P R O P Ó S I T O S

Continuar el estudio de las funciones trascendentes con las funciones exponenciales y logarítmicas, cuya forma peculiar de variación, permite modelar diversas situaciones de crecimiento y decaimiento. Introducir la noción de función inversa. Reforzar la identificación de dominio y rango de una función, así como la relación entre parámetros y gráfica

Sugerencias para quien imparte el curso

Este es el primer acercamiento de los alumnos a las funciones exponenciales y logarítmicas. Presentamos algunos ejemplos y secuencias de cómo abordar el tema de funciones exponenciales. Se pueden utilizar ejemplos similares haciendo hincapié en la cercanía de ellos a la vida cotidiana, Las expresiones correspondientes a las funciones se irán obteniendo paulatinamente a lo largo del estudio de esta unidad.

PROBLEMAS DE CRECIMIENTO.

Ejemplo 1

Enrique pidió prestados $ 6,500 al 12% de interés anual compuesto mensualmente. El préstamo será liquidado en un solo pago al cabo de dos años.

¿A cuánto asciende la deuda de Enrique al final de cada mes y al final del período?

Nota: el interés compuesto se cobra al final de cada mes y se agrega al capital incrementando éste último, de manera que la deuda aumenta cada mes. Los bancos consideran en general 360 días como duración de un año, para el cálculo de intereses, por consiguiente para obtener el interés a 30 días se divide el interés anual entre 12.

Enrique no podía pagar pronto su deuda y aceptó este trato.

¿Cuánto dinero deberá Enrique al final del primer mes?

Si continúa este proceso de la misma forma ¿Cuánto dinero deberá Enrique al cabo de cada uno de los meses en que dura el trato?

Solución:

Si a Enrique le van a cobrar un interés anual de 12% , deberá pagar un interés mensual del 1%. Esto se obtiene dividiendo el interés anual (0.12) entre 12 meses (360 días).

Al finalizar el primer mes adeudará el capital que solicitó más los intereses

$6{,}500 + 0.01(6{,}500) =$ _____

Esto nos indica que Enrique debe $ 65 más.

Al finalizar el segundo mes Enrique adeuda:

$6{,}565 + 0.01(6{,}565) =$ _____

Al finalizar el tercer mes, Enrique adeuda:

$6{,}630.65 + 0.01(6{,}630.65) =$ _____

Al finalizar el cuarto mes, Enrique adeuda:

$6{,}696.9565 + 0.01(6{,}695.9565) =$ _____

Al finalizar el quinto mes, Enrique adeuda:

$6{,}763.92607 + 0.01(6{,}763.92607) =$ _____

Al finalizar el sexto mes, Enrique adeuda:

$6{,}831.56533 + 0.01(6{,}831.56533) =$ _____

Al finalizar el séptimo mes, Enrique adeuda:

$6{,}899.88098 + 0.01(6{,}899.88098) =$ _____

Al finalizar el octavo mes, Enrique adeuda:

$6{,}968.87979 + 0.01(6{,}968.87979) =$ _____

Al finalizar el décimo mes, Enrique adeuda:

$7{,}038.56859 + 0.01(7{,}038.56859) =$ _____

Al finalizar el undécimo mes, Enrique adeuda:

$7{,}108.95427 + 0.01(7{,}108.95427) =$ _____

Al finalizar el primer año, Enrique adeuda:

$7{,}180.04382 + 0.01(7{,}180.04382) =$ _____

Sugerencias para quien imparte el curso

Conviene que los alumnos realicen sus cálculos y los verifiquen con los que proporcione el profesor. También conviene que los alumnos vayan cuestionándose si hay otra manera de obtener los cálculos, pues con la anterior sería necesario obtener el saldo de cada uno de los meses anteriores antes de poder obtener el de un mes en articular.

Observa que al final del primer año Enrique debe $ 1,180.04 pesos más de su deuda inicial.

Al finalizar el décimo tercer mes, Enrique adeuda:

$7251.84425 + 0.01(7251.84425) =$ _____

Y así sucesivamente se podría calcular la deuda hasta transcurrir los dos años de plazo.

Para obtener los valores anteriores tuvimos que calcular primero el capital e intereses del período anterior.

Cabe preguntar ¿Si habrá una manera más directa de obtener esos mismos valores?

Sugerir a los alumnos lo siguiente:

Como el capital inicial corresponde a la cantidad total que Jorge pidió de préstamo y a ésta cantidad se le debe agregar el interés mensual, esto lo podemos representar por:

$6{,}500 + 6{,}500(0.01) = 6{,}500(1 + 0.01) = 6{,}500(1.01) = 6{,}565$

Pedir a los alumnos que verifiquen que ésta es la nueva cantidad de dinero (capital e intereses) que adeuda Enrique al final del primer mes.

Procediendo de la misma manera, al finalizar el segundo mes el nuevo capital será:

$6565(1.01) = 6{,}500(1 + .01)(1.01)$, que podemos representar como:

$6{,}500(1.01)^2$

Pedir a los alumnos verificar el resultado que habían obtenido anteriormente.

Si los alumnos están de acuerdo con este resultado,

¿Qué forma tendría una expresión general para este tipo de deuda al cabo de t meses? _____

Exacto!: $6{,}500(1.01)^t$

Comprobar también que todos los valores obtenidos anteriormente se pueden obtener mediante esta nueva expresión

¿Cómo sería la expresión para el séptimo mes? _____

¿Y la expresión y la deuda a los 15 meses?

$6{,}500(1.01)^{15}$

¿Cuánto dinero deberá pagar Enrique, capital más interés, al cabo de 2 años?

$6{,}500(1.01)^{24} = 8253.27522$

Hacer notar que en este tipo de expresión la variable ocupa el lugar del exponente

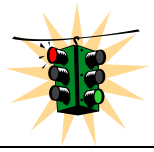
Podrás observar que el dominio de la función lo constituyen valores reales iguales o mayores que cero. Aunque la función en sí admite valores negativos de x, éstos carecen de significado para el problema que hemos resuelto, la función tiene la forma

$$f(x) = 6{,}500(1.01)^x$$

El rango lo constituyen valores mayores o iguales a $6{,}500$.

En general, para obtener el nuevo Capital C, que se obtiene con un interés compuesto se aplica la expresión: $C(t) = C_0(1+\frac{i}{n})^{nt}$

Conceptos clave:



1.La función exponencial

A este tipo de expresión le llamamos una función exponencial.

En donde Co corresponde al capital inicial, i corresponde a la tasa de interés anual, n es el número de veces al año en que se aplica el interés compuesto y t es el número de años en que se paga el interés compuesto.

La función es creciente si el exponente es positivo, pero será decreciente si el exponente es negativo

De acuerdo con esto sugerir a los alumnos resuelvan los siguientes ejercicios de interés compuesto.

Ejercicio 1

1. Si una persona solicita un préstamo de $ 10,000 al 10% de interés anual compuesto mensualmente y liquidará su deuda en un solo pago al cabo de 3 años ¿a cuánto asciende la cantidad que deberá de pagar?

2. Felipe invirtió $ $150,000$ en el banco, el cual le pagará 5.5% de interés compuesto anual ¿Cuánto dinero tendrá Felipe al cabo de 2 años si los intereses se pagan:

a) mensualmente.

b) Trimestralmente.

c) Semestralmente.

3. Una empresa invierte $ $2,355,000$ en el banco a una tasa de interés compuesto anual de 6.68% ¿cuánto dinero tendrá al cabo de 3 años si se mantiene la misma tasa de interés y si los intereses se pagan:

a) Semanalmente.

b) Quincenalmente.

c) Mensualmente.

d) Trimestralmente.

e) Diariamente.

Sugerencia para quien imparte el curso:

Es muy conveniente se realice un análisis de lo que se pide en el inciso e), pues el resultado da un acercamiento a lo que se obtendría utilizando la función exponencial natural.

4. Construye en tu cuaderno las gráficas de las funciones que se enlistan enseguida y observa si son crecientes o decrecientes tomando valores de x desde -10 hasta 10:

a) $f(x) = 2.5^x$

b) $f(x) = 5.4^x$

c) $f(x) = 5(2.3)^x$

Hablando en general, si el problema concierne al crecimiento o aumento de dinero, objetos o animales, se puede utilizar la expresión

$N(t) = N_0 (1+q)^t$ .....(2)

En donde N_0 es la cantidad inicial de dinero, objetos o animales, q es la tasa de crecimiento por período y t es el número de periodos que se consideran.

Problemas de decrecimiento o disminución

Ejemplo 2

Se sabe que al comprar un auto su valor se deprecia con una tasa de 5.5% anual. Si se compra un auto nuevo con valor de \$ $187,500$ ¿cuál será el valor del auto al final del primero, segundo, tercero, cuarto y quinto año, suponiendo que se le da el mantenimiento adecuado?

Solución:

Si el valor del auto se deprecia el 5.5%, esto significa que al final del primer año el nuevo valor del auto es el 94.5% del valor inicial.

¿Cuál es el valor del auto al fin del primer año?

Completa $187,500 - 187,500(0.055) =$ _____

¿Cuál es el valor del auto al fin del segundo año? Completa

177,187.5-177,187.5(0.055) = _____

Solicita a los alumnos si es posible escribir una función, como en el ejemplo anterior que permita directamente calcular el nuevo valor del auto cada año que pase, ¿cuál será?

Utiliza esta expresión para comprobar los valores obtenidos anteriormente y obtener el valor del auto en los años restantes.

Comprueba con los alumnos que el valor de ese auto al final del 5º año es de $ 141,305.91

Hacer notar a los alumnos que ahora la función con la cual pudieron obtener los resultados es:

$N(t) = N_0 (1-q)^t$, donde N_o, q y t son como en la expresión (2)

Ejemplo 3

Una persona ingiere *130* miligramos de un medicamento. El medicamento se elimina del organismo un *10%* cada hora, a través de la orina.

a) Escribe cuál es la función que se utiliza para obtener la cantidad de medicamente restante en el organismo.

b) Obtén la cantidad de medicamento restante al cabo de *2* horas.

c) Calcula la cantidad de medicamento restante al cabo de *1* día.

d) Obtén la cantidad de medicamente restante a los *1.5* días.

Solución:

a) Como la persona elimina el 10% cada hora, significa que al cabo de una hora el medicamento restante es el 90% de la dosis ingerida, por lo tanto la expresión para obtener la cantidad de medicamento restante será:

$$N(t) = No(1-0.10)^t = 130(0.9)^t$$

Completa las respuestas

b) Al cabo de 2 horas restarán $N(2) = 130(0.9)^2$ =_____mg.

c) Al cabo de un día restarán $N(24) = 130(0.9)^{24}$ =_____ mg.

d) al cabo de día y medio restarán $N(36) = 130(.9)^{36}$ =_____ mg.

Ejercicio 2

1. Un aspecto importante en oceanografía consiste en determinar la cantidad de luz que puede penetrar a diversas profundidades del océano. Supongamos que la energía lumínica (en calorías por centímetro cuadrado) que llega a una profundidad de x metros está dada por la expresión $I(x) = 10(0.4)^x$. Calcula la energía lumínica a las siguientes profundidades:

a) Un metro

b) 2 metros

c) 6 metros

2. Construye la gráfica de la función anterior considerando x desde cero hasta 7 metros

Construye en tu cuaderno las gráficas de las siguientes funciones y observa si son crecientes o decrecientes. Considera valores de x desde -10 hasta 10

3. $f(x) = 0.72^x$

4. $f(x) = 0.90^x$

5. $f(x) = 15(0.86)^x$