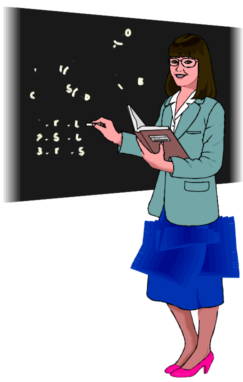
SENO Y COSENO PARA UN ÁNGULO EN EL PLANO CARTESIANO

Sugerencias para quien imparte el curso:

Se espera que con la propuesta didáctica presentada en conjunción con los aprendizajes que sobre el estudio de la trigonometría tienen los alumnos, estos logren una comprensión aceptable del concepto de función trigonométrica, de la propuesta se puede concluir que no basta con escribir definiciones en el pizarrón y exhibir algunos ejemplos para que los conceptos queden asimilado, el profesor o profesora debe planear una estrategia de enseñanza y aprendizaje que permita el desarrollo de habilidades que garanticen su comprensión y no su sola memorización, lo anterior bajo la premisa de que la enseñanza de las funciones trigonométricas es porque permiten resolver problemas de fenómenos periódicos.

Propósitos:

1. Introducir los conceptos, triángulo de referencia y ángulo de referencia.
2. Obtener el valor del seno y del coseno para la medida de un ángulo en el plano cartesiano.
3. Ampliar el seno y coseno de ángulos agudos a cualquier medida.



EL PROBLEMA DE LA PARTÍCULA

Una partícula en movimiento sigue en el plano cartesiano una trayectoria dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

Si parte del punto $A(5,0)$ en dirección contraria a las manecillas del reloj y se detiene en el punto B a una distancia de 3π unidades, ¿cuál es su nueva posición en el plano?

Con el propósito que los alumnos representen con alguna figura geométrica la situación planteada en el problema preguntar:

1. ¿Qué figura geométrica corresponde a la ecuación de la trayectoria que sigue la partícula?

Luego programar las preguntas siguientes:

2. ¿De qué longitud es la circunferencia?
3. ¿Cuál es la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$?
4. ¿Cuál es la medida x del ángulo central que lo subtiende?
5. ¿En qué cuadrante estará el punto B?
6. ¿Cuáles podrían ser las coordenadas del punto B?

Los alumnos propondrán respuestas para la pregunta 6, las cuales quedarán anotadas en el pizarrón en espera de conocer cuál es la correcta.

Para encontrarla, primero proceder a extender el concepto de las razones trigonométricas seno y coseno para ángulos agudos a cualquier ángulo.

Para ello iniciar con un ángulo positivo en el plano cartesiano que esté en el primer cuadrante, correspondiente a ángulos agudos.

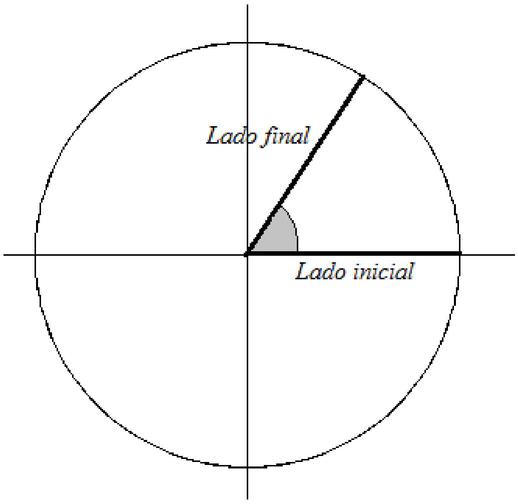
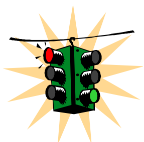


Figura 1



Concepto clave:

8. Triángulo y ángulo de referencia

Si en la figura 1 se identifica al punto sobre la circunferencia del lado final del ángulo con $P(a,b)$ y se traza desde dicho punto una perpendicular hasta el eje de abscisas en el punto Q, se formará el triángulo OQP rectángulo llamado triángulo de referencia y al ángulo agudo con vértice en el origen se le conoce como ángulo de referencia, como se muestra en la figura 2.

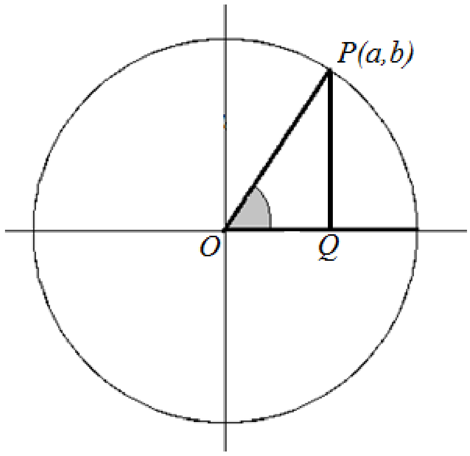


Figura 2

De la figura 2, pedir las longitudes de los lados del triángulo de referencia:

$$\overline{OQ} = \_\_\_\_\_ ,\ \overline{PQ} = \_\_\_\_ \text{ y } \overline{OP} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Si en este caso se representa con x a la medida del ángulo de referencia y con r la longitud de la hipotenusa, entonces el triángulo de referencia es el de la figura 3.

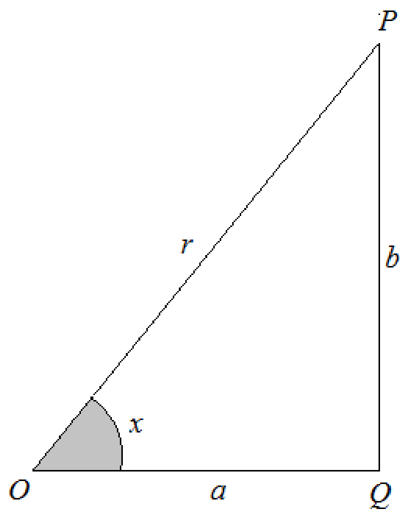


Figura 3

Pedir a los alumnos que apliquen las razones trigonométricas seno y coseno al ángulo de referencia de medida x, para obtener:

$$sen\ x = \frac{b}{r} = \frac{ordenada\ del\ punto\ P}{distancia\ del\ origen\ al\ punto\ P}$$

$$cos\ x = \frac{a}{r} = \frac{abscisa\ del\ punto\ P}{distancia\ del\ origen\ al\ punto\ P}$$

Para un ángulo de segundo cuadrante, el punto sobre la circunferencia será $P(-a,b)$ por lo que cambia la posición del triángulo y la medida del ángulo de referencia, tal como aparece en la figura 4.

Preguntar:

7. ¿Por qué la medida del ángulo de referencia es $\pi - x$?

Los alumnos obtendrán al aplicar las razones trigonométricas seno y coseno al ángulo de referencia para obtener que $sen\ (\pi - x) = \frac{b}{r}$ y que $cos\,(\pi - x) = \frac{a}{r}$.

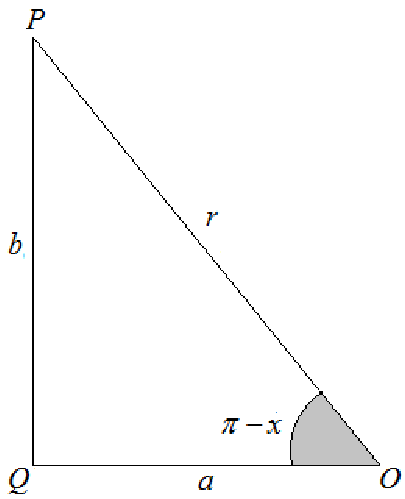


Figura 4

Quien imparte el curso decidirá si propone valores para x *con el fin de que los alumnos, con ayuda de la calculadora verifiquen que* $sen(\pi - x) = sen\ x$ *y que* $cos(\pi - x) = -cos\ x$, *o remitirse a la demostración propuesta en la sesión 3.6 del libro propuesto como bibliografía básica, para finalmente obtener los resultados mostrados a continuación.*

De la primera identidad se concluye que:

$$sen\ x = \frac{b}{r} = \frac{ordenada\ del\ punto\ P}{distancia\ del\ origen\ al\ punto\ P}$$

De la segunda identidad se concluye que:

$$cos\ x = -\frac{a}{r} = \frac{-a}{r} = \frac{abscisa\ del\ punto\ P}{distancia\ del\ origen\ al\ punto\ P}$$

En la figura 5 se muestra el triángulo y el ángulo de referencia, cuando el ángulo está en el tercer cuadrante, para el cual el punto sobre la circunferencia será $P(-a,-b)$.

Como en el caso anterior, primero verificar o demostrar que $sen(x-\pi) = -sen\ x$ *y que* $cos(x-\pi) = -cos\ x$*, para que con ayuda de estas identidades los alumnos concluyan que también se cumple con lo siguiente:*

$$sen\ x = \frac{ordenada\ del\ punto\ P}{distancia\ del\ origen\ al\ punto\ P}$$

$$cos\ x = \frac{abscisa\ del\ punto\ P}{distancia\ del\ origen\ al\ punto\ P}$$

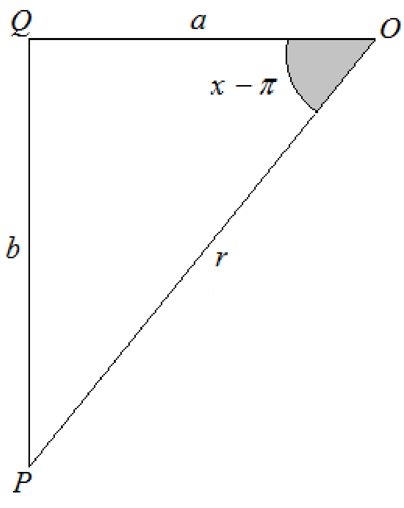


Figura 5

Antes de mostrar el triángulo y ángulo de referencia, cuando el ángulo sea de cuarto cuadrante, dar tiempo a los alumnos para que ellos lo realicen, al final deberán tener la situación plasmada en la figura 6.

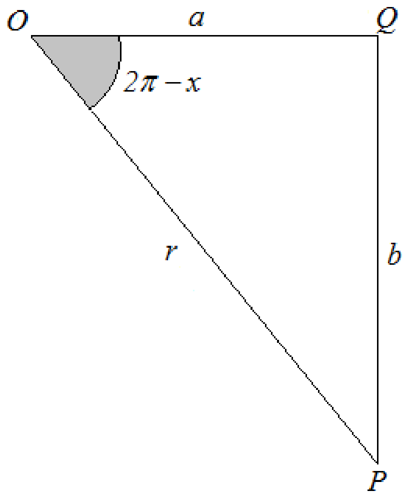
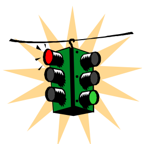


Figura 6

Con este modelo geométrico y la pareja de identidades trigonométricas $sen(2\pi - x) = -sen\ x$ y $cos(2\pi - x) = cos\ x$, los alumnos deberán obtener exactamente la misma conclusión que en los casos anteriores, con lo cual se establecerá el concepto clave 9.



Concepto clave:

9. El valor del seno y del coseno de la medida de un ángulo en el plano cartesiano

Sin importar en que cuadrante se encuentre el punto P de la circunferencia, se cumple que:

$$sen\ x = \frac{ordenada\ del\ punto\ P}{distancia\ del\ origen\ al\ punto\ P}$$

$$cos\ x = \frac{abscisa\ del\ punto\ P}{distancia\ del\ origen\ al\ punto\ P}$$

De esta manera se ha logrado ampliar el concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo a un ángulo cualquiera.

Si se desea se puede ejemplificar como encontrar el valor de seno y coseno para la medida x *del ángulo cuyo lado final contiene al punto* P *de coordenadas e inclusive encontrar el valor de* x.

Por ejemplo, si el punto $P(-15,-8)$ pertenece al lado final de un ángulo en el plano cartesiano, encuentra:

a) El valor del seno y del coseno para la medida x de dicho ángulo.
b) La medida x del ángulo, en radianes y en grados.

La distancia del origen al punto P es $r = 17$, preguntar ¿por qué?

Por el concepto clave 8, se concluye que $sen\,x = -\dfrac{8}{17}$ y $cos\,x = -\dfrac{15}{17}$.

Señalar que el valor del seno y del coseno, también pueden ser negativos, dependiendo del cuadrante donde se encuentre el ángulo.

Para obtener la medida del ángulo, preguntar en que cuadrante está y apoyarse de la figura del triángulo y ángulo de referencia correspondiente, en este caso de la figura 5.

Con seno, $sen(x-\pi) = \dfrac{8}{17}$, de donde $x - \pi = sen^{-1}\left(\dfrac{8}{17}\right)$ y por lo tanto, $x = sen^{-1}\left(\dfrac{8}{17}\right) + \pi = 3.63154998$ radianes.

Con coseno, $cos(x-\pi) = \dfrac{15}{17}$, de donde $x - \pi = cos^{-1}\left(\dfrac{15}{17}\right)$ y por lo tanto, $x = cos^{-1}\left(\dfrac{15}{17}\right) + \pi = 3.63154998$ radianes.

Al pedir que verifiquen con la calculadora que en efecto $sen(3.63154998) = -\dfrac{8}{17}$ y $cos(3.63154998) = -\dfrac{15}{17}$, tal vez sea necesario por su importancia, recordarles que la calculadora debe estar en modo Rad y explicarles cómo hacerlo.

Si al resultado anterior se le aplica el concepto clave 6 obtendrán que la medida en grados del ángulo es de $208°4´20.95´´$. Pedir que verifiquen con su calculadora que en efecto, $sen(208°4´20.95´´) = -\dfrac{8}{17}$ y $cos(208°4´20.95´´) = -\dfrac{15}{17}$, indicándoles que la calculadora debe estar en modo Deg.

Ejercicio 1. Encuentra el valor de seno y coseno para la medida x del ángulo cuyo lado final contiene al punto P y la medida del ángulo, en radianes y en grados.

a) $P(-4,3)$

b) $P(-7,-24)$

Ahora se está en condiciones para que respondan el problema inicial, porque de la respuesta a la pregunta **3** que $\widehat{AB} = 3\pi$, de la respuesta a la pregunta **4** que $x = \dfrac{3\pi}{5}$ y como consecuencia del concepto clave 8, se concluye lo siguiente:

Abscisa del punto $B = 5 \cdot cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = -1.545084972$

Ordenada del punto $B = 5 \cdot sen\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = 4.755282581$

Para terminar la sección, los alumnos deberán probar que en efecto el punto encontrado $B(-1.545084972, 4.755282581)$ pertenece a la circunferencia dada en el problema.