** *= 0, las soluciones reales de la ecuación resultante en* ***y*** *nos darán las intercepciones con el eje Y.*

*Muchos autores llaman intersecciones a las intercepciones sobrentendiendo que al decir punto de intersección se quiere indicar abscisa u ordenada del punto.*

En lo sucesivo se considerará el párrafo anterior esto es,

*Se llaman intersecciones a las intercepciones sobrentendiendo que al decir punto de intersección se quiere indicar abscisa u ordenada del punto.*

Ejemplos

Determina los puntos que son las intersecciones de los lugares geométricos dados por sus ecuaciones

a) $y = x^3 - 8x^2 + 15x$

Para **y=0**

$$x^3 - 8x^2 + 15x = 0$$

Factorizando

$$x(x-3)(x-5) = 0$$

Las raíces son x = 0, 3, 5

Por lo tanto las intersecciones con el eje X son 0, 3, 5

Para **x = 0** se tiene **y = 0** al hacer la gráfica sea tabulando o con el programa Geogebra se tiene la figura30.

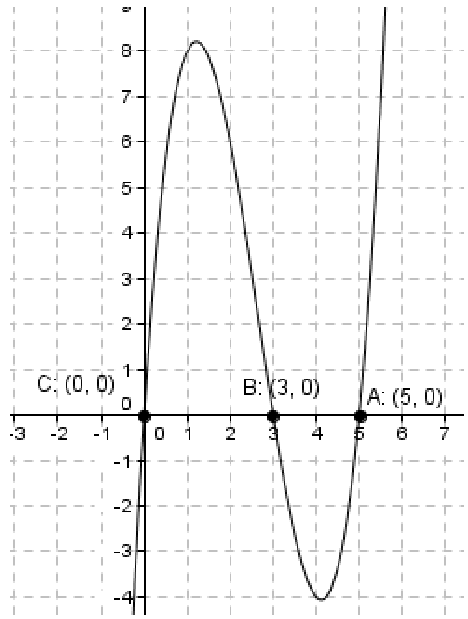



Figura 30

b) $y = \ x^4 - 10x^2 + 9$

si **y = 0**

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Factorizando

$$(x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1) = 0$$

Las intersecciones con el eje X son las raíces de la ecuación x = -3, 3, -1, 1

Si **x= 0** queda **y = 9** por lo que la intersección con el eje y es **9**

Graficando la expresión en Geogebra se tiene la figura 31.

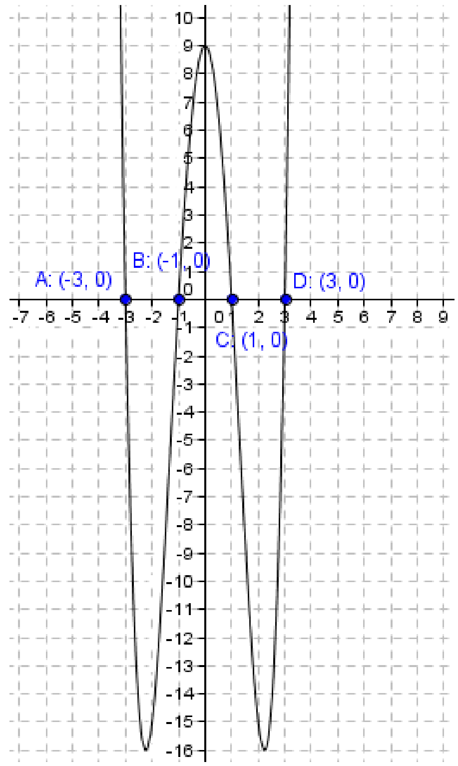



Figura 31

Intersecciones entre lugares geométricos o con los ejes cartesianos.

Intersección de una recta y una parábola

Intersecciones de curvas. Consideremos dos ecuaciones independientes

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

$$g(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Si sus gráficas se cortan en uno o ambos puntos, cada uno de estos puntos se llama *punto de intersección.* Como un punto de intersección de dos curvas (1) y (2) está sobre cada *una* de dichas curvas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, *ambas* ecuaciones (1) y (2), de acuerdo a la interpretación analítica de un punto de intersección, es un punto cuyas coordenadas representan una *solución común* de las ecuaciones (1) y (2).

Ejemplo. Hallar analíticamente, los puntos de intersección de las dos curvas cuyas ecuaciones son

$$2x + y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$y^2 - 4x = 0 \qquad (2)$$

Despejando **y** de (1) y sustituyendo en (2) se tiene

$$(4 - 2x)^2 - 4x = 0$$

Desarrollando el binomio y simplificando

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Factorizando

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

Cuyas raíces son x= 1, 4

Sustituyendo x = 1 en (1) se tiene y = 2 para x = 4 se tiene y = -4

De esta forma los puntos de intersección son (1, 2) y (4, -4)

Actividad

Utiliza el programa Geogebra para realizar las (gráficas ver figura 32)

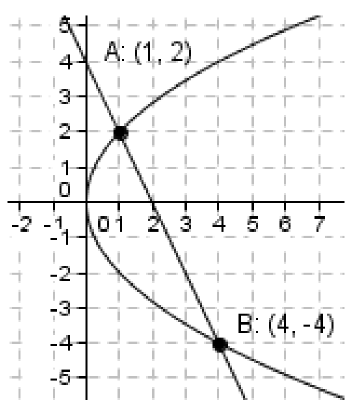



Figura 32

Propuesta de auto evaluación

1. Grafica los siguientes puntos:

a) A(-3, 2) b) B(0, 0) c) C(3, 135°) d) D(-3, -5°)

2. Transforma las siguientes coordenadas:

a) (-1,4) a coordenadas polares

b) (3,15°) a coordenadas rectangulares

3. Obtén la medida del lado AC del triángulo cuyos vértices son los puntos A(-1, -2), B(3, 2) y C(0, 6).

4. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento cuyos extremos son los puntos A(-2,4) y B(5,0).

5. ¿Cuál es la pendiente y el ángulo de inclinación del segmento cuyos extremos son los puntos P(-4,4) y Q (7,-2)?

6. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen que su abscisa es siempre igual a -1?

7. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen que su ordenada es siempre igual a 4?

8. ¿Cuál es la ecuación del siguiente lugar geométrico de la gráfica que se muestra en la figura 33?

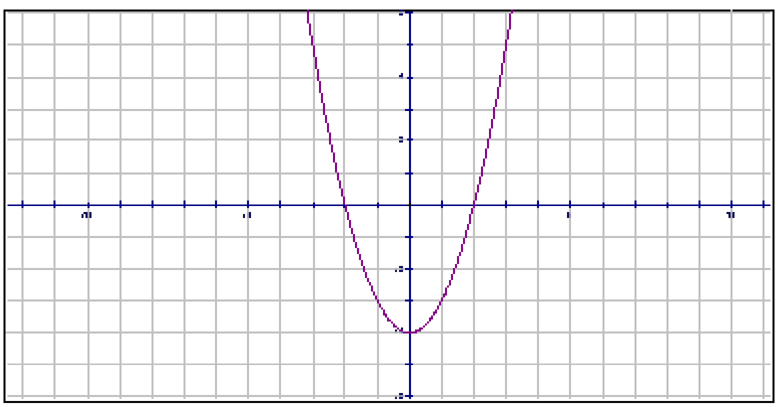


Figura 33

9. ¿Cuáles son las intersecciones de la función $y = 3x + 1$ , con ambos ejes cartesianos?

10. Obtén las intersecciones de los lugares geométricos cuyas ecuaciones son:
$y = x^2$, $y = 2x+4$

**Bibliografía**


1. Leithold, Louis. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México, Harla, 1994

2. Lehmann, Charles. Geometría analítica. Editorial Limusa. Decimotercera reimpresión: 1989

3. Sullivan, Michael. Precálculo. México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997

4. Swokowski, Earl. Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2002

5. Programa libre de matemáticas GeoGebra para apoyo de los procesos de la enseñanza-aprendizaje.

6. Salcedo Martínez. Sofía Blanca Estela, Matemáticas III, Unidad 2: Sistemas de Coordenadas y Lugares Geométricos. Material didáctico de apoyo al subprograma de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas. CCH UNAM. Junio de 2009.