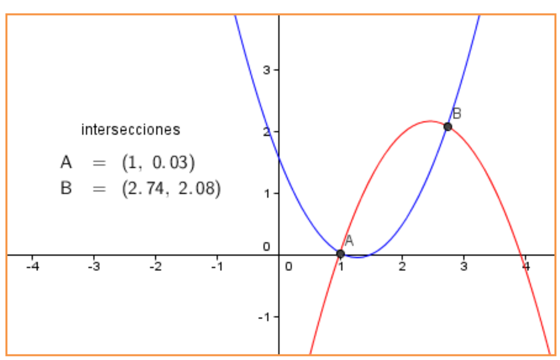
UNIDAD 1

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno:

- Reconoce cuando un sistema de ecuaciones es lineal o no, y cuáles son sus incógnitas.
- Aplica el método gráfico para explicar a partir de una gráfica, que significa que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones.
- Recuerda el método de reducción para resolver sistemas de ecuaciones 2x2 y su extensión a un sistema de 3x3.
- Aplica el método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas.
- Resuelve problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.



APRENDIZAJES

El alumno

1. Reconoce cuándo un sistema de ecuaciones es lineal o no, y cuáles son sus incógnitas.

2. Recuerda el método de reducción para resolver un sistema de ecuaciones 2x2, y comprende la forma en que se extiende a un sistema 3x3.

3. Reafirma el concepto de sistemas equivalentes y entiende que en los métodos algebraicos de resolución de un sistema de ecuaciones se recurre a transformarlos a sistemas equivalentes de mayor simplicidad, hasta llegar a alguno que contiene una ecuación con una sola incógnita. Con ello, reafirma la estrategia matemática de convertir una situación desconocida o difícil, a otra conocida o más simple.

4. Distingue cuando un sistema de ecuaciones 3x3 o 4x4, está escrito en forma triangular y explica qué ventajas aporta esta forma para resolverlo.

5. Dado un sistema de ecuaciones lineales 3x3, utiliza el método de suma y resta para transformarlo a la forma triangular, y a partir de ahí, obtiene su solución.

6. A través de la última ecuación de un sistema de ecuaciones escrito en forma triangular, identifica si éste es compatible o no, así como si es dependiente o no.

7. En el caso de sistemas 2x2, ya sea que ambas ecuaciones sean lineales o incluyan cuadráticas, explica que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones.

8. Para sistemas de ecuaciones 2x2 con ambas ecuaciones cuadráticas (dos parábolas, dos circunferencias, o una y una), traza un bosquejo que ilustre cómo están colocadas las gráficas y, en consecuencia, cuántas soluciones tendrá el sistema.

9. Aplica el método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones en los que una de ellas o ambas son cuadráticas.

10. Aprecia que el álgebra es útil para obtener información acerca del comportamiento de algunos objetos matemáticos, como es el caso de saber si dos gráficas se intersectan o no, cuántas veces y en dónde.

11. Resuelve problemas que involucren sistemas de ecuaciones de los tipos estudiados en esta unidad, e interpreta el sentido de la solución hallada.

OBSERVACIÓN

Se recomienda utilizar la aplicación que viene con esta Unidad, elaborada con el "software" Geogebra, para resolver los sistemas de ecuaciones que aparecen en ella.

CONTENIDO **Pág.**

UNIDAD 1. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES………………… 5

1.1 **SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES……………..** 5

1.1.1. Solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ……….. 5

Solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico………………………………………………………………………………. 5

Solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el métodos de eliminación por suma y resta………………………………….. 10

Solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución…………………………………………………… 13

1.1.2. Resolución de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas........ 15

Solución de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por el métodos de eliminación por suma y resta………………………………….. 15

Solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por el método de sustitución…………………………………….. 18

1.2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES……… 20

1.2.1. Solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en donde las incógnitas son cuadráticas……………………………………. 20

1.2.2. Solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en donde una ecuación es lineal y la otra cuadrática…………………….. 22

1.3 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN SISTEMAS DE ECUACIONES……………………………………………………………………... 24

1.4 EJERCICIOS …………………………………………………………………. 28

UNIDAD 1. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

En la vida real resulta necesario trabajar de manera simultánea con la solución de más de una ecuación, en donde aparece más de una incógnita.

1.1 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.1.1. SOLUCIÓN DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

La forma general en que se presenta un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se tiene los métodos: gráfico, eliminación por suma o resta, sustitución, igualación, etc.

En este curso veremos solamente los métodos gráficos, eliminación por suma o resta y sustitución.

SOLUCIÓN DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS POR EL MÉTODO GRÁFICO.

Para el método gráfico resulta conveniente el uso de algún paquete de cómputo para que el alumno pueda visualizar de manera más amena las diferentes soluciones que se pueden presentar.

El procedimiento analítico para el método grafico es como sigue: se despeja la variable “y” en ambas ecuaciones obteniéndose:

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

$$y = \frac{f - dx}{e}$$

Las cuales al graficarse nos dan rectas que nos muestran las siguientes alternativas de solución:

1. Si las rectas se cruzan en un punto, el sistema tiene solución única.

2. Si las rectas quedan encimadas el sistema tiene una infinidad de soluciones.

3. Si las rectas quedan paralelas el sistema no tiene solución.

Veamos un ejemplo para cada una de las alternativas de solución:

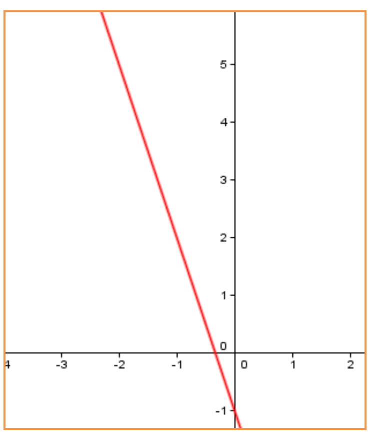
Resolver

$$\begin{array}{rcrcrl} 6x & + & 2y & = & -2 & \ldots(1) \\ -4x & + & y & = & 6 & \ldots(2) \end{array}$$

Despejando de (1) y (2) la "y", obtenemos:

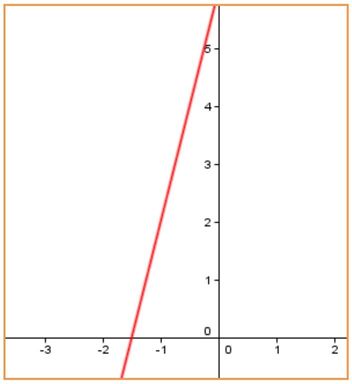
y = -1 – 3x …(3)

Cuya gráfica es:

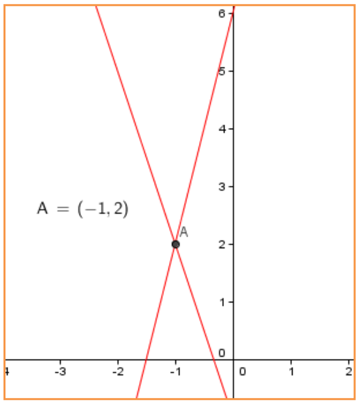


y = 6 + 4x …(4)

Cuya gráfica es:



Encontrándose la intersección de ellas en:



Concluyendo con esto que la solución única es x = -1   y   y = 2

Resolver

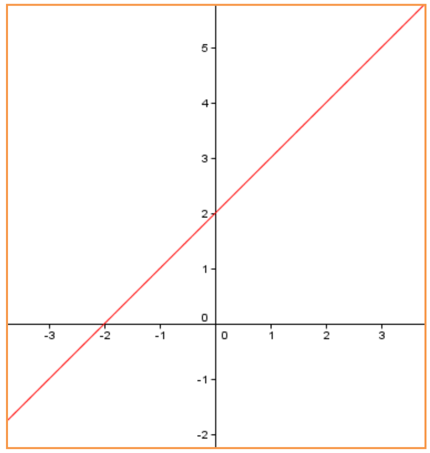
$$x \quad - \quad y \quad = \quad -2 \quad \ldots(1)$$

$$-4x \quad + \quad 4y \quad = \quad 6 \quad \ldots(2)$$

Despejando de (1) y (2) la "y", obtenemos:

$$y = x + 2 \quad \ldots(3)$$

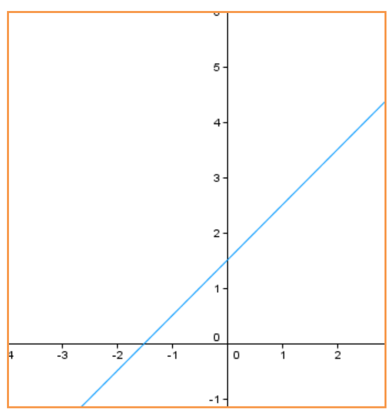
Cuya gráfica es:



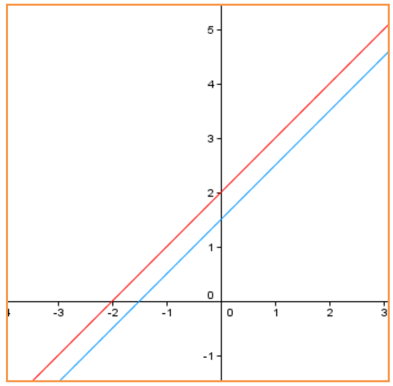
Despejando de (1) y (2) la "y", obtenemos:

$$y=\frac{4x+6}{4} \quad \ldots(4)$$

Cuya gráfica es:



Observándose que las rectas son paralelas como se muestra en la figura siguiente:



Por lo tanto se concluye que el sistema no tiene solución.

Resolver

$$3x \quad + \quad y \quad = \quad -1 \quad \ldots(1)$$

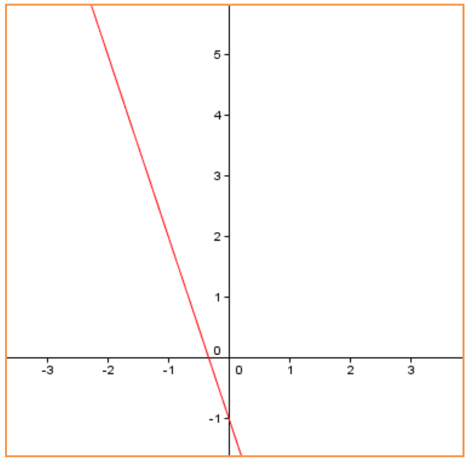
$$6x \quad + \quad 2y \quad = \quad -2 \quad \ldots(2)$$

Despejando de (1) y (2) la "y", obtenemos:

$$y = -1 - 3x \quad \ldots(3)$$

$$y = \frac{-2 - 6x}{2} = -1 - 3x \ \ldots(4)$$

Observando que las ecuaciones son equivalentes, es decir que al dividir la ecuación (2) entre dos se obtiene la ecuación (1), por lo cual se observa que la gráfica correspondiente serían dos recta encimadas como se muestra enseguida:



Por lo cual se concluye que cualquier punto (x , y) sobre la recta es solución del sistema planteado, por lo tanto el sistema tiene una infinidad de soluciones.

SOLUCIÓN DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS POR EL MÉTODOS DE ELIMINACIÓN POR SUMA Y RESTA

Para el método de eliminación por suma o resta se procede como sigue:
Se elige la incógnita a eliminar, para lo cual se multiplican las ecuaciones por un factor adecuado para que queden los coeficientes de la incógnita a eliminar, iguales, enseguida se suman o resta las ecuaciones resultantes para eliminar la incógnita deseada. Se despeja la incógnita que queda de la ecuación resultante.

Por ejemplo eliminar “y”

$$ax + by = c \quad se\ multiplica\ por\ e$$

$$dx + ey = f \quad se\ multiplica\ por\ b$$

Obteniéndose:

$$aex + bey = ce$$

$$dbx + eby = fb$$

Restando las ecuaciones obtenemos:

aex – bdx = ce – bf

factorizando x tenemos:

(ae – bd)x = ce – bf

De donde

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación tenemos:

$$a(\frac{ce - bf}{ae - bd}) + by = c$$

De donde al despejar “y” obtenemos:

$$by = c - a(\frac{ce - bf}{ae - bd})$$

$$y = \frac{c - a(\frac{ce - bf}{ae - bd})}{b}$$

Aplicando pasos algebraicos se deduce:

$$y = \frac{\frac{ace - bcd - ace + abf}{ae - bd}}{b}$$

$$y = \frac{\frac{abf - bcd}{ae - bd}}{b}$$

$$y = \frac{\frac{b(af - cd)}{ae - bd}}{b}$$

$$y = \frac{b(af - cd)}{b(ae - bd)}$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Veamos un caso particular:

Resolver por el método de eliminación por suma y resta el sistema de ecuaciones:

$$4x + 2y = 8 \quad \dots(1)$$

$$3x - 5y = -7 \quad \dots(2)$$

Nos proponemos eliminar la incógnita "y"

$$4x + 2y = 8 \quad se\ multiplica\ por\ 5$$

$$3x - 5y = -7 \quad se\ multiplica\ por\ 2$$

Obteniéndose

$$20x + 10y = 40 \quad \dots(3)$$

$$6x - 10y = -14 \quad \dots(4)$$

Sumamos las ecuaciones (3) y (4) obteniendo:

26 x = 26

x=1

Sustituyendo x=1 en la ecuación (1) tenemos:

4(1) + 2y = 8

Despejando "y" obtenemos:

$$y = \frac{8-4}{2}$$

y = 2

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

En el método de sustitución se despeja una de las variables de una de las ecuaciones del sistema y se sustituye en la otra ecuación, eliminándose de esta manera una de las incógnitas, se despeja la incógnita de la ecuación resultante y el valor obtenido se sustituye en el primer despeje realizado para encontrar el valor de la otra incógnita.

Veamos el caso general por sustitución

$$ax \quad + \quad by \quad = \quad c \quad \ldots(1)$$

$$dx \quad + \quad ey \quad = \quad f \quad \ldots(2)$$

Despejamos “y” de de (1), obteniéndose:

$$y = \frac{c - ax}{b} \ \ldots(3)$$

Sustituyendo este valor en (2) obtenemos:

$$dx + e(\frac{c - ax}{b}) = f$$

Aplicando el álgebra tenemos:

$$bdx + ec - aex = bf$$

$$x(bd - ae) = bf - ec$$

$$x = \frac{bf - ec}{bd - ae}$$

Es decir

$$x = \frac{ec - bf}{ae - bd} \ \ldots(4)$$

Sustituyendo (4) en (3) obtenemos:

$$y = \frac{c - a(\frac{ec - bf}{ae - bd})}{b}$$

simplificando

$$y = \frac{\frac{ace - bcd - ace + abf}{ae - bd}}{b}$$

$$y = \frac{abf - bcd}{b(ae - bd)}$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Que son las mismas expresiones obtenidas por el método de reducción por suma y resta.

Podemos afirmar que la solución general de los casos anteriores constituyen un método formal mejor conocido como método de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aunque que en la práctica se le suele llamar método de determinantes.
Veamos un caso particular para el método de sustitución:

Resolver el sistema de ecuaciones por el método de sustitución:

$$5x - 3y = 22 \quad \ldots(1)$$

$$3x + 4y = -10 \quad \ldots(2)$$

Despejamos x de (1) obteniendo

$$x = \frac{22 + 3y}{5} \quad \ldots(3)$$

Sustituyendo en (2) tenemos:

$$3(\frac{22+3y}{5})+4y=-10$$

Simplificando algebraicamente obtenemos:

66 + 9y + 20y = –50

29y = –50 – 66

$$y=\frac{-116}{29}=-4$$

y= –4

sustituyendo en (3) tenemos:

$$x=\frac{22+3(-4)}{5}$$

$$x\ =\ \frac{10}{5}=2$$

x = 2

Observación: para escoger la incógnita a despejar en el primer paso, se recomienda escoger la que no tiene signo negativo, para evitar posibles errores en el manejo algebraico.

1.1.2. RESOLUCIÓN DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS.

SOLUCIÓN DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS POR EL MÉTODOS DE ELIMINACIÓN POR SUMA Y RESTA

Para el caso de resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, el procedimiento a seguir con el método de reducción con suma y resta es el de eliminar una de las incógnitas utilizando dos de las ecuaciones, enseguida se elimina la misma incógnita utilizando otras dos ecuaciones, obteniéndose de esta manera dos ecuaciones con dos incógnitas, las cuales se resuelven como ya se hizo en el ejemplo anterior.

Por ejemplo

Resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por el método de Reducción por suma o resta.

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & y & + & 2z & = & -7 & \ldots(1) \\ 2x & + & y & - & 4z & = & -5 & \ldots(2) \\ 4x & + & 3y & + & z & = & 2 & \ldots(3) \end{array}$$

Se suman las ecuaciones (1) y (2) obteniéndose:

$$5x - 2z = -12 \quad \ldots(4)$$

Se multiplica la ecuación (2) por 3 y se resta la ecuación (3), obteniéndose

$$2x - 13z = -17 \quad \ldots(5)$$

Multiplicando la ecuación (4) por 2 y la ecuación (5) por -5 obtenemos:

$$10x - 4z = -24 \quad \ldots(6)$$
$$-10x + 65z = 85 \quad \ldots(7)$$

Sumando las ecuaciones (6) y (7) obtenemos:

$$61z = 61$$

Despejando z, obtenemos

$$z = \frac{61}{61} = 1$$

Por lo cual

z=1

Sustituyendo este valor en la ecuación (4) obtenemos:

5x – 2(1) = -12

$$x = \frac{-12 + 2}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

x = -2

Sustituyendo el valor de “x” y “z” en la ecuación (2)

Obtenemos

2(-2) + y – 4(1) = -5

y=-5 + 4 + 4

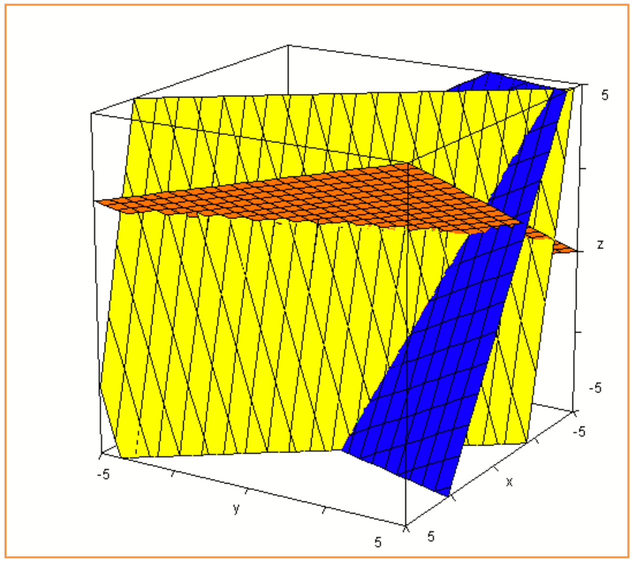
y= 3

Por lo tanto las soluciones son:

x = -2, y =3 y z = 1

Para el caso de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es necesario contar con un paquete de cómputo (por ejemplo el DERIVE) que pueda construir planos en el espacio para visualizar las diferentes alternativas de solución, lo cual resulta muy complicado mostrarlo en un pizarrón de manera manual.

La gráfica correspondiente a las tres ecuaciones dadas, construidas en el paquete de cómputo DERIVE es:



SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

Resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por el método de sustitución:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4x & + & 2y & + & 3z & = & 3 & \ldots(1) \\ 3x & - & 6y & + & 4z & = & 3 & \ldots(2) \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 & \ldots(3) \end{array}$$

Despejando x de (3) obtenemos

$$x = 1 - 2y - z \ldots (4)$$

Sustituyendo este valor en (1) y (2) obtenemos:

$$4(1 - 2y - z) + 2y + 3z = 3$$

$$3(1 - 2y - z) - 6y + 4z = 3$$

Simplificando tenemos

4 – 8y – 4z + 2y + 3z = 3

3 – 6y – 3z – 6y + 4z = 3

-6y – z = -1 …(5)

-12y + z = 0 …(6)

Sumando (5) y (6) obtenemos

-18y = -1

$$y = \frac{-1}{-18}$$

$$y = \frac{1}{18}$$

Sustituyendo este valor de “y” en (6) obtenemos

$$-12\left(\frac{1}{18}\right) + z = 0$$

Despejando z tenemos

$$z = \frac{12}{18}$$

$$z = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo el valor de “y” y “z” en (4) obtenemos

x= 1 – 2y – z … (4)

$$x = 1 - 2\left(\frac{1}{18}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$x = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{9}$$

Por lo tanto la solución del sistema es

$$x = \frac{2}{9}, \qquad y = \frac{1}{18}, \qquad z = \frac{2}{3}$$

1.2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, se recomienda el método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones.

Veamos los siguientes casos:

1.2.1 SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS EN DONDE LAS INCÓGNITAS SON CUADRÁTICAS.

Para este caso se puede realizar un “cambio de variable” para considerar las incógnitas cuadradas como una lineal y al final se despeja la expresión cuadrática.

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$2x^2 + 5y^2 = 13 \quad \dots(1)$$

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad \dots(2)$$

Despejamos x^2 de (2)

$$x^2 = 1 + 3y^2 \quad \dots(3)$$

Sustituimos en (1)

$$2(1 + 3y^2) + 5y^2 = 13$$

$$2 + 6y^2 + 5y^2 = 13$$

$$11y^2 = 13 – 2$$

$$y^2 = \frac{11}{11} = 1$$

$$y^2 = 1$$

Por lo cual

$$y = \pm\sqrt{1}$$

$$y = \pm 1$$

Sustituyendo el valor de y^2 en (3) obtenemos:

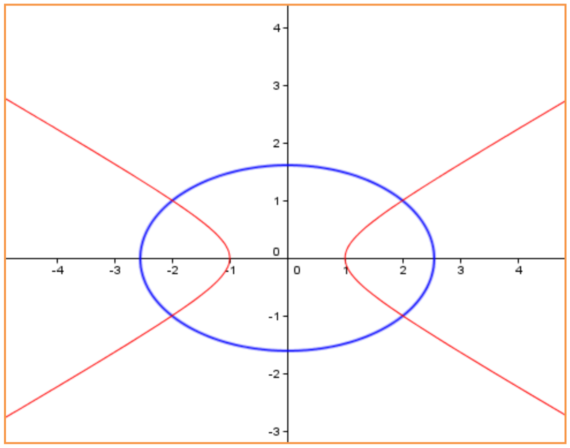
$$x^2 = 1 + 3(1)$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

La gráfica de estas ecuaciones usando el Geogebra queda como sigue:



Observación: En el caso de que el valor de las incógnitas sea un racional o un número irracional, no se debe escribir una aproximación con decimales, ya que ese valor no sería la solución del sistema, sino una simple aproximación.

1.2.2 SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS EN DONDE UNA ECUACIÓN ES LINEAL Y LA OTRA CUADRÁTICA.

Una ecuación es lineal y la otra es cuadrática.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & = & 5 & \ldots(1) \\ 2x^2 & - & y^2 & = & -7 & \ldots(2) \end{array}$$

Se despeja x en (1)

$$x = 5 - 2y \quad \ldots(3)$$

se sustituye en (2)

$$2(5 - 2y)^2 - y^2 = -7$$

Simplificando

$$50 - 40y + 8y^2 - y^2 = -7$$

$$7y^2 - 40y + 57 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática resultante

$$y = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4(7)(57)}}{2(7)}$$

$$y = \frac{40 \pm \sqrt{4}}{14}$$

$$y_1 = \frac{40 + 2}{14} = 3$$

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = \frac{38}{14} = \frac{19}{7}$$

$$y_2 = \frac{19}{7}$$

Sustituyendo estos valores en (3) tenemos

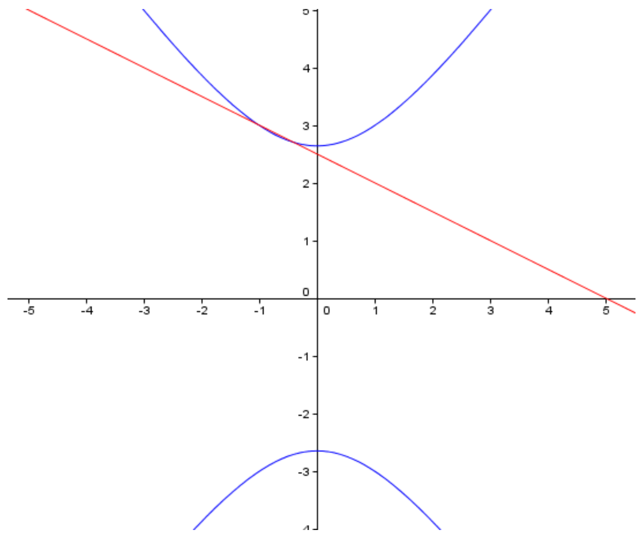
$$x_1 = 5 - 2(3) = 5 - 6 = -1$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 5 - 2(\frac{19}{7}) = 5 - \frac{38}{7} = \frac{-3}{7}$$

$$x_1 = \frac{-3}{7}$$

La gráfica de estas ecuaciones, con el paquete de cómputo Geogebra es:



Para escoger el método de solución de un sistema de ecuaciones, realmente depende de la manera en que se presenta el sistema de ecuaciones, ya que en algunos casos resulta directo aplicar uno de los métodos mencionados para encontrar la solución más rápidamente.

1.3. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. Un comerciante de tabaco mezcló un grado de tabaco que vale \$1.40 por libra con otro que vale \$1.80 por libra a fin de obtener 50 libras de una mezcla que vendió a \$ 1.56 por libra. ¿Qué peso de cada calidad fue empleado?.

Definimos las siguientes variables:

x= peso en libras del tabaco de \$ 1.40 empleado
y = peso en libras del tabaco de \$ 1.80 empleado

según los datos se debe tener

$$x + y = 50$$

$$1.40x + 1.80\,y = (1.56)(50)$$

es decir

El sistema de ecuaciones obtenido es

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & = & 50 & \dots(1) \\ 1.40x & + & 1.80y & = & 78 & \dots(2) \end{array}$$

Aplicando el método de sustitución obtenemos al despejar x de (1)

x = 50 – y …(3)

Sustituyendo en (2) obtenemos

1.40(50 – y) + 1.80y = 78

70 – 1.40y + 1.80y = 78

0.40y = 78 – 70

$$y = \frac{8}{0.40} = 20$$

y= 20

Sustituyendo el valor de y en (3) se tiene

x= 50 – 20 =30

Por lo tanto se sabe que el comerciante utilizó 30 libras del tabaco de $1.40 y 20 libras del tabaco de $1.80

2. La suma de tres ángulos de un triángulo es de 180°. La suma de dos de los ángulos es igual al tercer ángulo y la diferencia de los dos ángulos es igual a $\frac{2}{3}$ del tercer ángulo. Encuentre el valor de cada ángulo.

Sean

A= el primer ángulo
B= el segundo ángulo
C= el tercer ángulo

Tenemos que

$$A + B + C = 180 \quad \ldots(1)$$

$$A + B = C \quad \ldots(2)$$

$$A - B = \frac{2C}{3} \quad \ldots(3)$$

Sustituimos A + B de (3) en (1) y obtenemos

$$C + C = 180$$

Aplicando el álgebra obtenemos

$$2C=180$$

$$C = \frac{180}{2}$$

$$C=90$$

Sumamos las ecuaciones (2) y (3) y obtenemos

$$2A = \frac{5C}{3}$$

De donde

$$A = \frac{5C}{6}$$

$$A = \frac{5(90)}{6}$$

$$A= 75$$

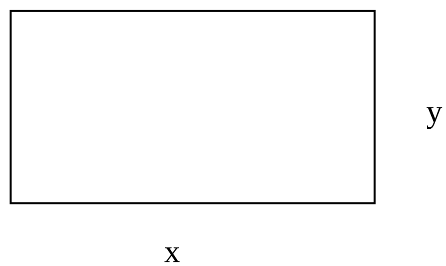
Por último despejando B de (1) tenemos

B= 180 – A – C

B= 180 – 75 – 90

B= 15

3. El perímetro de un rectángulo es de 40 cm, y el área es de 96 cm^2. Encuentre las dimensiones del rectángulo.



El perímetro está dado por

$$2x + 2y = 40 \quad \ldots (1)$$

y el área

$$xy = 96 \quad \ldots (2)$$

despejando "y" de (1)

$$y = \frac{40 - 2x}{2}$$

La cual se puede simplificar obteniendo

$$y = 20 - x \quad \ldots(3)$$

sustituyendo en (2) tenemos

$$x(20 - x) = 96$$

Aplicando el álgebra obtenemos

$$20x - x^2 = 96$$

Obteniéndose la ecuación cuadrática

$$x^2 - 20x + 96 = 0$$

Factorizando tenemos

$$(x - 8)(x - 12) = 0$$

De donde las raíces son x = 8 ó x=12,

Al sustituir en (3) obtenemos que el valor de "y" es

y= 20 – 8 = 12 ó y= 20 – 12 = 8

concluyendo que las dimensiones del rectángulo son 8 cm y 12 cm

1.4 EJERCICIOS

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $$\begin{aligned} 2x + 6y &= -8 \\ -3x + y &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ x - 2y &= 8 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3m - 4n &= 2 \\ -6m + 8n &= -4 \end{aligned}$$

d)
$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -2$$
$$\frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1$$

e)
$$2x + 6y = -8$$
$$-3x + y = 2$$

f)
$$\begin{aligned} y + 6z &= -4 \\ 2x + 3y &= -2 \\ x + y - 5z &= 9 \end{aligned}$$

g)
$$2x + 3y + 3z = 10$$
$$3x - 2y - 3z = -1$$
$$2x + 5y + 2z = 5$$

h)
$$3p - q = 7$$
$$-12p + 4q = 3$$

i)
$$3x - 2y = 7$$
$$4x + y = 24$$

j)
$$\frac{5}{8}x - \frac{2}{3}y = 3$$
$$\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y = 2$$

k)
$$2x - 5y = 1$$
$$6x - -15y = 3$$

l)
$$\begin{aligned} 2x + 6y &= -8 \\ -3x + y &= 2 \end{aligned}$$

ll)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ x + y + z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

m)
$$\begin{aligned} 3x + 2(y-3) &= 2y \\ 2x - (y+2x) &= 4 \end{aligned}$$

n)
$$\begin{aligned} x + 3y - z &= -3 \\ 3x - y + 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= -1 \end{aligned}$$

ñ)
$$\begin{aligned} 5x + 2z &= 1 \\ y - 3z &= 2 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a)
$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x^2 + y^2 &= 17 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 &= -6 \\ x^2 + 3y^2 &= 31 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ y &= 3x \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} xy &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x^2 - 5 &= y^2 \\ x^2 - 5 &= y \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 9 \\ 2x^2 - 3y^2 &= 1 \end{aligned}$$

3. **El perímetro de un rectángulo es de 300 metros. La base tiene 30 metros más que la altura. Hállese las dimensiones del rectángulo.**

4. **Se sabe que el primer número es el doble del segundo y del tercero juntos, que la suma de los tres es 45 y que el tercero es el doble del segundo. Obtener dichos números.**

5. **Dos obreros A y B trabajando juntos pueden realizar una tarea en cuatro días; B y C juntos pueden hacerlo en tres días, y A y C en 2.4 días. Calcular el tiempo que tardaría cada obrero en realizar dicha tarea trabajando independientemente.**

6. **Calcular el área del triángulo rectángulo con las siguientes condiciones: Su perímetro es igual a 24 cm. El doble de la hipotenusa es igual al doble del cateto menor más el mayor. Seis veces el cateto menor más ocho veces el cateto mayor, menos 10 veces la hipotenusa es igual a cero.**

7. **La diagonal de un rectángulo mide 85 cm. Si el lado menor aumenta en 11 y el mayor disminuye en siete, la longitud de la diagonal no varía. Calcular las dimensiones del rectángulo.**

8. **La proporción áurea para un rectángulo está dada por $\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$. Calcula las dimensiones de los lados de una hoja de papel rectangular cuya área es de 100 cm^2.**

9. **El doble de la edad de A excede en 50 años a la edad de B, y $\frac{1}{4}$ de la edad de B es 35 años menos que la edad de A. Hallar ambas edades.**

10. Hace 10 años la edad de A era el doble que la de B; dentro de 10 años la edad de B será los $\frac{3}{4}$ de la de A. Hallar las edades actuales.

11. Dícele Juan a Pedro, cuántos años tengo, si tengo el doble de lo que tú tenías cuando yo tenía la que tú tienes, sabiendo que cuando tú tengas la que yo tengo, entre los dos sumaremos 63 años.

12. Un platero tiene dos aleaciones, una de las cuales contiene 35% de plata y la otra 60%, ¿Cuánto de cada una debe fundir y combinar a fin de obtener 100 g de una aleación con 50% de plata?.

13. El precio de admisión a una obra de teatro de secundaria fue de $1.50 para estudiantes y $2.25 para público en general. Si se vendieron 450 boletos por un total de $777.75, ¿cuántos de cada clase se vendieron?.

14. Tres soluciones contienen cierto ácido en diversos porcentajes: 10, 30 y 50. Un químico desea usar las tres a fin de producir una mezcla de 50 litros que contenga 32% de ácido. Si quiere utilizar el doble de la solución al 50% que de la de 30%, ¿cuántos litros de cada solución ha de usar?.

15. Una tienda se especializa en mezclas de café para exigentes. El dueño desea preparar bolsas de una libra que se vendan en $8.50 combinando granos de Colombia, Brasil y Kenia. El costo por libra de estos cafés es de %10, $6 y $8, respectivamente. El café de Colombia debe triplicar al de Brasil. Da la cantidad de cada tipo de café de la mezcla.

16. Calcular dos números enteros que sumados den 25 y su producto 144.

17. 5 kilos de azúcar, 3 de café y cuatro de frijoles cuestan $1.18; 4 de azúcar, 5 de café y 3 de frijoles cuestan $1.45; 2 de azúcar, 1 de café y 2 de frijoles cuestan $0.46. Hallar el precio de un kilo de cada mercancía.