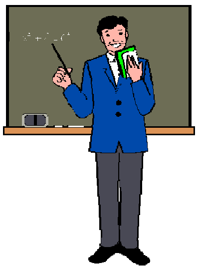
DE LA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA SENO A LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SENO



Sugerencias para quien imparte el curso:

El principal papel del profesor o profesora que imparte el curso consiste en controlar el proceso de solución de los problemas planteados y reorientar el trabajo en caso de desvíos, para lo cual en su planeación deberá pensar en establecer un diálogo con los estudiantes basado en una serie de preguntas que guíen hacia la solución del problema, sobre todo en aquellos momentos en que no puedan utilizar directamente sus conocimientos previos, por ser insuficientes y surja la necesidad de construir otros nuevos, sin embargo en algunas etapas de la búsqueda del conocimiento se deberá permitir que los estudiantes lo hagan de manera independiente.

Propósitos:

1. Reforzar el concepto de ángulo y ubicarlo en el plano cartesiano.
2. Retomar la noción de ángulo y sus notaciones sexagesimal y decimal.
3. Introducir el concepto de radián.
4. Deducir los factores de conversión de grados a radianes y de radianes a grados.
5. Reforzar el concepto de función y subconceptos asociados dominio, rango y regla de correspondencia.
6. Transitar de la razón trigonométrica seno a la función trigonométrica seno.

EL PROBLEMA DEL COMPÁS

Si para trazar circunferencias Juan tiene un compás como el de la figura 1 cuyos brazos tienen una longitud de diez centímetros, responde lo siguiente:

a) ¿Cuál será la longitud de la circunferencia que podrá trazar, si la apertura del compás es de $\theta = 60°$?

b) ¿Cuál será el valor del área del círculo que podrá dibujar, cuando la apertura del compás sea de $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$?

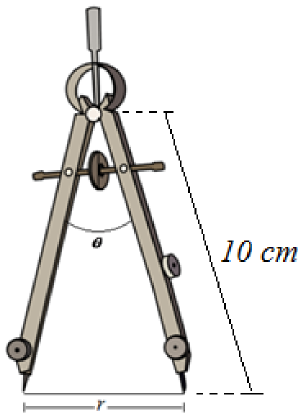


Figura 1

Para iniciar el análisis de la situación, preguntar:

1. ¿De qué dependen la longitud de una circunferencia y el área de un círculo?
2. ¿Cuáles son las fórmulas para calcular la longitud de una circunferencia y el área de un círculo?
3. Observa que la relación de la longitud r del radio a la longitud C de la circunferencia es una función algebraica, ¿qué tipo de función es?
4. También la relación de la longitud r del radio al área A del círculo es una función algebraica, ¿de qué tipo?

Considerando el compás de la figura 1, preguntar:

5. Al variar la medida θ de la apertura del compás, ¿cambia la longitud r?
6. Cuando la medida θ disminuye, ¿qué sucede con la longitud r?
7. Cuando la medida θ aumenta, ¿qué sucede con la longitud r?
8. ¿De qué dependerá la longitud r?
9. ¿Cuáles son los posibles valores que podría tomar θ?

Una vez que las respuestas a las preguntas anteriores conduzcan a establecer que en el problema hay dos variables relacionadas, la independiente θ con la dependiente r, dar un tiempo para que ellos mismos intenten construir una expresión matemática que indique dicha relación.

Escuchar las sugerencias que los alumnos propongan y a partir de ellas conducir la discusión hasta el establecimiento del triángulo rectángulo de la figura 2 como un modelo geométrico de la situación.

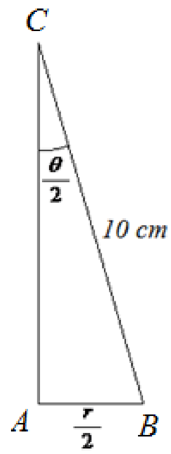


Figura 2

Tomando como referencia el triángulo rectángulo de la figura 2, preguntar:

10. ¿Cómo se pueden relacionar la longitud $\frac{r}{2}$ del cateto $\overline{AB}$, la longitud $\overline{BC} = 10$ de la hipotenusa y la medida $\frac{\theta}{2}$ del ángulo agudo C en el triángulo de la figura 2?

Se espera que no haya dificultad en llegar al resultado $sen\ \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{r}{2}}{10}$, de donde $r = 20 \cdot sen\ \frac{\theta}{2}$ será la expresión matemática que establece la relación de la variable independiente θ a la variable dependiente r.

Pedir que respondan al inciso a) del problema y verificar que llegan al resultado correcto, éste es 20π ó 62.83185307 centímetros.

Solicitar respuesta para el inciso b) del problema y observar las conflictos que surgen, el más probable es que supongan que el ángulo mide $\frac{3\pi}{4}$ grados y obtengan que la circunferencia tiene una longitud de 2.583674326 centímetros, error a consecuencia del desconocimiento de otros sistemas de medición de ángulos, otro podría ser que lleguen al mismo resultado aún sabiendo que la medida del ángulo es diferente a los grados, error producido por el desconocimiento de los distintos modos para la medición de ángulos en la calculadora.

Así que será importante destacar en este momento que la medida de un ángulo puede ser en grados o en radianes, resaltando que la principal diferencia entre estos dos sistemas de medición, es que en el caso de los radianes, la medida será un número real x*, lo cual resulta adecuado en el contexto del estudio* *de las funciones en el curso, ya que las funciones a considerar son funciones reales de variable real. Esta convención es la que va a liberar a las funciones trigonométricas de los ángulos y de los triángulos rectángulos, logrando con esto un progreso en su tratamiento.*

Habrá de recordarse que un ángulo es el conjunto de puntos barridos al girar un rayo en el plano sobre su punto de origen desde una posición inicial hasta una posición final.

En la definición no se restringe ni la magnitud ni el sentido de giro, por lo tanto es posible que el rayo de varias vueltas o que el giro sea en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario, dando lugar a situaciones como las que se muestran en la figura 3.

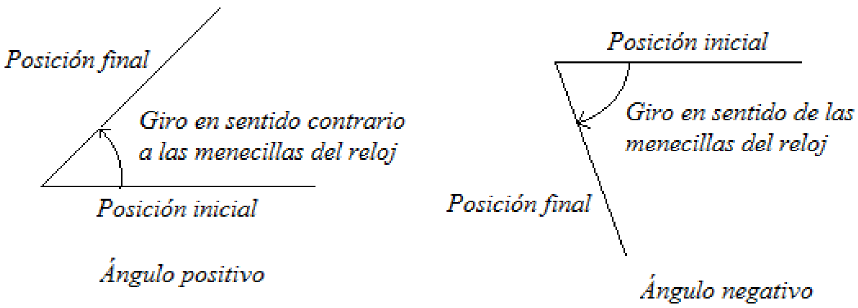


Figura 3

No pierde sentido la definición, si se ubica el vértice del ángulo en el origen del plano cartesiano y se considera al lado inicial como el radio de una circunferencia con centro en el origen que coincida con la parte positiva del eje de abscisas como se ilustra en la figura 4.

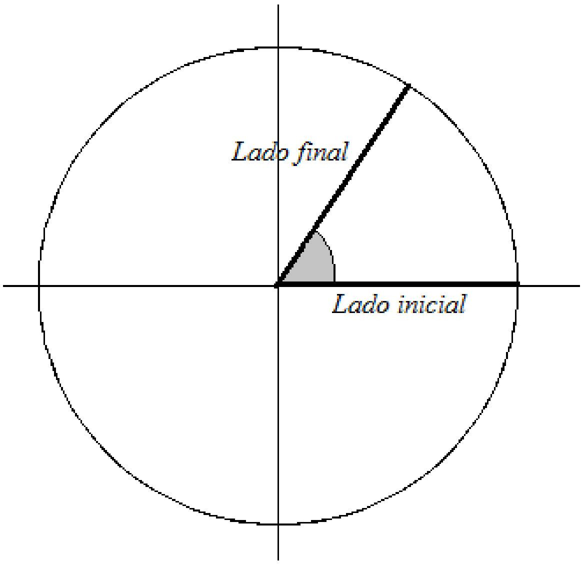


Figura 4

Es decir, que se puede pensar que un ángulo es el giro positivo o negativo del radio que está sobre la parte positiva del eje de abscisas de una circunferencia con centro en el origen.

Cuando el ángulo está ubicado en el plano cartesiano, éste estará en el cuadrante donde se encuentre el lado final, por ejemplo el ángulo de la figura 4 está en el primer cuadrante y es positivo.

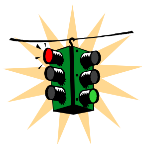
Si el lado final del ángulo coincide con alguno de los ejes de coordenadas, éste recibe el nombre de ángulo de cuadrante.

La medida de un ángulo depende de la magnitud del giro y generalmente se utilizan las siguientes unidades de medición, los grados sexagesimales y los radianes.

Preguntar:

11. ¿Cómo se mide un ángulo?

La respuesta a la anterior pregunta y la discusión grupal, traerá como consecuencia el establecimiento del concepto clave que sigue.



Concepto clave:

4. El grado

Si la circunferencia de la figura 4 se divide en 360 partes iguales, el ángulo central subtendido por cada arco corresponderá a un grado sexagesimal.

Es decir, un grado sexagesimal o simplemente grado, es la medida del ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia, correspondiente a la distancia entre un par de marcas consecutivas de un transportador.

Recordar que el grado $(°)$ tiene como submúltiplos al minuto $(')$ correspondiente al ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a $\frac{1}{21600}$ de la circunferencia y el segundo $('')$ correspondiente al ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a $\frac{1}{1296000}$ de la circunferencia.

De lo anterior se pueden establecer las siguientes equivalencias:

$1' = \frac{1°}{60}$, $1'' = \frac{1'}{60}$ y $1'' = \frac{1°}{3600}$, o bien que $1° = 60'$, $1' = 60''$ y $1° = 3600''$.

Ejercicio 1

Aplica estas equivalencias para completar lo que sigue:

25° = __________´ 12´= __________´´

240´= __________ °

2400´´= __________ ° 2.5° = __________´´= __________´

También comentar que existen dos formas equivalentes de expresar la medida de un ángulo en grados, la notación decimal y la notación sexagesimal, como se muestra en la tabla siguiente:

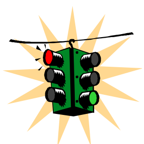
Notación decimal	Notación sexagesimal
20.25°	20°15´
54.37°	54°22´12´´
18.126°	18°7´33.6´´

Posiblemente se necesario ejemplificar cómo con la tecla “ ° ´ ´´ ” o “DMS” de una calculadora científica común se puede transitar fácilmente entre este par de notaciones.

Preguntar:

12. ¿Habrá otra manera de medir un ángulo que no sea con un transportador, es decir en grados? ¿Cuál?

Luego de escuchar respuestas, indicar que existen otras maneras de medir un ángulo sin uso de un transportador, como la que se describe en el concepto clave 5.



Concepto clave:

5. Los radianes

Pedir que tracen un ángulo de primer cuadrante positivo como el de la figura 5, para hacer notar que se formará el ángulo central AOB cuya medida se puede determinar comparando mediante una razón a la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ que subtiende, con la longitud del radio $\overline{OA}$ de la circunferencia, con las mismas unidades, esto es $\measuredangle AOB = \frac{\widehat{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\widehat{AB}}{r}$.

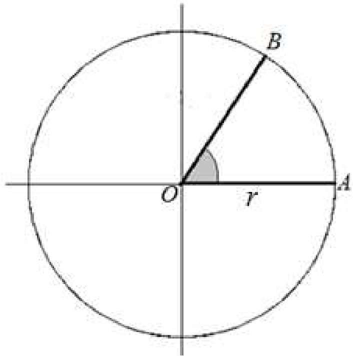


Figura 5

En este contexto, la magnitud del giro del radio para formar el ángulo se define con el uso de magnitudes relacionadas con medidas de longitud.

Cuando la longitud del arco $\widehat{AB}$ es igual a la longitud del radio $\overline{OA}$, se obtiene la unidad de medida del ángulo en este sistema, conocida como el radián.

Es decir, un radián es la medida del ángulo central que abarca un arco de longitud igual a la del radio de la circunferencia.

Preguntar:

13. ¿Cuánto medirá en radianes un ángulo central subtendido por un arco de $12\ cm$ en una circunferencia de $4\ cm$ de radio?

Características importantes de resaltar de éste sistema de medición son:

I. La medida del ángulo es independiente del tamaño del radio de la circunferencia.
II. Como las unidades de las longitudes del arco y el radio son iguales, éstas se cancelan obteniendo la medida en radianes de manera pura. Por tal razón, la palabra radián generalmente se omite y sólo se usa para ser enfático.
III. Lo más significativo del uso de radianes, es que la medida del ángulo será un número real.

Ejercicio 3

Calcula y responde lo siguiente:

a) Si el radio de una circunferencia es de $2\,m$, determina la medida en radianes del ángulo central subtendido por un arco de $18\,m$.

b) En una circunferencia con un radio de $5\,cm$, encuentra la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 4 radianes.

c) En una circunferencia, la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 2.5 radianes es de $12.4\,m$. ¿De qué longitud será su radio?

Con el fin de inferir alguna relación entre las unidades de medidas de ángulos, grados y radianes, pedir que se analicen y obtengan una conclusión de los siguientes casos particulares:

¿Cuánto medirá en radianes?

a) Un ángulo con un giro positivo igual a una vuelta completa.
Conclusión: $360°$ es equivalente a ________ radianes.

b) Un ángulo de cuadrante de $180°$.
Conclusión: $180°$ es equivalente a ________ radianes.

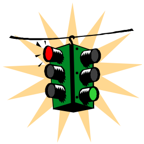
c) Un ángulo de cuadrante de $90°$.
Conclusión: $90°$ es equivalente a ________ radianes.

d) Un ángulo de cuadrante de $270°$.
Conclusión: $270°$ es equivalente a ________ radianes.

Considerando las conclusiones anteriores, preguntar:

14. ¿A cuántos radianes equivaldrá un grado?
15. ¿A cuántos grados equivaldrá un radián?

Solicitar a los alumnos que completen los concepto clave 6 y 7.



Conceptos clave:

6. Conversión de grados a radianes

Si representamos con Deg a la medida del ángulo en grados y con Rad a la medida del ángulo en radianes, la fórmula para convertir la medida en grados de un ángulo a radianes es:

Factor de conversión:

7. Conversión de radianes a grados

Si representamos con Rad a la medida del ángulo en radianes y con Deg a la medida del ángulo en grados, la fórmula para convertir la medida en radianes de un ángulo a grados es:

Factor de conversión:

Ejercicio 4

Utilizando los conceptos clave 6 y 7:

a) Convierte a radianes cada una de las medidas en grados: $45°$, $-60°$, $120°$ y $-54°$.

b) Convierte a grados, escribiendo el resultado con notación decimal y con notación sexagesimal, cada una de las medidas en radianes: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$ y $-\frac{2\pi}{7}$.

Ahora sí, los alumnos podrán obtener la respuesta correcta al inciso b) del problema, ya que deberán distinguir que en ese caso la medida del ángulo, está en radianes.

Para lograrlo, será labor de quien imparte el curso indicar cómo utilizar la calculadora, haciendo énfasis en que si la medida del ángulo está en grados, su calculadora deberá estar en modo Deg*, mientras que si la medida del ángulo está en radianes, deberán poner su calculadora en modo* Rad*.*

Establecer que de aquí en adelante se trabajará en el sistema de radianes, salvo que se indique el otro sistema de medición, por convenir en el estudio del nuevo tipo de funciones a introducir en esta unidad.

Retomando la relación de la variable independiente θ a la variable dependiente r obtenida en el análisis del problema, $r = 20 \cdot sen\ \dfrac{\theta}{2}$, preguntar:

16. Esta relación, ¿es una función?
17. Según las condiciones del problema, ¿cuál será su dominio y rango?

A pesar que desde los cursos y unidades anteriores se ha venido trabajando con el concepto de función, es posible que haya alumnos que aún tengan dudas con el manejo del concepto y de los subconceptos asociados a él, así que habrá que retomarlos, haciendo una discusión general para concluir que en la expresión matemática obtenida, se establece una relación de la variable independiente a la variable dependiente que es una función, y que en particular es una función trigonométrica con dominio restringido.

Para provocar la discusión preguntar:

18. ¿Cuándo una relación de la variable independiente a la variable dependiente es una función?
19. ¿Cuál es el nombre que recibe el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar la variable independiente?
20. ¿Con cuál nombre se identifica al conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente?
21. ¿Cómo se le llama a la expresión matemática que indica cómo asignar a cada valor de la variable independiente su correspondiente valor de la variable dependiente?

Como resultado de la discusión y de la convención sobre la medida θ del ángulo en radianes, se deberá concluir que la relación $r(x) = 20 \cdot sen\ \dfrac{x}{2}$ de la variable independiente a la variable dependiente del problema del compás es un ejemplo de un tipo de funciones llamadas trigonométricas, en este caso senoidal, con dominio restringido por las condiciones del problema, al intervalo $(0, \pi)$ y con rango el intervalo $(0, 20)$.

Como ejercicio extra clase se puede pedir que grafiquen la función en el dominio dado, ya sea a mano o con algún software graficador.

Para cerrar la sección comentar que la función obtenida, es un caso particular del modelo $f(x) = A \cdot sen\ Bx$, con $A = 20$ y $B = \dfrac{1}{2}$.

En particular, si $A = B = 1$ se obtiene la función $f(x) = sen\ x$ llamada función básica del seno, la cual se estudiará a detalle más adelante.