LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Sugerencias para quien imparte el curso:

Por ningún motivo se debe dar por hecho que todos los alumnos recuerdan perfectamente a las razones trigonométricas, así que es recomendable reforzar tal concepto. Si por circunstancias de tiempo no se considera factible llevarlo a cabo en el salón de clase, se podría pedir a los alumnos que como trabajo extra clase realicen las actividades expuestas en esta sección.

Propósitos:

1. Reafirmar el concepto de razón trigonométrica.
2. Aplicar las razones trigonométricas en la resolución de problemas relativos al cálculo de distancias inaccesibles.

EL PROBLEMA DE LAS ANTENAS

Dos antenas de radio $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, la primera con una altura de 75 metros y la segunda con una altura de 100 metros están sujetas por cables tal como se muestra en la figura 1.

Si $\measuredangle PAQ = 60°$, $\measuredangle QBP = 30°$, $\measuredangle BSR = 45°$ y $\measuredangle RSC = 30°$ calcula la longitud de cada cable que sujeta a las antenas y la distancia que hay desde el punto A hasta el punto C.

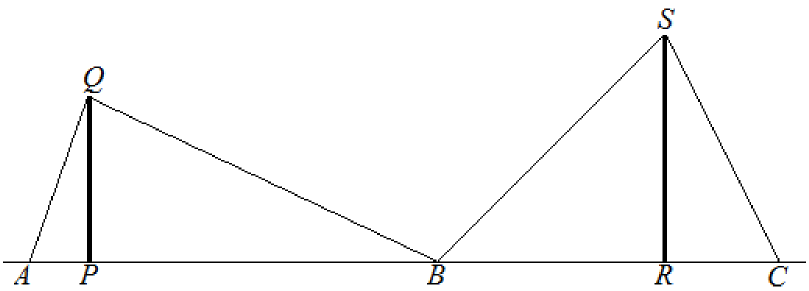


Figura 1

En todo el desarrollo de la propuesta se plantea establecer un diálogo entre quien imparte el curso y los alumnos, sobre la base de una serie de preguntas que *guían el camino hacia la solución del problema o al establecimiento de algún concepto clave.*

Las secuencias sugeridas describen cómo pueden aplicarse algunas experiencias de enseñanza y aprendizaje que han sido puestas en práctica con buenos resultados en el salón de clase, sin embargo deben ser aplicadas con sensatez, ser evaluadas y adaptadas a las condiciones de cada grupo.

Preguntar para los triángulos rectángulos:

1. ¿Qué resultado matemático relaciona a las longitudes de sus tres lados?
2. ¿Qué resultados matemáticos relacionan a la medida de alguno de sus ángulos interiores agudos con las longitudes de cualquier par de sus lados?

La primera dificultad que podría surgir es que algunos alumnos no recuerden cuál concepto relaciona a la medida de un ángulo interior agudo de un triángulo rectángulo con las longitudes de un par de sus lados y cómo lo hace, por lo que habría de planearse que a través de las orientaciones en la búsqueda de la respuesta al problema de las antenas y una breve discusión grupal se vayan obteniendo distintas formas de relacionarlos, para asignar sus nombres habituales e introducirlas como conceptos clave, y no dar simplemente un listado de ellas.

Por ejemplo, si de la figura 1 extraemos el triángulo rectángulo APQ y deseamos calcular la longitud del lado $\overline{AQ}$ que representa a uno de los cables que sujeta a la antena $\overline{PQ}$, ¿cómo se puede relacionar la cantidad desconocida $\overline{AQ}$ con el par de cantidades conocidas $\measuredangle A$ y $\overline{PQ}$, en el triángulo de la figura 2?

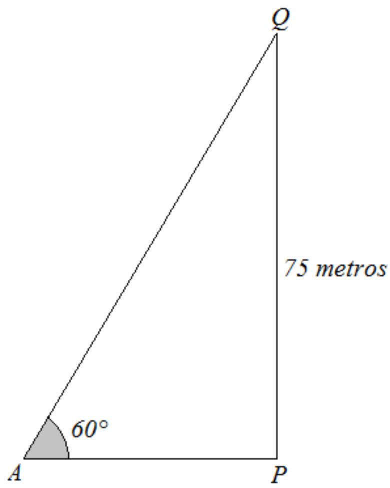
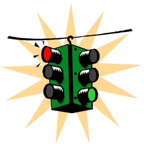


Figura 2

Es importante crear un ambiente donde el alumno tenga oportunidades para exponer los conocimientos y habilidades que traen de cursos anteriores para aprender y comprender los nuevos conceptos.

Es muy probable que surja en la discusión la respuesta correcta, lo cual implicará implantar en este momento el primer concepto clave.



Concepto clave:

1. Razón trigonométrica seno.

Si θ es la medida de algún ángulo interior agudo en cualquier triángulo rectángulo, entonces a la razón que hay de la longitud del cateto opuesto al ángulo a la longitud de la hipotenusa se le llama razón trigonométrica seno.

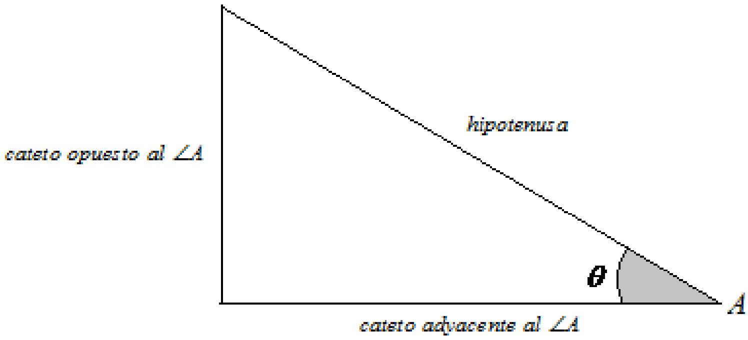


Figura 3

En el triángulo de la figura 3, $sen\ \theta = \dfrac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ al\ \angle A}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$

Después de concluir mediante el concepto clave 1 que $sen\ 60° = \dfrac{75}{\overline{AQ}}$, pedir que se despeje $\overline{AQ}$ y preguntar:

3. Sin utilizar calculadora o tabla trigonométrica, ¿cómo se puede obtener el valor del seno de un ángulo de $60°$?

En este punto es muy probable que surja otra dificultad, ya que generalmente los alumnos están acostumbrados al uso de la calculadora, por lo que la sugerencia es proponer a los alumnos realizar la siguiente construcción geométrica, de preferencia utilizando regla y compás.

Paso 1. Construye un triángulo ABC equilátero, como se muestra en la figura 4, cada alumno indicará la longitud del lado en su triángulo.

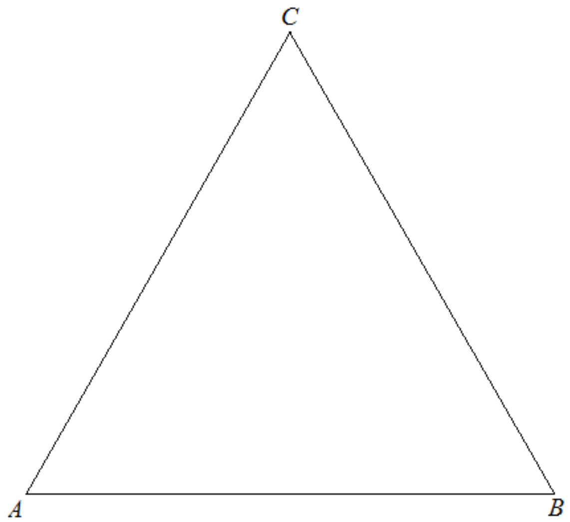


Figura 4

Preguntar:

4. En un triángulo equilátero, ¿Cuánto mide cada ángulo interior?

Paso 2. Traza la bisectriz $\overline{CM}$ del $\angle C$

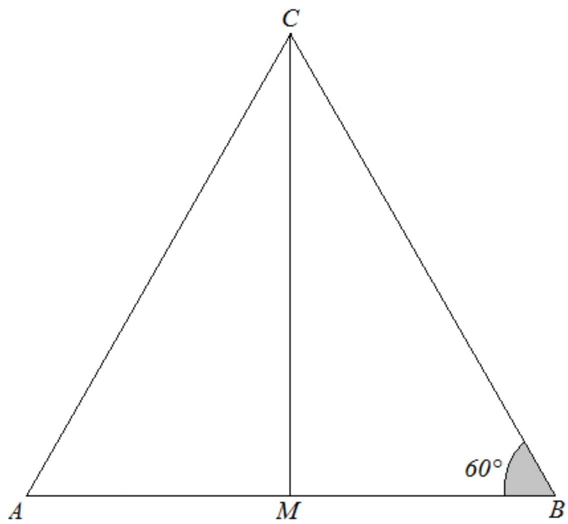


Figura 5

Preguntar:

5. ¿Qué puedes afirmar del punto M de la figura 5? ¿Por qué?
6. ¿Qué tipo de triángulo es el ΔMBC en la figura 5? ¿Por qué?

7. Considerando el ΔMBC de la figura 5, ¿Cuál es la longitud del lado $\overline{MB}$ en dicho triángulo?
8. ¿Cuál es la longitud del cateto $\overline{MC}$ en el ΔMBC de la figura 5?
9. Considerando el ΔMBC y el concepto clave 1, ¿cuál es el valor para el seno de $60°$?

Comparar las respuestas obtenidas por los alumnos para verificar que todos tienen el mismo resultado, lo cual mostrará que cuando se establece el valor de la medida del ángulo, el valor de la razón trigonométrica seno también quedará establecida, sin importar la longitud qué tengan el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa. Por lo tanto, este valor puede determinarse a partir de la medida del ángulo sin importar qué tan grande o pequeño sea el triángulo.

Si se desea se puede recurrir a la siguiente deducción, lo cual refuerza la afirmación anterior.

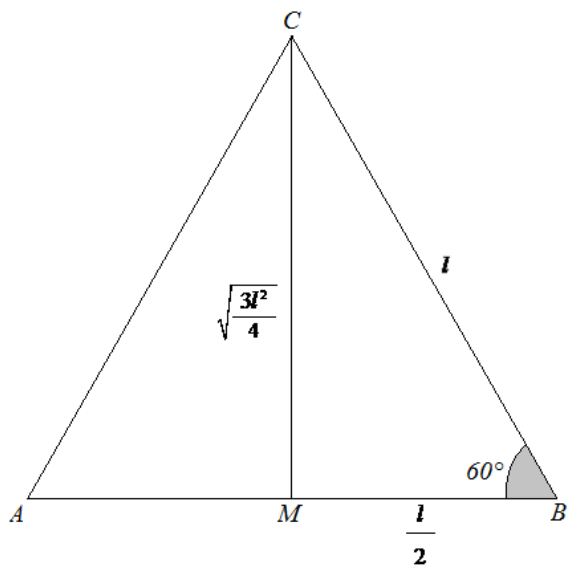


Figura 6

Si en el triángulo equilátero ABC la longitud del lado $\overline{BC} = l$ y $\overline{MC}$ es la bisectriz del $\angle C$, entonces $\overline{MC}$ es también la mediatriz del lado $\overline{AB}$, M es el punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{MB} = \frac{l}{2}$ y $\overline{MC} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$ como se indica en la figura 6.

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{\frac{3l^2}{4}}}{l} = \frac{\frac{\sqrt{3l^2}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3l^2}}{2l} = \sqrt{\frac{3l^2}{4l^2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cabe insistir que mientras que la medida del ángulo no cambie, este valor no cambiará, incluso si el tamaño del triángulo cambia.

Por lo tanto, la longitud del cable $\overline{AQ}$ que sujeta a la antena $\overline{PQ}$ es:

$\overline{AQ} = \dfrac{75}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$ metros, esto es aproximadamente 86.60 metros.

Considerando el triángulo de figura 7 y procediendo de manera semejante, se concluye que la longitud del otro cable que sujeta a la antena $\overline{PQ}$ se obtiene de la relación que se obtiene de aplicar la razón trigonométrica seno al $\angle B$ de medida $30°$.

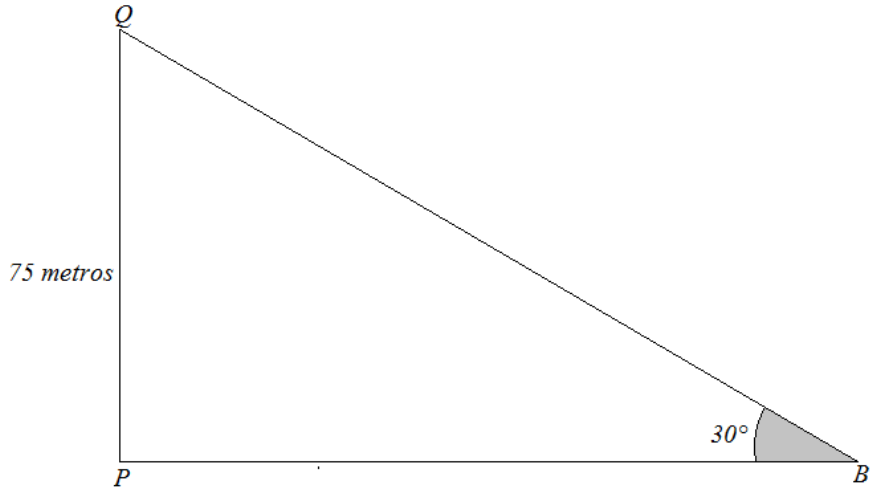


Figura 7

Los alumnos deberán concluir que si $sen\ 30° = \dfrac{75}{\overline{BQ}}$, entonces la longitud del cable $\overline{BQ}$ será igual a $\dfrac{75}{sen\ 30°}$.

Para obtener el valor del seno de $30°$, sin calculadora ni tabla trigonométrica, remitirse al ΔMBC de la figura 6 donde $\measuredangle MCB = 30°$ para concluir que:

$sen\ 30° = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{l}{2l} = \dfrac{1}{2}$, recalcar otra vez que no importa qué tan grande o pequeño sea el triángulo.

Así que la longitud del cable $\overline{BQ} = \dfrac{75}{\frac{1}{2}} = 150$ metros.

El siguiente cable a determinar su longitud podría ser el cable $\overline{BS}$ que sujeta a la antena $\overline{RS}$ de altura 100 metros, sabiendo que el ΔBRS de la figura 8 es un triángulo rectángulo y que $\measuredangle S = 45°$.

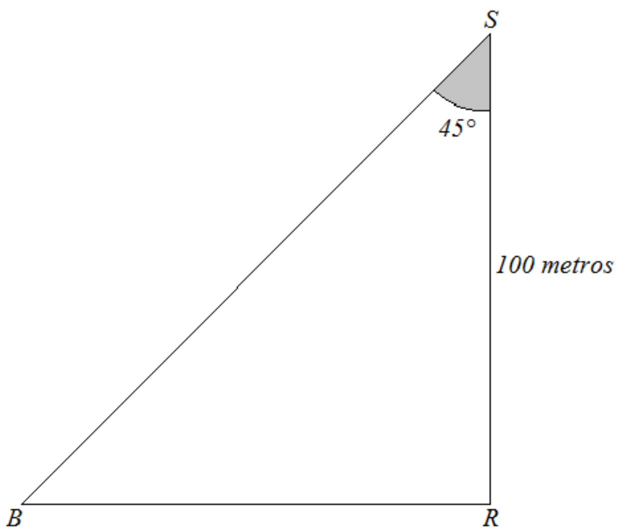


Figura 8

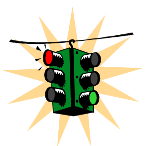
Preguntar:

10. ¿Será válido relacionar a las cantidades conocidas $\measuredangle S$ y $\overline{RS}$ con la cantidad desconocida $\overline{BS}$ del triángulo de la figura 8 mediante la razón trigonométrica seno?

Se espera que la mayoría de los alumnos respondan que no, entonces plantear la pregunta:

11. ¿De qué manera se puede establecer dicha relación?

Como en el caso de la razón trigonométrica seno en la discusión grupal para concretar la respuesta correcta, permitirá establecer ahora el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

2. Razón trigonométrica coseno.

Si θ es la medida de algún ángulo interior agudo en cualquier triángulo rectángulo, entonces a la razón que hay de la longitud del cateto adyacente al ángulo a la longitud de la hipotenusa se le llama razón trigonométrica coseno.

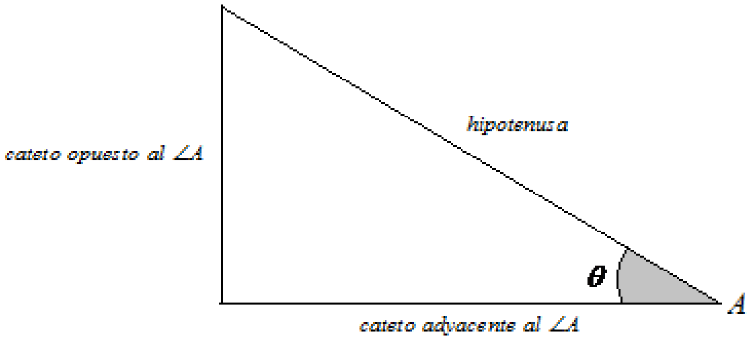


Figura 9

En el triángulo de la figura 9, $cos\ \theta = \dfrac{longitud\ del\ cateto\ adyacente\ al\ \angle A}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$

Posteriormente de que mediante el concepto clave 2 se concluya que $cos\ 45° = \dfrac{100}{\overline{BS}}$, pedir que se despeje $\overline{BS}$ y preguntar:

12. Sin utilizar calculadora o tabla trigonométrica, ¿cómo se podrá obtener el valor del coseno de un ángulo de $45°$?

Es de esperarse por la experiencia adquirida en los casos anteriores, que existan alumnos que propongan la construcción de algún triángulo con uno de sus ángulos interiores de $45°$.

Al surgir la propuesta orientar la construcción de dicho triángulo y preguntar:

13. Si el triángulo a construir debe ser rectángulo, ¿qué otra condición deberá cumplir para lograr que uno de sus ángulos interiores sea de $45°$?

14. Si el triángulo rectángulo de la figura 10 es isósceles y la longitud del cateto $\overline{AB}$ es l, ¿cuál es la longitud de su hipotenusa?

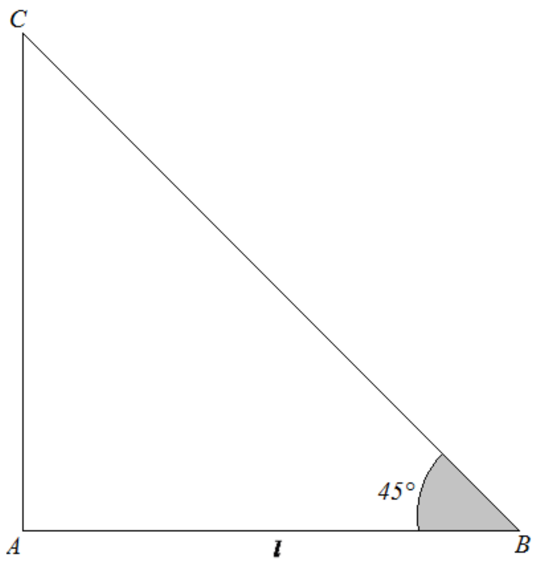
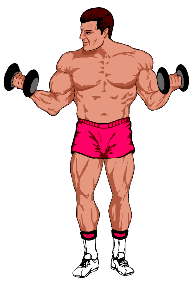


Figura 10

Pedir que se aplique el concepto clave 2 al triángulo de la figura 10, para obtener el valor del coseno de un ángulo de $45°$.

Una respuesta posible es $cos\ 45° = \frac{l}{\sqrt{2l^2}} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

En consecuencia, $\overline{BS} = \frac{100}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 100\sqrt{2}$ metros, que son aproximadamente 141.42 metros.



Ejercicio 1

a) Utiliza el triángulo rectángulo MBC de la figura 6, para obtener el valor del coseno de un ángulo de $30°$ y del coseno de un ángulo de $60°$, observa que $\measuredangle MCB = 30°$.

b) Utiliza el triángulo rectángulo de la figura 10 para obtener el valor del seno de un ángulo de $45°$.

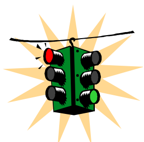
c) Obtén la longitud del cable $\overline{SC}$ que sujeta a la antena $\overline{RS}$

Para calcular la distancia que hay desde el punto A hasta el punto C de la figura 1, hacer notar que $\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BR} + \overline{RC}$.

Preguntar:

15. Si para obtener la distancia $\overline{AP}$ hacemos uso del triángulo de la figura 2 con la información anotada, entonces mediante cuál razón trigonométrica se logrará relacionar la cantidad desconocida $\overline{AP}$ con las cantidades conocidas $\overline{PQ}$ y $\measuredangle A$, ¿con razón trigonométrica seno o con la razón trigonométrica coseno?

La anterior pregunta es para promover la discusión y concluir la existencia de una tercera razón trigonométrica, e incluirla como un nuevo concepto clave.



Concepto clave:

3. Razón trigonométrica tangente.

Si θ es la medida de algún ángulo interior agudo en cualquier triángulo rectángulo, entonces a la razón que hay de la longitud del cateto opuesto al ángulo a la longitud del cateto adyacente al ángulo se le llama razón trigonométrica tangente.

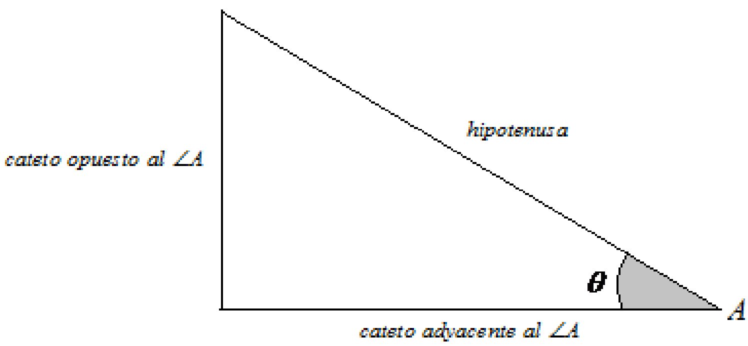


Figura 11

En el triángulo de la figura 11, $tan\ \theta = \dfrac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ al\ \angle A}{longitud\ del\ cateto\ adyacente\ al\ \angle A}$

Después de aplicar el concepto clave 3 al triángulo de la figura 2, pedir que despejen de la relación a la longitud del segmento $\overline{AP}$.

Solicitar que obtengan el valor de la tangente de un ángulo de $60°$ a partir del triángulo rectángulo MBC que aparece en la figura 6, para finalmente obtener que $\overline{AP} = \dfrac{75}{tan\,60°} = \dfrac{75}{\sqrt{3}} = 25\sqrt{3}$ metros, que son aproximadamente 43.30 metros.

Ejercicio 2

a) Haciendo uso del triángulo rectángulo MBC de la figura 6, encuentra el valor de la tangente de un ángulo de $30°$.

b) Por medio del triángulo rectángulo de la figura 10, obtén el valor de la tangente para un ángulo de $45°$.

c) Apoyándote del triángulo de la figura 7 y aplicando alguna razón trigonométrica, encuentra la longitud del segmento $\overline{PB}$.

d) A partir del triángulo de la figura 8 y utilizando alguna razón trigonométrica, calcula la longitud del segmento $\overline{BR}$.

e) Calcula la longitud del segmento $\overline{RC}$ de la figura 1.

f) ¿Cuál es la distancia desde el punto A hasta el punto C en la figura 1?

Se puede planear como trabajo extra clase para los alumnos, indagar cuáles son las razones trigonométricas faltantes y qué relación tienen con las ya expuestas en la sección, seno, coseno y tangente, para establecer las identidades trigonométricas recíprocas:

$$csc\,\theta = \frac{1}{sen\ \theta},\ \ sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}\ \ y\ \ cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta}$$

Para cerrar la sección, le corresponderá a quien imparte el curso, proponer la resolución de problemas, que puede tomar de cualquier texto de Trigonometría.