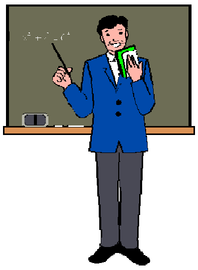
TRANSFORMACIONES DE LAS FUNCIONES BÁSICAS DEL SENO Y DEL COSENO (I)



Sugerencias para quien imparte el curso:

Como ya se habrá observado, las representaciones gráficas se utilizan como un instrumento útil para el análisis y así llegar a la comprensión y arribo de los conceptos clave que a su vez se convierten en recursos importantes para ser utilizados y lograr alguna solución, se espera que con el uso del apoyo del registro visual se logre una mejora en el aprendizaje de la funciones trigonométricas y se eviten las dificultades que se pueden generar al trabajar exclusivamente en el registro algebraico. No se debe pensar que con solo ver la gráfica el alumno pueda lograr un aprendizaje, sino que deben estar vinculadas a actividades planeadas de antemano que estén orientadas a la adquisición del objeto conceptual, esto ayudará al alumno en su proceso de comprensión de las funciones estudiadas en esta unidad. Las representaciones gráficas pueden ser proporcionadas por el profesor o profesora del curso o pueden ser realizadas por los alumnos, a través de actividades dirigidas.

Propósitos:

1. Promover un procedimiento algebraico para encontrar el periodo de una onda.
2. Conocer cómo contraer o extender verticalmente u horizontalmente una onda.
3. Determinar la amplitud y el periodo de una onda a través de los valores de los parámetros de la función trigonométrica correspondiente.
4. Aprender a reflejar una onda con respecto a su línea de equilibrio.

EL PROBLEMA DE LA AMPLITUD Y EL PERIODO

Sabiendo que las ondas básicas del seno y del coseno tienen una amplitud 1 y un periodo de 2π ¿Cuál será la amplitud y el periodo de las ondas correspondientes a las funciones trigonométricas siguientes?

a) $f(x) = 3 \cdot sen\ 5x$

b) $f(x) = 9 \cdot cos\ \dfrac{2x}{3}$

Recordar que la función básica del seno es un caso particular de la función senoidal $f(x) = A \cdot sen\ Bx$ *con* $A = B = 1$*, de manera semejante la función básica del coseno es un caso particular de la función cosenoidal* $f(x) = A \cdot cos\ Bx$ *con* $A = B = 1$*. Mencionar que* A *y* B *son llamados parámetros de la función.*

Preguntar:

1. ¿Cuáles son los valores para los parámetros A y B de la función senoidal del inciso a) del problema?
2. ¿Cuáles son los valores para los parámetros A y B de la función cosenoidal del inciso b) del problema?
3. ¿Tendrán alguna relación el valor de los parámetros A y B de la función trigonométrica con la amplitud y periodo de la onda correspondiente?

Para reafirmar que la respuesta a la última pregunta es sí y con el fin de contar con algún procedimiento que permita responder la pregunta del problema se sugiere que se vayan observando los cambios que sufre la onda senoidal básica al modificar dichos parámetros, los resultados generales se irán estableciendo con el apoyo visual gráfico de casos particulares.

Iniciar el análisis con la función básica del seno, cuando ésta es multiplicada por una constante positiva.

Mostrar las ondas senoidales de la figura 1 y preguntar:

4. ¿Cuáles son los valores de los parámetros A y B de la función?
5. ¿Qué tienen en común las ondas?
6. ¿Qué tienen de diferente?
7. De los parámetros A y B de la función, ¿cuál tendrá relación con la amplitud de la onda y cuál será esa relación?

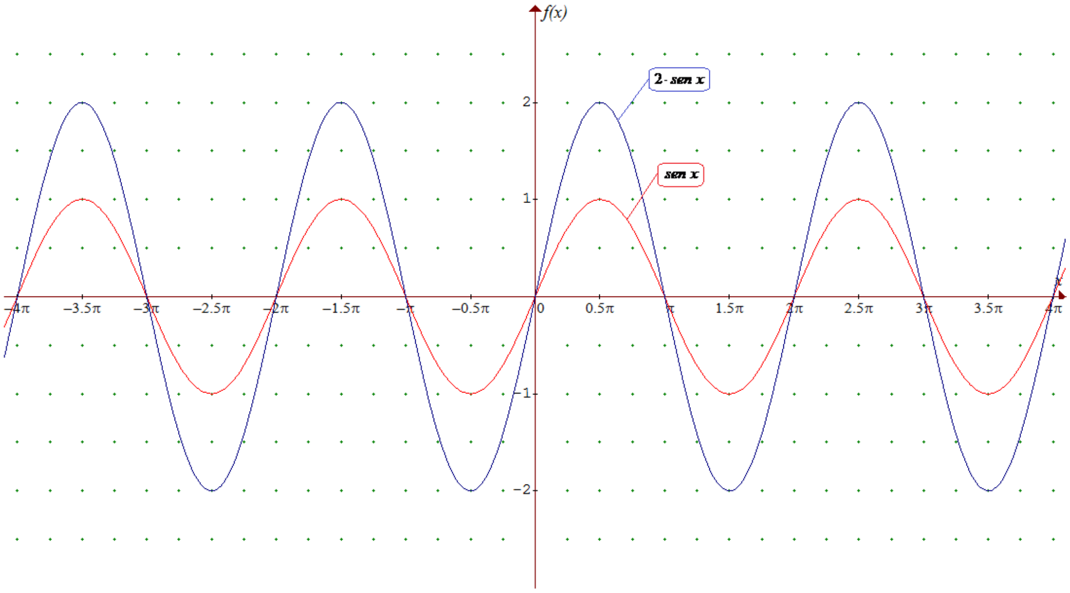


Figura 1

Luego plantear las mismas preguntas con apoyo de la figura 2.

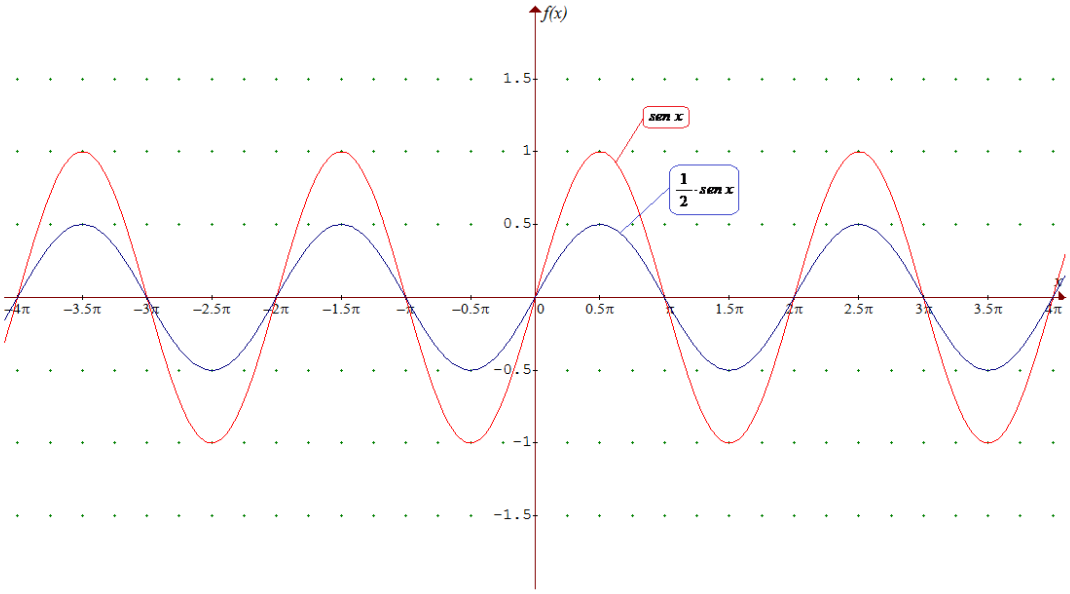


Figura 2

Preguntar:

8. ¿Qué observas del valor para el parámetro A de los casos mostrados? ¿habrá alguna diferencia importante?

En conclusión, el resultado de multiplicar la función básica del seno por una constante A es:

a) Si $A > 1$, la onda senoidal $sen\ x$ se expande verticalmente.
b) Si $0 < A < 1$, la onda senoidal $sen\ x$ se contrae verticalmente.

Al contraerse o expandirse de manera vertical la onda, ésta sufre un cambio en su amplitud, que como ya se dijo es la máxima distancia de la onda a su línea de equilibrio, por lo que la amplitud de la onda senoidal estará dada por el valor del parámetro A de la función $f(x) = A \cdot sen\ Bx$. En caso de que el parámetro A sea negativo, la amplitud de la onda será igual a su valor absoluto $|A|$, porque es una distancia geométrica.

Seguir con la misma estrategia para observar las transformaciones que sufre la onda senoidal básica, cuando el argumento x de la función es multiplicado por una constante positiva.

Mostrar las ondas senoidales de la figura 3 y preguntar:

9. ¿Cuáles son los valores de los parámetros A y B de la función?
10. ¿Qué tienen en común las ondas?
11. ¿Qué tienen de diferente?
12. De los parámetros A y B de la función, ¿cuál tendrá relación con el periodo de la onda y cuál será esa relación?

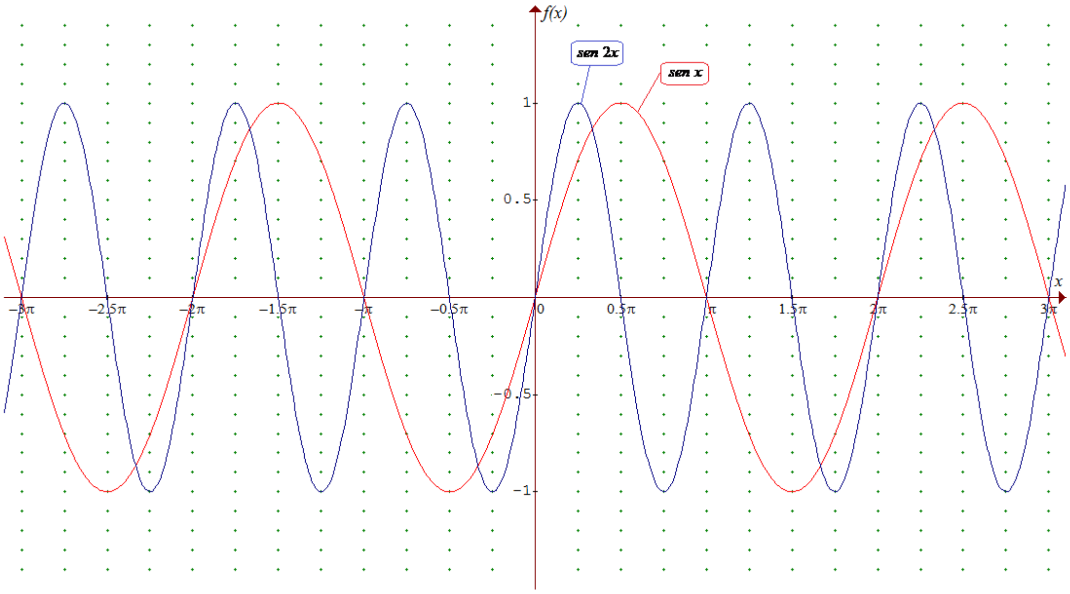


Figura 3

Luego plantear las mismas preguntas con apoyo de la figura 4.

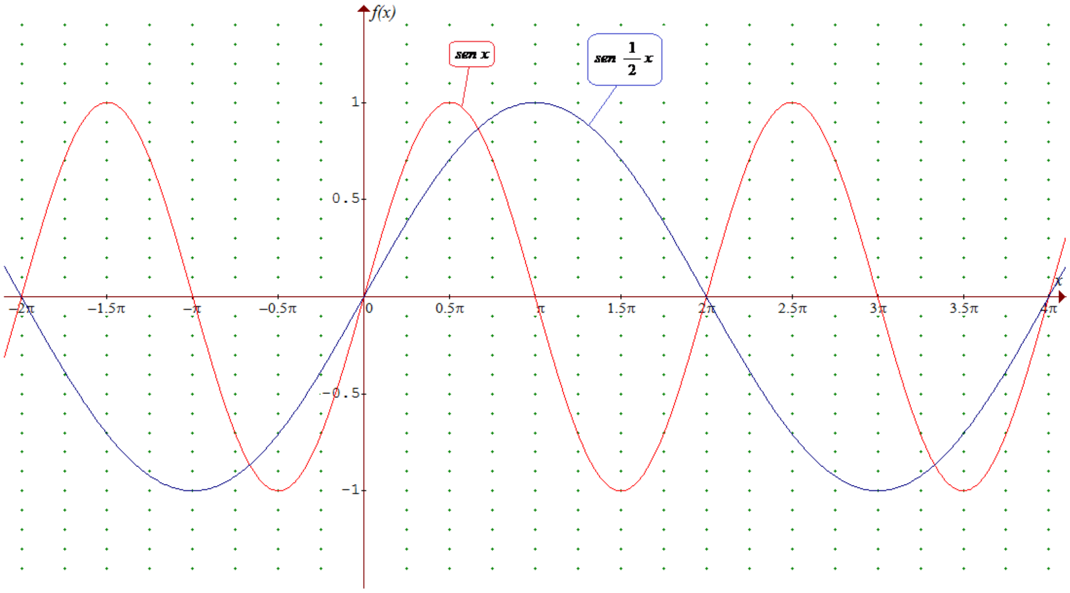


Figura 4

Preguntar:

13. ¿Qué observas del valor para el parámetro B de los casos mostrados? ¿habrá alguna diferencia importante?

La conclusión es que el resultado de multiplicar al argumento x de la función básica del seno por una constante B es:

a) Si $B > 1$, la onda senoidal $sen\ x$ se contrae horizontalmente.
b) Si $0 < B < 1$, la onda senoidal $sen\ x$ se expande horizontalmente.

Al contraerse o expandirse de manera horizontal la onda, ésta sufre un cambio en su periodo, por lo que el periodo de la onda senoidal depende del valor del parámetro B de la función $f(x) = A \cdot sen\ Bx$, pero ¿cómo estarán relacionados?

Para responder a la pregunta se sugiere encontrar el periodo de la onda senoidal $sen\ 2x$ *que aparece en la figura 3, que aunque se podría obtener a través de la gráfica, se recurra a un procedimiento algebraico que permita determinar el periodo que inicia en el origen, y que se ejemplifica a continuación.*

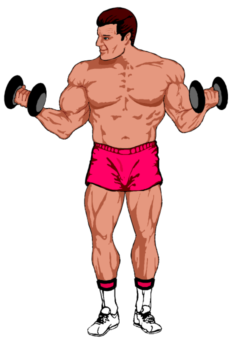
Se sabe que la onda senoidal $sen\ x$ tiene periodo 2π, por lo que el periodo que inicia en $x = 0$ termina en $x = 2\pi$, resaltar que en éste par de relaciones se está igualan el argumento de la función con los números 0 y 2π.

Si se procede de manera semejante con la onda senoidal $sen\ 2x$, se tendrá que el periodo que inicia en $2x = 0$, debe terminar en $2x = 2\pi$, despejando x de estas igualdades, se deduce que el periodo que inicia en $x = 0$, termina en $x = \pi$.

Por lo tanto, la onda senoidal $sen\ 2x$ tiene periodo π, tal como se aprecia en la gráfica.

Siguiendo el mismo procedimiento, encontrar algebraicamente el periodo de la onda senoidal $sen\ \frac{1}{2}x = sen\ \frac{x}{2}$ que aparece en la figura 4.

Para ello, indicar a los alumnos que deberán igualar al argumento de la función con 0 y con 2π, es así que el periodo que inicia en $\frac{x}{2} = 0$ debe terminar en $\frac{x}{2} = 2\pi$, de donde al despejar x se concluye que el periodo que inicia en $x = 0$ termina en $x = 4\pi$, lo cual demuestra que el periodo de la onda senoidal $sen\ \frac{x}{2}$ es igual a 4π, tal como se observa en su gráfica.



Ejercicio 1

Encuentra algebraicamente el periodo de:

a) $f(x) = sen\ 4x$

b) $f(x) = sen\ \frac{x}{4}$

c) $f(x) = sen\ \frac{3x}{7}$

Llevar los resultados obtenidos a una tabla como la siguiente, que los alumnos tendrán que completarla para que ellos descubran cuál es la relación que hay entre el parámetro B de la función y el periodo de la onda.

Función	B	*Periodo*	$\frac{periodo}{B}$	$B \cdot periodo$
$f(x) = sen\ x$				
$f(x) = sen\ 2x$				

$f(x) = sen\ \dfrac{x}{2}$				
$f(x) = sen\ 4x$				
$f(x) = sen\ \dfrac{x}{4}$				
$f(x) = sen\ \dfrac{3x}{7}$				

Puesto que en todos los casos se observa la regularidad $B \cdot periodo = 2\pi$, permite concluir que la función trigonométrica $f(x) = A \cdot sen\ Bx$, con $B > 0$, tiene un periodo igual a $\dfrac{2\pi}{B}$. En caso de que el parámetro B sea negativo, el periodo de la onda será igual a $\dfrac{2\pi}{|B|}$, por la misma razón que la amplitud, el periodo también es una distancia geométrica.

El análisis hecho para el periodo de las funciones senoidales también es válido para las cosenoidales, lo cual es fácil de observar en la figura 5.

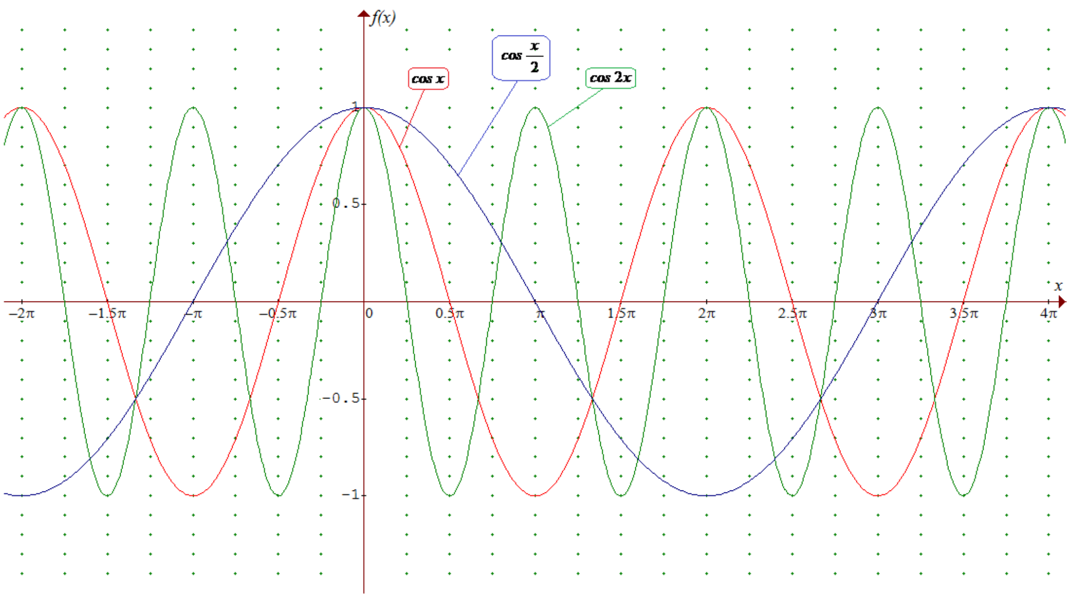
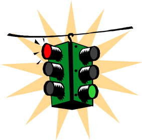


Figura 5

El análisis se ha realizado para la amplitud y periodo de las ondas senoidales y cosenoidales deberán quedar abreviadas en el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

15. Amplitud y periodo de seno y coseno

La amplitud y el periodo de las ondas correspondientes a las funciones trigonométricas $f(x) = A \cdot sen\ Bx$ y $f(x) = A \cdot cos\ Bx$ son:

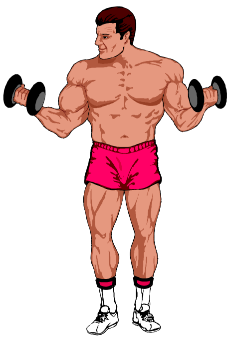
a) Amplitud $= |A|$

b) Periodo $= \dfrac{2\pi}{|B|}$

Una vez formado el concepto clave 15, pedir a los alumnos que procedan a responder el problema planteado al inicio de la sección.

Puesto que la función $f(x) = 3 \cdot sen\ 5x$ tiene parámetros $A = 3$ y $B = 5$, la onda senoidal correspondiente tendrá por el inciso a) del concepto clave 15, una amplitud igual a $|A| = 3$, y por el inciso b) del mismo concepto clave, su periodo será igual a $\dfrac{2\pi}{|B|} = \dfrac{2\pi}{5}$.

Y para la función trigonométrica $f(x) = 9 \cdot \cos \dfrac{2x}{3}$, dado que $A = 9$ y $B = \dfrac{2}{3}$, se concluye que la onda cosenoidal tendrá una amplitud igual a $|A| = 9$ y un periodo igual a 3π, que es el resultado de dividir 2π entre $\left|\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$.

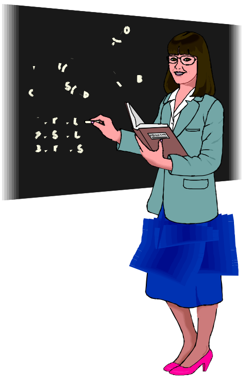


Ejercicio 2

Establece la amplitud, el periodo y los ceros de cada una de las funciones trigonométricas siguientes:

a) $f(x) = 7 \cdot cos\ 3x$

b) $f(x) = \dfrac{3}{2} \cdot sen\ \dfrac{3x}{5}$



EL PROBLEMA DE LAS TRANSFORMACIONES

Indica las operaciones que se tienen que realizar para que la gráfica de la función básica del coseno sufra las siguientes transformaciones:

a) Cambiar su amplitud a 5.

b) Cambiar su periodo a 4π.

Como las operaciones pedidas quedarán modeladas en una expresión de la forma $f(x) = A \cdot cos\ Bx$, el problema será asignar valores particulares a los parámetros A y B, para sustituirlos en dicho modelo.

En la función cosenoidal $f(x) = A \cdot cos\ Bx$, se sabe por el concepto clave 15 que el valor del $|A|$ determina la amplitud de la onda, por lo tanto el valor del parámetro A puede ser 5 ó -5, por otro lado, también es sabido por el concepto clave 15 que el periodo está dado por $\frac{2\pi}{|B|}$, y como se desea que el nuevo periodo sea de 4π, entonces el valor para el parámetro B debe ser tal que cumpla con la relación $\frac{2\pi}{|B|} = 4\pi$, de donde $|B| = \frac{1}{2}$, por consiguiente el valor del parámetro B podrá ser $\frac{1}{2}$ ó $-\frac{1}{2}$.

De lo anterior se concluye que hay cuatro posibles respuestas, dependiendo de cómo se combinen los valores para los parámetros A y B obtenidos, en cada caso las operaciones que hay que efectuar para lograr las transformaciones pedidas en el problema están proporcionadas en la regla de correspondencia de la función.

Respuesta 1: $f(x) = 5 \cdot cos \frac{x}{2}$

En la figura 6 se manifiestan gráficamente las transformaciones realizadas, mostrando solamente un periodo de cada onda.

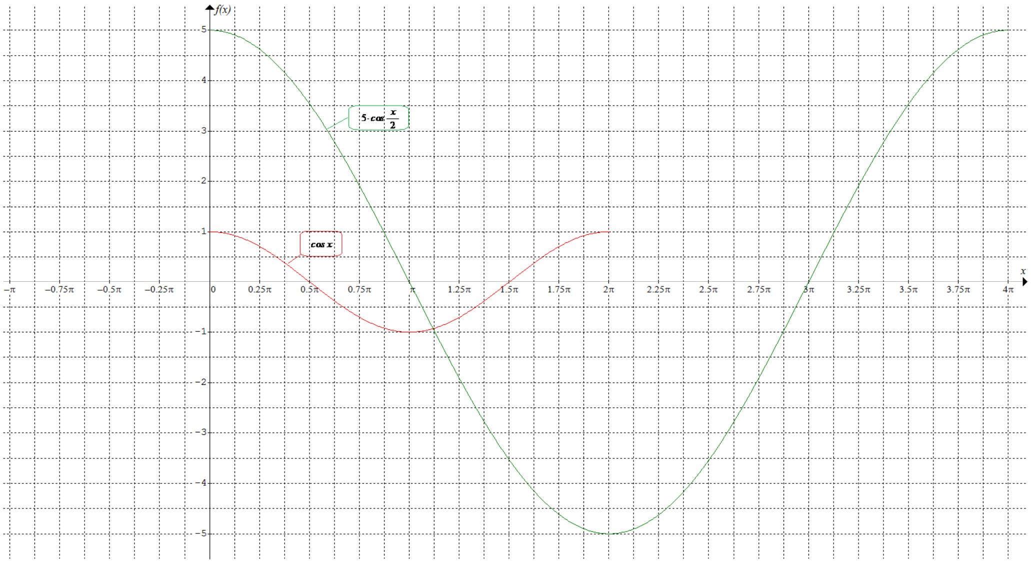
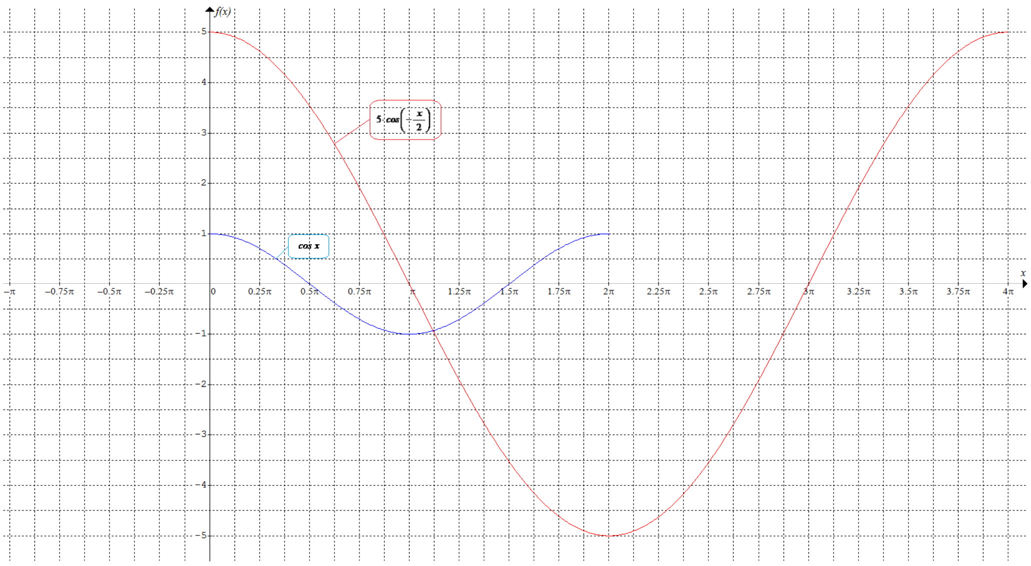


Figura 6

Respuesta 2: $f(x) = 5 \cdot cos\left(-\frac{x}{2}\right)$

En la figura 7 aparece el resultado de las operaciones realizadas a la función básica del coseno.



Comprando las figuras 6 y 7, se puede establecer que en general $A \cdot cos\,Bx = A \cdot cos(-Bx)$.

Respuesta 3: $f(x) = -5 \cdot cos\,\frac{x}{2}$

En la figura 8 se muestra el resultado de las operaciones realizadas.

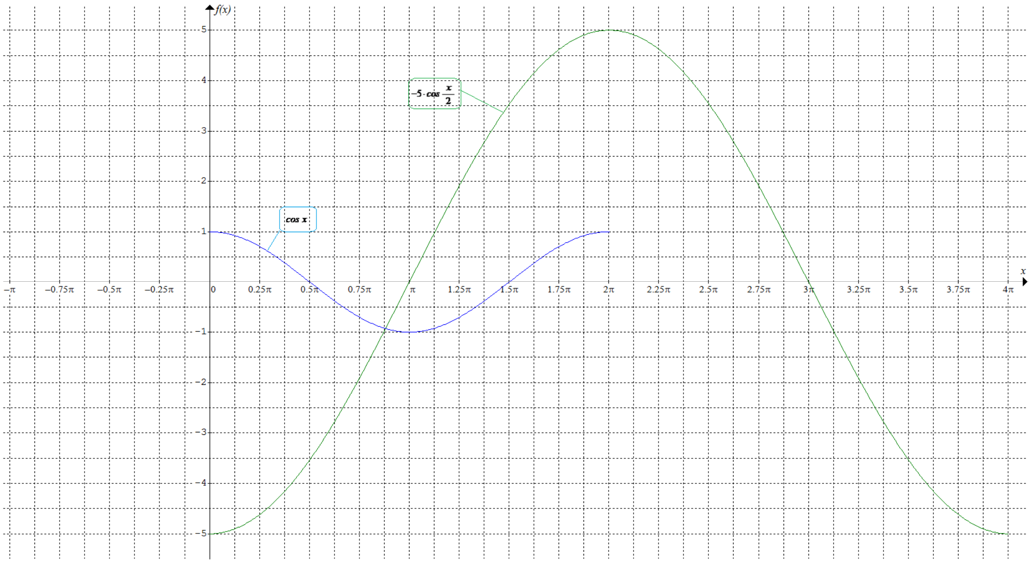


Figura 8

Respuesta 4: $f\left(x\right) = -5 \cdot cos\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

En la figura 9 se observan el resultado de las operaciones realizadas.

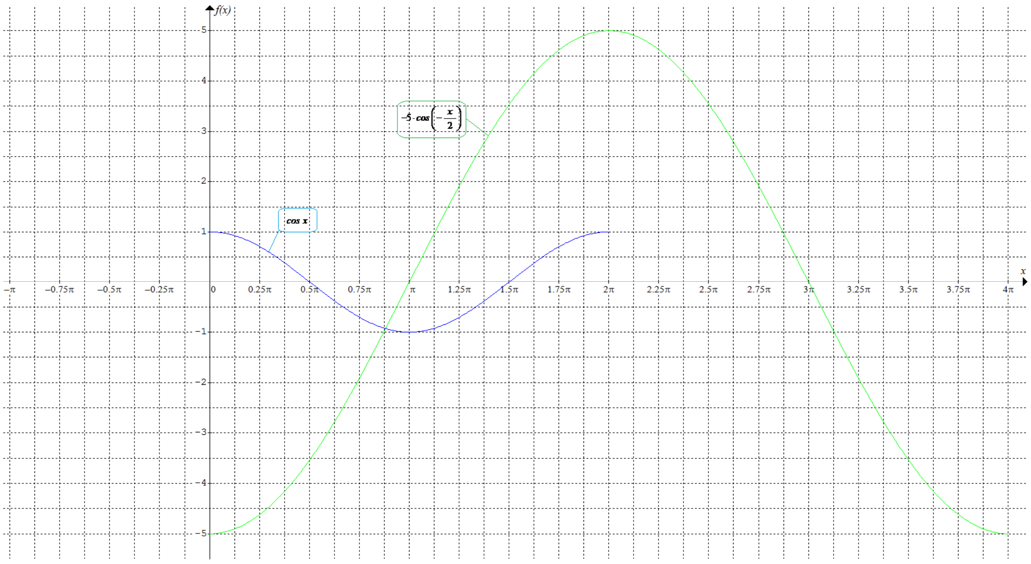


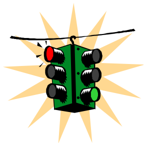
Figura 9

Otra relación que se observa en las figuras 8 y 9 es que $-A \cdot cos\ Bx = -A \cdot cos\left(-Bx\right)$.

Manifestar que si observan atentamente las figuras 8 y 9, se podrán percatar que las trayectorias de las ondas no tienen el mismo comportamiento, como sucede en las figuras 6 y 7, y esto es porque además de haberse modificado la amplitud y el periodo de la onda cosenoidal básica, ésta ha sufrido una transformación más.

Para descubrir esa nueva transformación, pedir que comparen la onda $5 \cdot cos\frac{x}{2}$ de la figura 6 con la onda $-5 \cdot cos\frac{x}{2}$ de la figura 8, describan la relación que habrá entre ellas y conjeturen a que se debe.

Quien imparte el curso deberá guiar la discusión hasta llegar a que una es el reflejo de la otra respecto a la línea de equilibrio, consecuencia del cambio de signo en el parámetro A de la función, de tal suerte que es el momento de introducir un nuevo concepto clave.

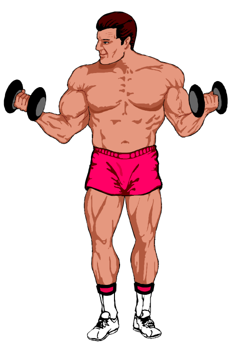


Concepto clave:

16. Reflexión de una onda cosenoidal con respecto a su línea de equilibrio

Para reflejar una onda cosenoidal con respecto a su línea de equilibrio, bastará con cambiar el signo del parámetro A de la función correspondiente.

Hacer ver que si en el problema de las transformaciones se hubiese pedido exclusivamente el cambio de amplitud y de periodo, se descartarían las respuestas 3 y 4 dadas, o si además de cambiar la amplitud y el periodo se hubiera solicitado reflejar la onda con respecto a su línea de equilibrio, se descartarían las respuestas 1 y 2.



Ejercicio 3

Indica las operaciones a realizar para lograr en la onda senoidal $sen\ x$, las transformaciones siguientes en el orden que aparecen.

a) Reflejarla con respecto a su línea de equilibrio

b) Cambiar su amplitud a 3

c) Cambiar su periodo a $\frac{\pi}{3}$

En la siguiente secuencia de figuras se muestran los resultados de las posibles operaciones realizadas.

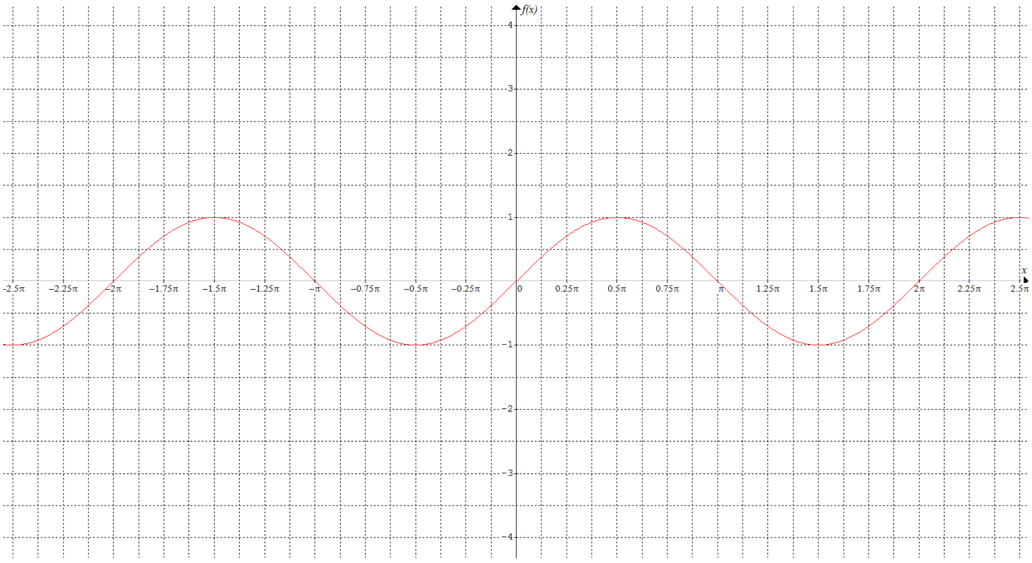


Figura 10. De inicio $f\left(x\right)=sen\ x$

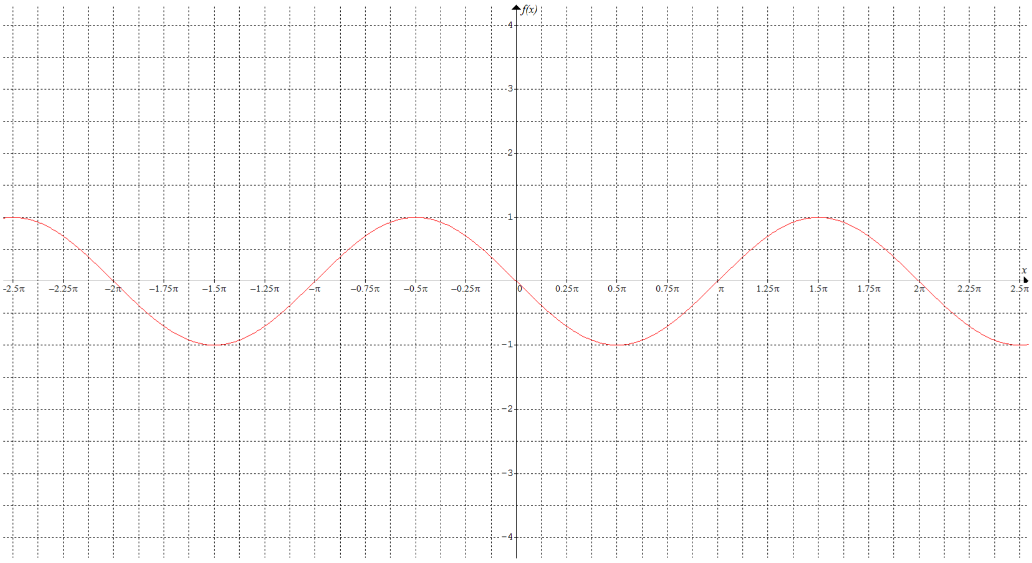


Figura 11. Primera operación $f\left(x\right)=-sen\ x$

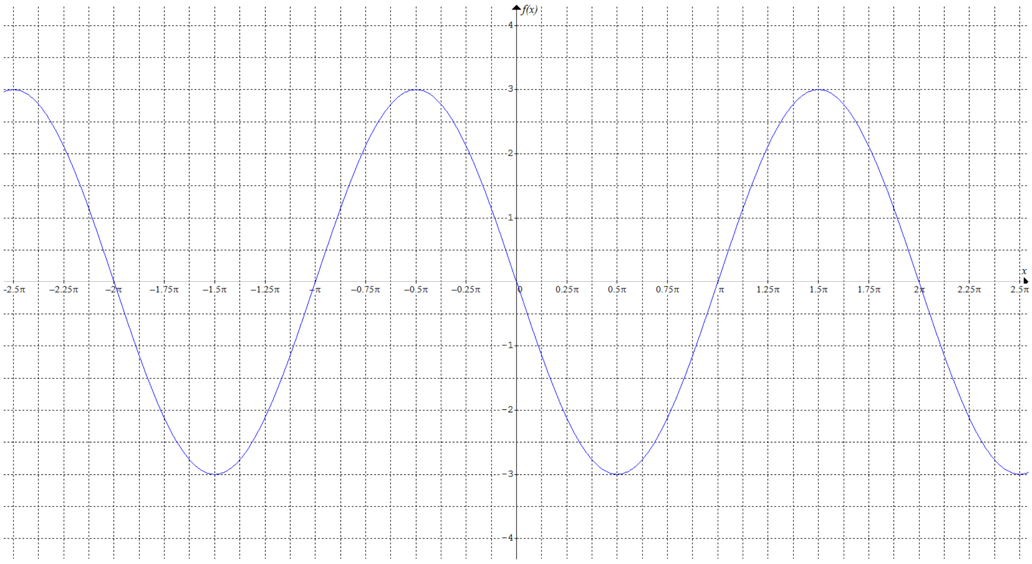


Figura 12. Segunda operación $f(x) = -3 \cdot sen\ x$

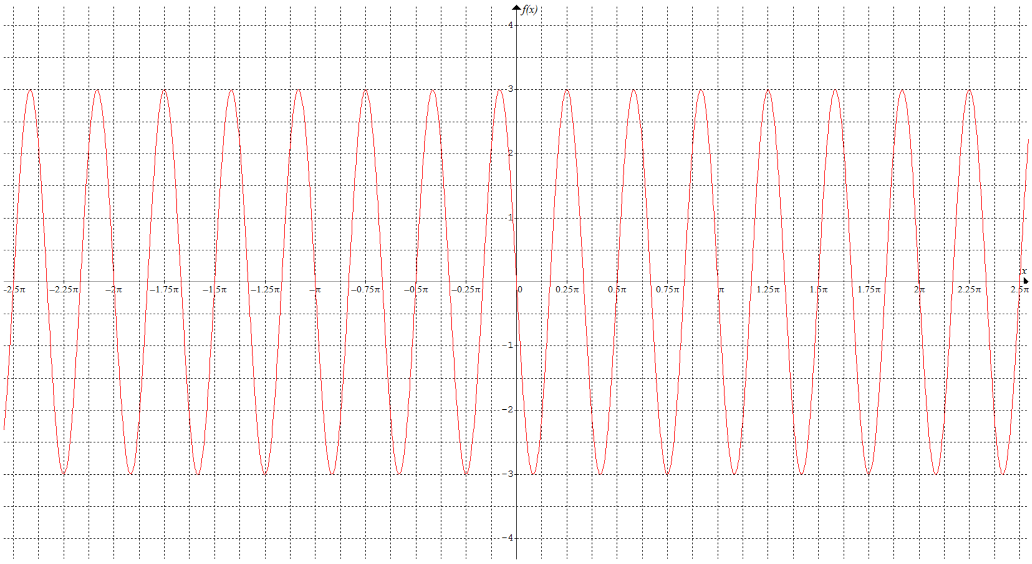


Figura 13. Tercera operación $f(x) = -3 \cdot sen\ 6x$

Comentar que en particular con las ondas senoidales, dado que $sex(-Bx) = -sen\ Bx$, entonces para reflejar a la onda respecto a su línea de equilibrio, se puede cambiar el signo del parámetro A o del parámetro B, pero no de ambos, ya que $-sen(-Bx) = sen\ Bx$.

Por lo anterior, otra respuesta podría la que se exhibe en la figura 14.

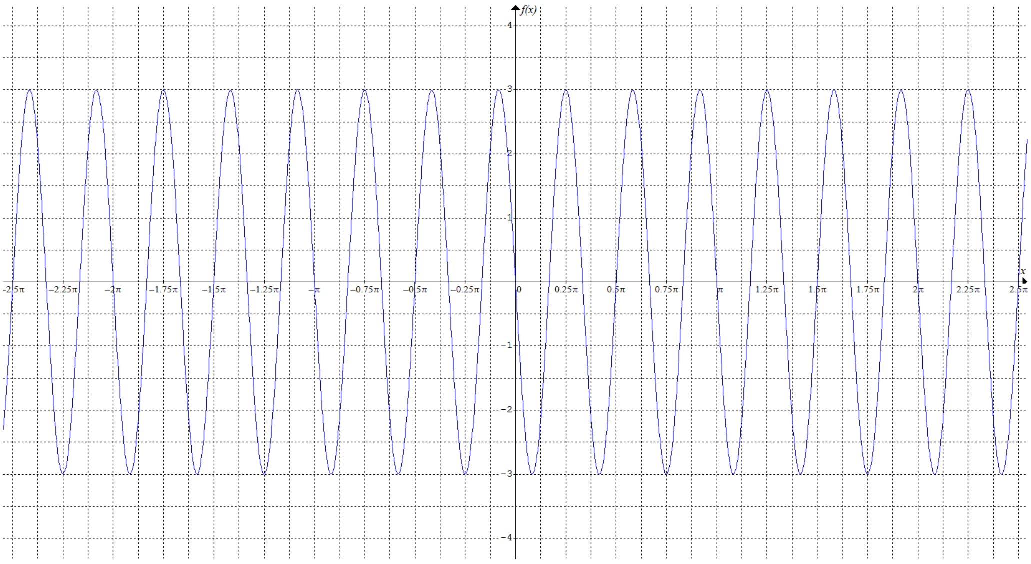
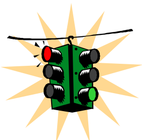


Figura 14. $f\left(x\right)=3\cdot sen\left(-6x\right)$

Para terminar proponer el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

17. Reflexión de una onda senoidal con respecto a su línea de equilibrio

Para reflejar una onda senoidal con respecto a su línea de equilibrio, bastará con cambiar el signo del parámetro A o del parámetro B, pero no ambos, de la función correspondiente.