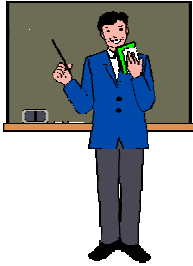


TRANSFORMACIONES DE LAS FUNCIONES BÁSICAS DEL SENO Y DEL COSENO (II)

Sugerencias para quien imparte el curso:



Es trascendental que en todo el proceso de búsqueda a la solución de los problemas planteados al inicio, el alumno participe activamente, donde no solamente será importante llegar a la solución, sino también promover la habilidad para resolver de manera independiente problemas en general, por lo tanto en la estrategia de enseñanza y aprendizaje se deberá dar prioridad al desarrollo de procesos del pensamiento matemático, evitando la sola transferencia de contenidos, para lo cual resultará indispensable planear las tareas, actividades y preguntas que posibiliten la resolución de problemas con la participación activa de los estudiantes, apoyados por parte del profesor o profesora para ayudarlos a pensar y orientarlos hacia una solución.

Propósitos:

1. Investigar cómo desplazar horizontalmente o verticalmente una onda.
2. Introducir el concepto desfase.



EL PROBLEMA DEL DESFASE

En la figura 1 aparecen las ondas senoidales $\text{sen } x$ y $\text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$, la segunda es una transformación de la primera, ¿qué habrá cambiado de la onda senoidal básica al sumarle $\frac{\pi}{2}$ al argumento de la función asociada?

Prestar atención en que la función asociada a la segunda onda tiene una forma más extensa, pues se le ha agregado un tercer parámetro al argumento de la función y será representado por la letra C , ahora la función es

$$f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C), \text{ en este caso } C = \frac{\pi}{2}.$$

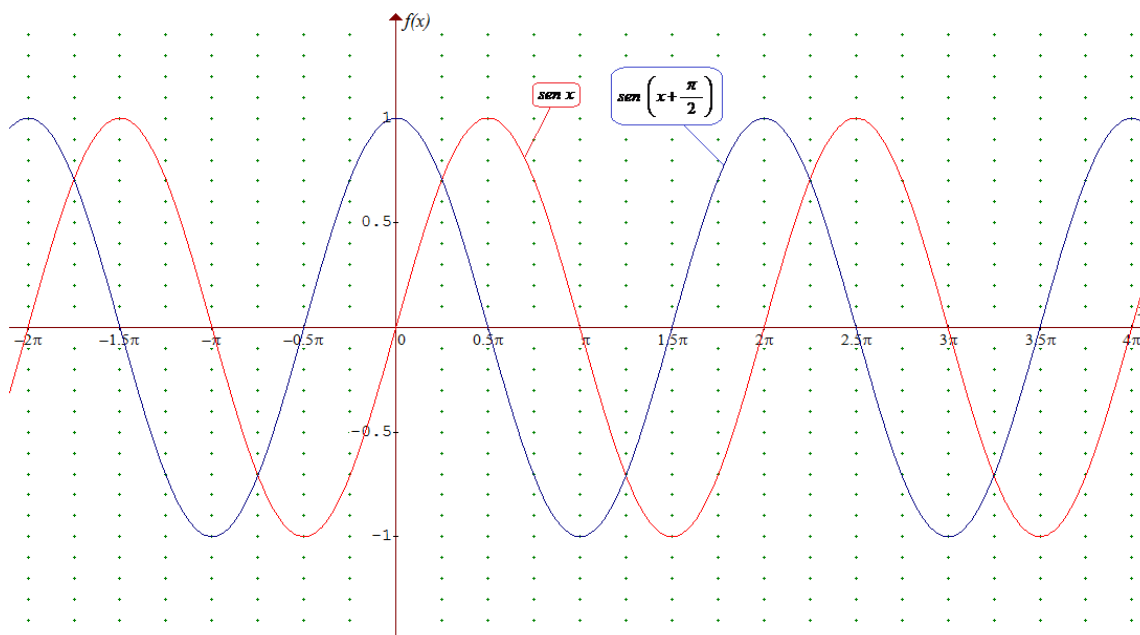


Figura 1

Preguntar, al comparar las ondas:

1. ¿Cambió la amplitud?
2. ¿Cambió el periodo?
3. ¿Cambió la línea de equilibrio?
4. ¿Qué es lo que tienen de diferente?
5. ¿Por qué tendrán nodos diferentes?

Aclarar que los nodos son los puntos donde la onda interseca a la línea de equilibrio, y en este caso como la línea de equilibrio es el eje de abscisas, entonces los nodos coinciden con los ceros de las funciones.

En la discusión se deberá de concluir que el efecto de la operación realizada al argumento de la función básica del seno, es que ésta se ha desplazado o movido de manera horizontal.

Preguntar:

6. ¿Hacia donde se ha desplazado y cuántas unidades?

Se esperan dos posibles respuestas que son las más obvias:

Respuesta 1. Se ha desplazado hacia la derecha $\frac{3\pi}{2}$ unidades.

Respuesta 2. Se ha desplazado hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades.

Para decidir cuál es la respuesta correcta, hacer un análisis como el que sugiere a continuación.

Preguntar:

7. En la onda senoidal $\text{sen } x$, ¿en dónde termina el periodo que inicia en $x=0$?

Indicar que ese periodo de la onda senoidal $\text{sen } x$ tendrá un correspondiente en la onda senoidal $\text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.

El procedimiento para encontrarlo puede ser el siguiente:

Para saber donde inicia tal periodo, bastará con igualar el argumento de la función con 0 y despejar x , y para determinar su fin, hay que igualar el argumento con 2π y despejar x .

Después de plantear el procedimiento, preguntar:

8. ¿Dónde inicia y dónde termina el periodo de la onda senoidal $\text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ correspondiente al periodo que inicia en $x=0$ y termina en $x=2\pi$ de la onda senoidal $\text{sen } x$?

En la figura 2 se muestran solamente los periodos encontrados de ambas ondas que están en correspondencia, lo cual muestra claramente que la onda senoidal $\text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ está desfasada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda de la onda senoidal $\text{sen } x$.

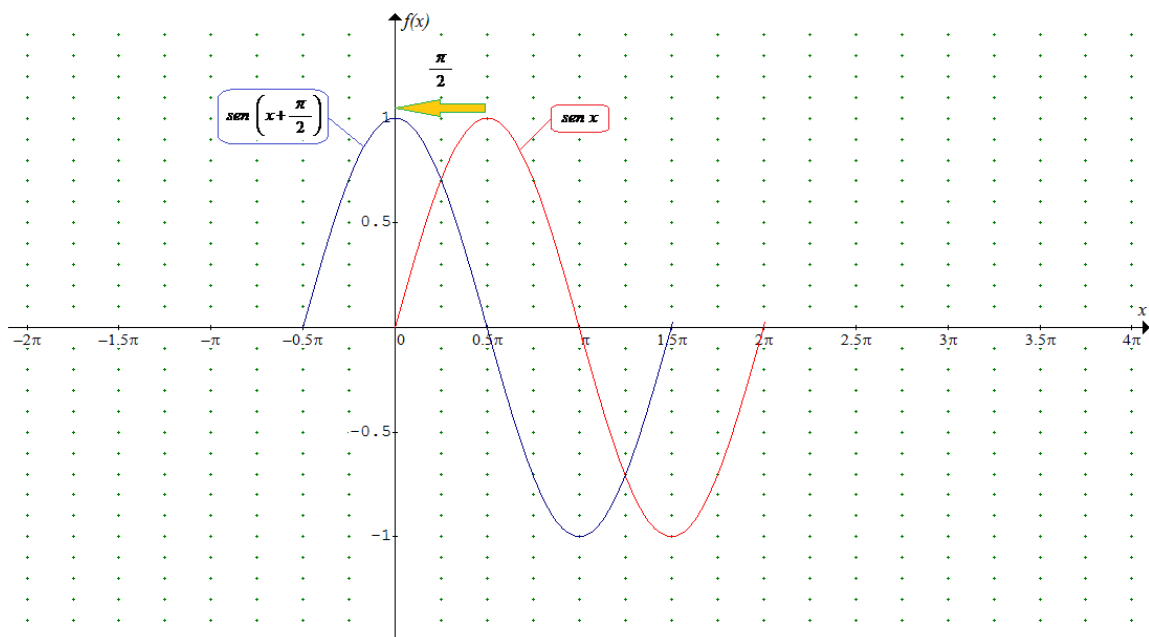


Figura 2

Por lo tanto, si al argumento de la función $\text{sen } x$ se le suma $\frac{\pi}{2}$, esta operación la desplaza $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda.

Indicar que de aquí en adelante cuando una onda se desplace de manera horizontal se utilizará el término desfase.

Realizando el mismo proceso, investigar lo que sucede cuando a la onda cosenoidal $3 \cdot \cos 4x$ se le resta π unidades al argumento de la función correspondiente.

Presentar a los alumnos la figura 3 donde aparecen las ondas cosenoidales $3 \cdot \cos 4x$ y $3 \cdot \cos(4x - \pi)$ para pedir que conjeturen el efecto de agregar el parámetro $C = -\pi$ al argumento de la primera de ellas.

Después de formular la conjetura, preguntar:

9. ¿Cuál es la amplitud de cada onda? ¿hay algún cambio?
10. ¿Cuál es el periodo de cada onda? ¿hay algún cambio?
11. ¿Por qué la amplitud y el periodo de las ondas es el mismo?
12. En la onda $3 \cdot \cos 4x$, ¿en dónde termina el periodo que inicia en $x = 0$?

13. ¿Dónde inicia y dónde termina el periodo de la onda $3 \cdot \cos(4x - \pi)$ correspondiente al periodo que inicia en $x = 0$ y termina en $x = \frac{\pi}{2}$ de la onda $3 \cdot \cos 4x$?

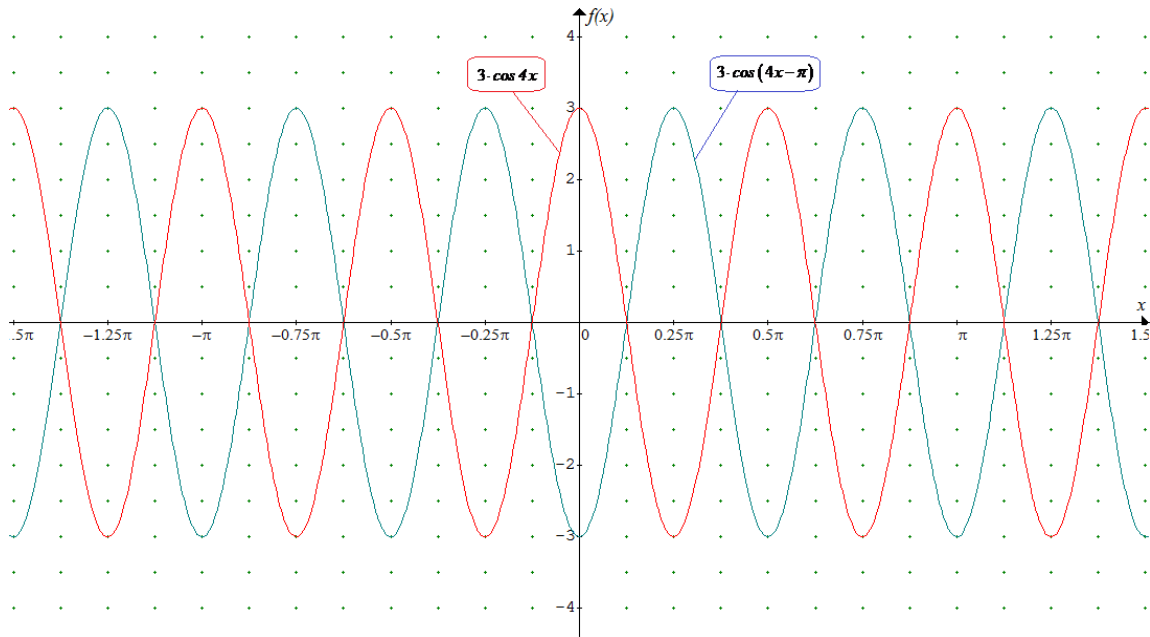


Figura 3

En la figura 4 están solamente los periodos dados en las respuestas a las preguntas 13 y 14, apoyarse de ella para que los alumnos verifiquen si la conjetura hecha fue correcta o no.

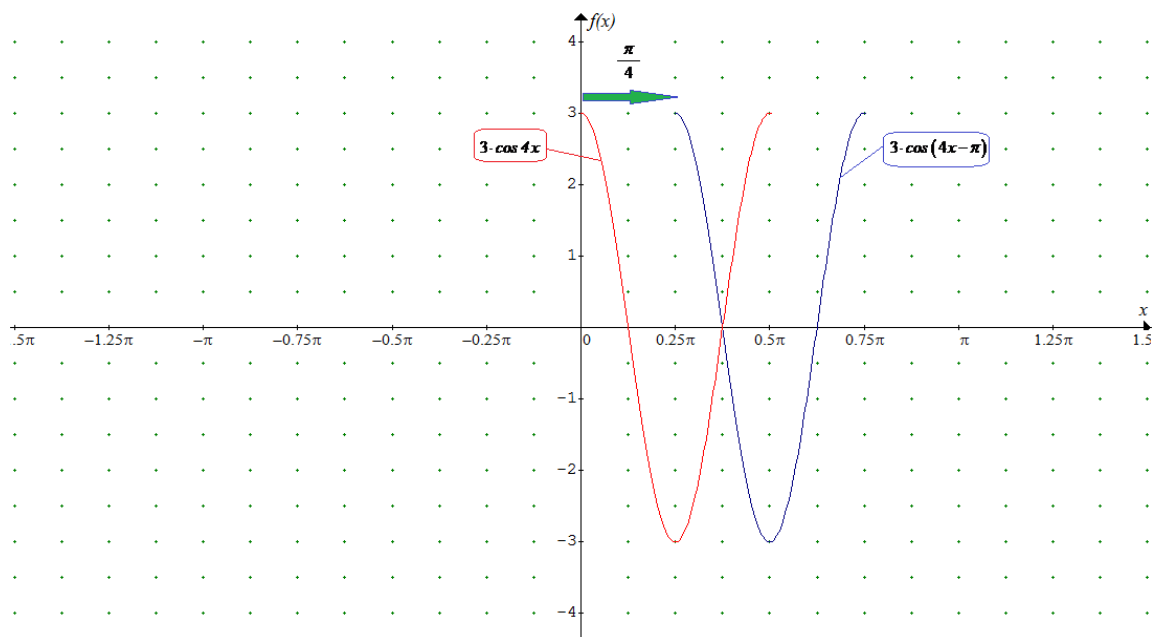


Figura 4

La figura 4 muestra que al restar π unidades al argumento de la onda $3 \cdot \cos 4x$, ésta sufre un desfase de $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la derecha.

Un primer resultado que se puede conseguir de los casos examinados es que el desfase depende del signo del parámetro C , así que preguntar:

14. ¿Cuándo el desfase será a la derecha?
15. ¿Cuándo el desfase será a la izquierda?

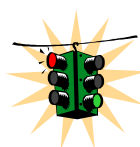
Con la finalidad de obtener la relación que permita conocer la distancia del desfase de alguna onda, proponer a los alumnos que completen una tabla como la siguiente:

Función	A	B	C	Desfase	dirección	$\left \frac{C}{A} \right $	$\left \frac{C}{B} \right $
$f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$							
$f(x) = 3 \cdot \cos(4x - \pi)$							

Para verificar que los alumnos han llegado a un resultado correcto, realizar la pregunta que sigue cuya respuesta correcta debe ser $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda.

16. ¿Cuántas unidades y hacia dónde se desfazará la onda $3 \cdot \text{sen } 2x$, si se le suma $\frac{\pi}{2}$ unidades a su argumento?

Conviene recalcar antes de crear el concepto clave siguiente, que el término “desfase” solamente se aplicará cuando el desplazamiento sea horizontal.



Concepto clave:

18. Desfase de una onda senoidal o cosenoidal

Al sumar la cantidad C , positiva o negativa, al argumento Bx de la función correspondiente a la onda senoidal o cosenoidal, ésta sufrirá un desfase de $\left| \frac{C}{B} \right|$ unidades a la derecha o a la izquierda según lo siguiente:

- a) Si C es positiva, el desfase es a la izquierda.
- b) Si C es negativa, el desfase es a la derecha.

Para hacer el análisis de una última transformación, preguntar:

17. ¿Qué sucederá al sumar una constante D , positiva o negativa a las funciones $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C)$ o $f(x) = A \cdot \text{cos}(Bx + C)$?

Si no se propone la respuesta correcta, se pueden mostrar algunos casos particulares para que los alumnos visualicen el efecto de la operación y descubran la transformación hecha.

En la figura 5 aparecen la onda senoidal básica y la onda $2 + \text{sen } x$, pedir que las comparen y preguntar:

- 18. ¿Qué tienen de diferente?
- 19. ¿Cuál es el efecto de sumarle 2 unidades a la onda senoidal básica?

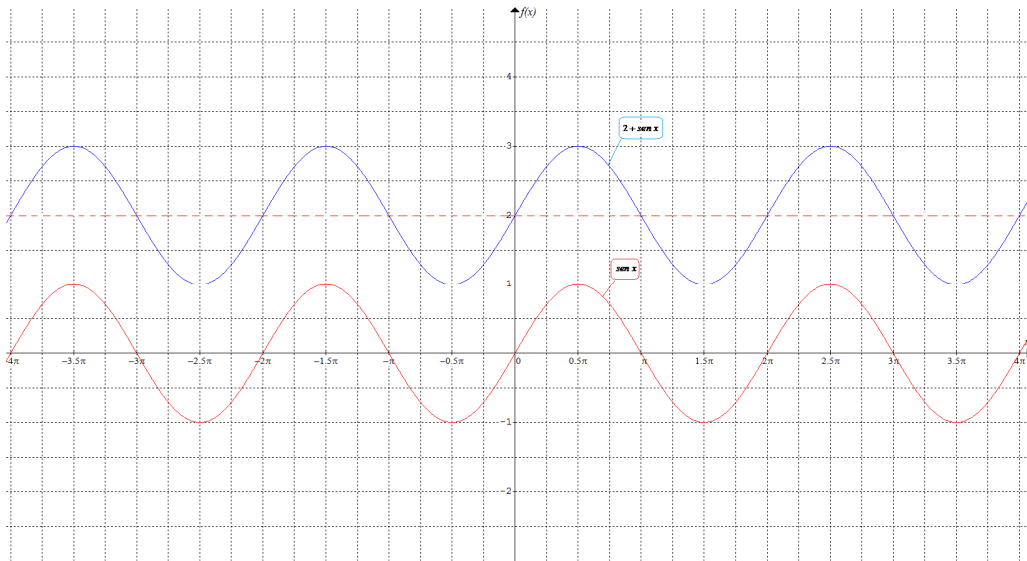


Figura 5

También presentar la figura 6 donde se muestran las ondas $2 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ y $-3 + 2 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ y preguntar:

20. ¿Qué tienen en común y en qué difieren?

21. ¿Cuál fue el efecto de sumarle -3 a la primera de las ondas?

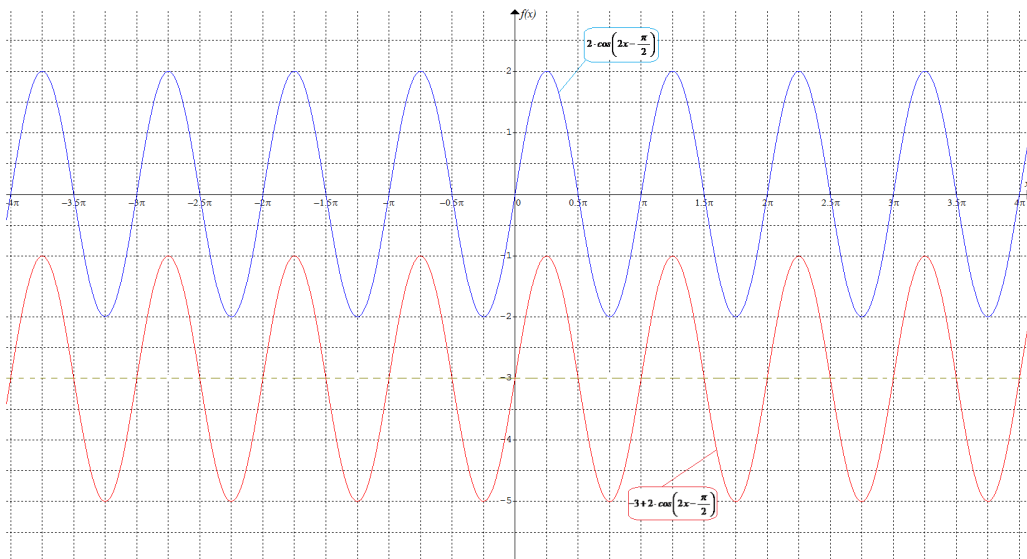
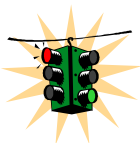


Figura 6

De ésta última transformación analizada surge el concepto clave expuesto a continuación.



Concepto clave

19. Desplazamiento vertical de una onda senoidal o cosenoidal

Al sumar la cantidad D , positiva o negativa, a la función correspondiente de una onda senoidal o cosenoidal, ésta se desplazará $|D|$ unidades hacia arriba o hacia abajo según lo siguiente:

- a) Si D es positiva, el desplazamiento es hacia arriba.
- b) Si D es negativa, el desplazamiento es hacia abajo.

Con este par de nuevos concepto clave, las expresiones generalizadas para seno y coseno hasta el momento conocidas, $f(x) = A \cdot \text{sen } Bx$ y $f(x) = A \cdot \text{cos } Bx$ se amplían al agregar los parámetros C y B , a las siguientes:

$$f(x) = D + A \cdot \text{sen } (Bx + C) \text{ y } f(x) = D + A \cdot \text{cos } (Bx + C)$$

Preguntar:

22. ¿Cuáles son los valores para los parámetros A , B , C y D en la función básica del seno y en la función básica del coseno?

Para ejemplificar le aplicación de los conceptos 18 y 19 construidos, resolver a manera de ejemplo lo propuesto a continuación.

¿Qué operaciones hay que efectuar para que la onda senoidal correspondiente a la función $f(x) = 4 \cdot \text{sen } \frac{x}{2}$ se desfase $\frac{2\pi}{3}$ unidades a la izquierda y se desplace $\frac{5}{2}$ unidades hacia arriba?

Para lograr el desfase pedido, por el inciso a) del concepto clave 18, sumar al argumento de la función un valor positivo para el parámetro C que cumpla con la relación $\left| \frac{C}{B} \right| = \frac{2\pi}{3}$.

Como C y B son positivos, entonces $\left| \frac{C}{B} \right| = \frac{C}{B}$ y como $B = \frac{1}{2}$, el valor para el parámetro C se obtiene despejándolo de la igualdad $\frac{C}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}$.

Preguntar:

23. ¿Cuál es el valor para el parámetro C ?

Este desfase quedará registrado en la expresión $f(x) = 4 \cdot \text{sen} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$.

Para que a continuación se desplace $\frac{5}{2}$ unidades hacia arriba, según el inciso a) del concepto clave 19, sumar $\frac{5}{2}$ a la expresión anterior, obteniendo finalmente que $f(x) = 4 \cdot \text{sen} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{5}{2}$, en cuya regla de correspondencia aparecen las operaciones que logran los desplazamientos pedidos en el ejemplo.



Ejercicio 1

Indica a través de una expresión de la forma $D + A \cdot \text{sen} (Bx + C)$ las operaciones que hay que efectuar para que a partir de la onda correspondiente a la función básica del seno, se consigan en el orden que aparecen las transformaciones siguientes:

- Cambiar su amplitud a 5.
- Cambiar su periodo a $\frac{3\pi}{4}$.
- Desfasarla π unidades a la derecha.
- Desplazarla 2 unidades hacia abajo.

Verificar que los alumnos lleguen a la respuesta correcta:

$$2 + 5 \cdot \text{sen} \left(\frac{8x}{3} - \frac{8\pi}{3} \right)$$