FENÓMENOS PERIÓDICOS RELACIONADOS CON EL TIEMPO

Sugerencias para quien imparte el curso:

Hay que enfatizar el aspecto utilitario de las funciones trigonométricas, haciendo ver que ante la necesidad de resolver problemas de fenómenos periódicos que dependen del tiempo surge la necesidad de aplicar la noción de velocidad angular, que es donde el concepto de función trigonométrica encuentra su principal característica para la resolución de problemas con carácter cíclico en la vida cotidiana. Es responsabilidad de quien imparte el curso no dejar a los alumnos con la creencia que las funciones trigonométricas son simplemente fórmulas carentes de significado y alejadas de la realidad.

Propósitos:

1. Indagar qué cambio sufre la regla de correspondencia de una función senoidal o cosenoidal cuando se considera al tiempo como variable independiente.
2. Conocer el significado de periodo y frecuencia en las ondas relacionadas a fenómenos periódicos relacionados con el tiempo.
3. Reforzar los conceptos de velocidad y velocidad angular.
4. Establecer la relación que hay el periodo y la frecuencia de una onda.

EL PROBLEMA DEL RELOJ

Si las longitudes de las manecillas de un reloj de pared son, 7, 4.5 y 8.5 centímetros para el segundero, el minutero y de las horas, respectivamente, y sus movimientos se describen con una onda senoidal, determina para cada una:

a) Su amplitud
b) Su periodo
c) Su frecuencia
d) La velocidad a la que gira
e) La función que representa a su movimiento.

En la secuencia didáctica para arribar a la respuesta al problema, se sugiere estudiar cómo cambiará la función $f(x) = A \cdot sen\ x$ *con respecto al tiempo.*

En otras palabras, analizar cómo cambiar el eje horizontal x al tiempo t.

Puesto que las manecillas de un reloj están rotando a una velocidad constante, preguntar:

1. ¿Cuánto tarda el segundero en dar una vuelta completa?
2. ¿Cuánto tarda el minutero en dar una vuelta completa?
3. ¿Cuánto tarda la manecilla de las horas en dar una vuelta?

De las respuestas se asumirán las siguientes conclusiones:

a) Al segundero le corresponderá una onda que oscile una vez por minuto.
b) Al minutero le corresponderá una onda que oscile una vez por hora.
c) A la manecilla le corresponderá una onda que oscile una vez cada doce horas.

Luego de establecer que en este contexto, el tiempo en segundos que le lleva a una onda oscilar una vez es el periodo, preguntar:

4. ¿Cuál es el periodo para la onda del segundero? Es decir, ¿cuántos segundos le lleva completar una oscilación?
5. ¿Cuál es el periodo para la onda del minutero?
6. ¿Qué periodo tendrá onda de la manecilla para las horas?

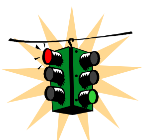
Las ondas tendrán patrones de oscilación distintos, ya que oscilan más o menos veces por unidad de tiempo y también la amplitud de cada una de ellas será diferente, pues dependen de la longitud de la manecilla correspondiente.

Por otro lado, indicar que el número de veces que una onda oscila en un segundo es la frecuencia y que la unidad es el hertzio (Hz *), preguntar:*

7. Una onda con una frecuencia de $20Hz$, ¿cuántas veces oscila en un segundo?

8. Una onda con una frecuencia de $\frac{1}{2}Hz$, ¿cuántas veces oscila en un segundo?

Dejar estas nuevas nociones resumidos en el siguiente concepto clave:



Concepto clave

21. Periodo y frecuencia de una onda relacionada a un fenómeno periódico relacionado con el tiempo

El periodo P es el tiempo en segundos que le toma a la onda hacer una oscilación completa.

La frecuencia f es el número de veces que oscila una onda en un segundo, en Hz.

Afirmar que el periodo y la frecuencia están relacionados entre sí, y con el propósito de descubrir cómo se relacionan, preguntar:

9. ¿Cuál es la frecuencia de una onda con periodo 1, es decir que se tarda un segundo en oscilar una vez?

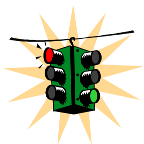
10. ¿Cuál es la frecuencia de una onda con periodo 2, es decir que se tarda dos segundos en oscilar una vez?

11. ¿Cuál es la frecuencia de una onda con periodo $\frac{1}{3}$, es decir que se tarda un tercio de segundo en oscilar una vez?

12. ¿Cuál es el periodo de una onda que tiene una frecuencia de $2Hz$, o sea que oscila dos veces en un segundo?

13. ¿Cuál es el periodo de una onda que tiene una frecuencia de $\frac{1}{3}Hz$, o sea que oscila un tercio en un segundo?

Una vez que se tengan las respuestas correctas, se podrá introducir el concepto clave que sigue.



Concepto clave

22. Relación entre el periodo y la frecuencia de una onda

Si una onda tiene periodo P y frecuencia f, entonces $P = \frac{1}{f}$ y $f = \frac{1}{P}$.

Es decir, que el periodo y la frecuencia son recíprocos.

Preguntar:

14. ¿Cuál es la frecuencia para el segundero del reloj? Es decir, ¿Cuántas veces oscila en un segundo?

15. ¿Cuál es la frecuencia del minutero?

16. ¿Qué frecuencia tiene la manecilla de las horas?

Es el momento de recordar que entre otras cosas, se desea permutar la x del eje de abscisas, cuando se propuso que el eje horizontal fuera el tiempo t.

Así que se está pensando en la rapidez a la que giran las manecillas del reloj, en otras palabras en la velocidad a la que cambia el ángulo x, es decir, la velocidad de rotación de las manecillas.

Para llegar a un resultado, preguntar:

17. Si en una prueba de atletismo recorres los 100 metros en 12.5 segundos, ¿cuál es tu velocidad por segundo?
18. Si un automóvil viaja de manera constante a una velocidad de 75 kilómetros por hora, en dos horas ¿cuántos kilómetros habrá recorrido?
19. ¿Qué resultado de la Física aplicaste para dar respuesta al par de preguntas anteriores?

Es posible que existan alumnos que no recuerden la relación que hay entre la velocidad, la distancia y el tiempo que estudiaron en sus cursos de Física, así que de ser necesario habrá de enunciarse para que respondan correctamente las preguntas anteriores.

Pero como en este momento se está interesado en saber cuántos radianes x rota un ángulo en un segundo, indicar que a esto se le llama velocidad angular y se representa con la letra griega ω (omega).

Si se aplica la anterior relación entre la velocidad, la distancia y el tiempo, tal que:

La distancia es el ángulo (en radianes) total rotado en un determinado tiempo t (en segundos).

La velocidad es el ángulo rotado en un segundo (en radianes por segundo).

El tiempo es t (en segundos).

Se concluye que la velocidad angular está dada por la relación $\omega = \frac{x}{t}$, donde la unidad de medida es rad / seg.

Resaltar que la velocidad angular ω es el ángulo rotado en un segundo y es independiente del tamaño de la circunferencia.

Preguntar:

20. Si en una prueba de atletismo a un participante le llevo 40 segundos recorrer una pista circular de 200 metros, ¿cuál fue su velocidad angular?
21. Si se supone que el sol sigue una trayectoria circular y le toma doce horas hacer su recorrido desde que sale hasta que se oculta, ¿cuál es su velocidad angular?
22. Para el segundero del reloj, ¿cuál es su velocidad angular? Es decir ¿cuál es la medida del ángulo rotado en un segundo?
23. ¿Cuál es la velocidad angular del minutero del reloj?
24. La manecilla de las horas del reloj, ¿a qué velocidad angular va?

Como de la relación para la velocidad angular se tiene que $x = \omega \cdot t$, se logra que la función $f(x) = A \cdot sen\ x$ cambie a la función que depende del tiempo $f(t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t)$, con parámetros A y ω.

Así que la función que representa al movimiento del segundero del reloj es $f(t) = 7 \cdot sen\ \dfrac{\pi t}{30}$, cuya gráfica está exhibida para los primeros sesenta segundos en la figura 1.

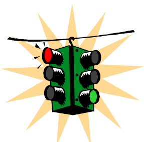
Figura 1

Preguntar:

25. ¿Cuál es la función senoidal que modela el movimiento del minutero del reloj?

26. ¿Qué función representa al movimiento de la manecilla de las horas del reloj?

Con las respuestas dadas a las preguntas sobre la velocidad angular de las manecillas del reloj, se sugiere hacer un breve análisis para ver que también se cumple que $\omega = 2\pi \cdot f$ *o que* $\omega = \dfrac{2\pi}{P}$ *e introducir el último concepto clave.*



Concepto clave:

23. Funciones trigonométricas correspondidas a fenómenos periódicos relacionados con el tiempo.

$f(t) = D + A \cdot sen(\omega \cdot t + C)$ o $f(t) = D + A \cdot sen(\omega \cdot t + C)$, donde $\omega = \dfrac{2\pi}{P}$

Se pueden trabajar fenómenos como los siguientes:

1. En la figura 1 se muestra la gráfica durante quince segundos de un adulto normal que aspira y exhala aire estando sentado.

Puede verse que la persona aspira y exhala 0.7 litros de aire cada 4 segundos, es decir que el fenómeno tiene un periodo $P = 4$ segundos, una frecuencia $f = \frac{1}{4} Hz$ y una velocidad angular $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad/seg.

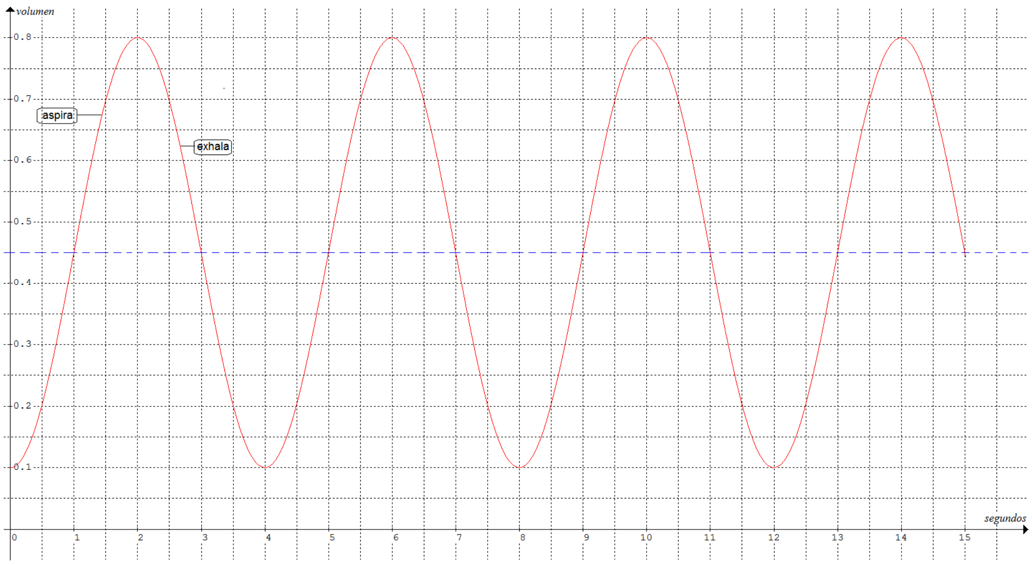


Figura 1

Ejercicio 1.

Si el volumen V de aire en los pulmones t segundos después de exhalar se puede determinar mediante una función de la forma $V(t) = D + A \cdot cos\ (\omega \cdot t + C)$, encuentra la función correspondiente a la onda graficada.

2. Si un generador de corriente alterna produce a los t segundos una corriente en amperes dada por la función $I(t) = 10 \cdot sen\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, ¿cuál es para la corriente generada su amplitud, su periodo y su

frecuencia, qué desfase tiene, y cuáles son las corrientes máxima y mínima que puede generar?

Como en la regla de correspondencia se observa que la función tiene parámetros $A = 10$, $\omega = 120\pi$ y $C = -\frac{\pi}{2}$, se concluye que la corriente generada:

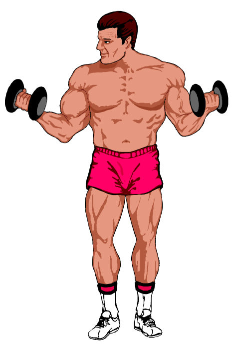
a) Tiene una amplitud de 10 amperes.

b) En este caso, el periodo estará dado por el valor de la razón $P = \frac{2\pi}{\omega}$, por lo que $P = \frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60}$, es decir que la corriente generada tarda $\frac{1}{60}$ segundos en completar un ciclo u oscilación completa.

c) Tiene una frecuencia de $60\ Hz$, lo cual indica que realiza 60 oscilaciones completas en un segundo.

d) Como el parámetro C es negativo, la onda tiene un desfase hacia la derecha y para calcular cuántas unidades está desfasada ahora hay que sustituir en la expresión $\left|\frac{C}{\omega}\right|$, el valor de los parámetros correspondientes. Por consiguiente, el desfase de la corriente es de $\left|\frac{-\frac{\pi}{2}}{120\pi}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{120\pi} = \frac{\pi}{240\pi} = \frac{1}{240}$ segundos.

e) Dado que el parámetro $D = 0$, se sigue que la línea de equilibrio es el eje de abscisas y como la amplitud es de diez amperes, la máxima corriente generada será de 10 amperes y la mínima de -10 amperes.



Ejercicio 2

En la figura 2 aparece la gráfica de la corriente eléctrica I, medida en amperes, producida por un generador de corriente alterna.

a) Crea mediante una expresión de la forma $I(t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t)$ a la función que describe a dicha corriente eléctrica, donde t es el tiempo en segundos.

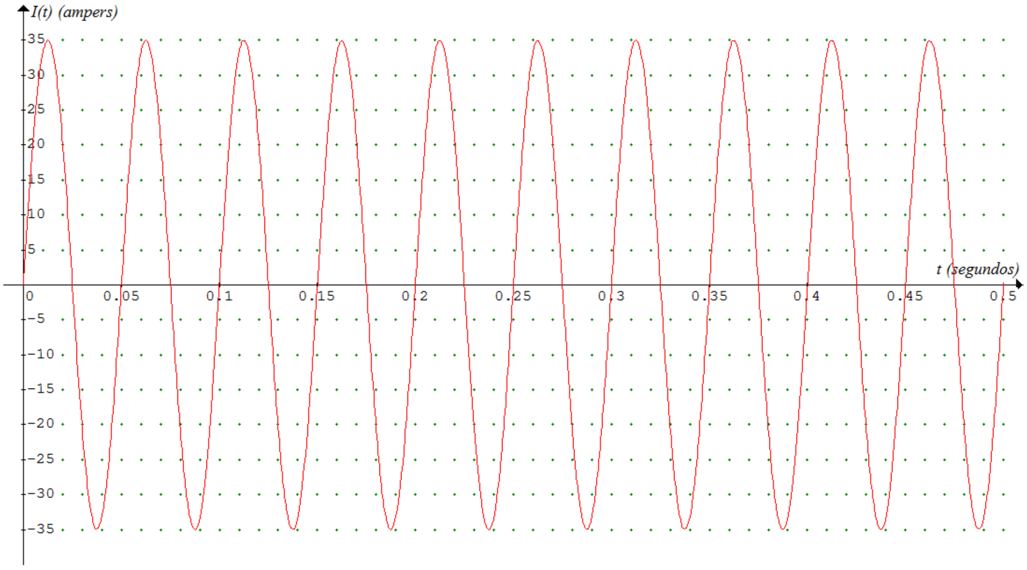
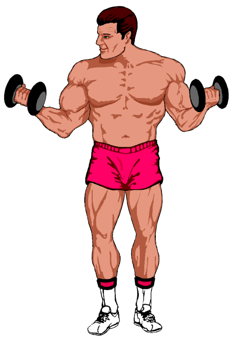


Figura 2



Ejercicio 3

Si el máximo y el mínimo voltaje E medido en voltios (V) en un circuito eléctrico son $12\ V$ y $-12\ V$, respectivamente, y tiene una frecuencia de $40\ Hz$, determina una expresión de la forma $E(t) = A \cdot cos\ (\omega \cdot t)$ que proporcione el voltaje en el circuito en cualquier tiempo t medido en segundos.

¿Cuál es el voltaje en el circuito a los 3 segundos y a los 2 minutos?

3. Un péndulo simple de treinta centímetros de longitud, empieza a oscilar después de que se lleva hacia la derecha de la posición de equilibrio O a la posición de inicio I, formándose un ángulo de $\frac{\pi}{6}$, como se muestra en la figura 2. Si se registraron treinta oscilaciones en cinco segundos, calcula la elongación del péndulo a los $\frac{7}{48}$ segundos.

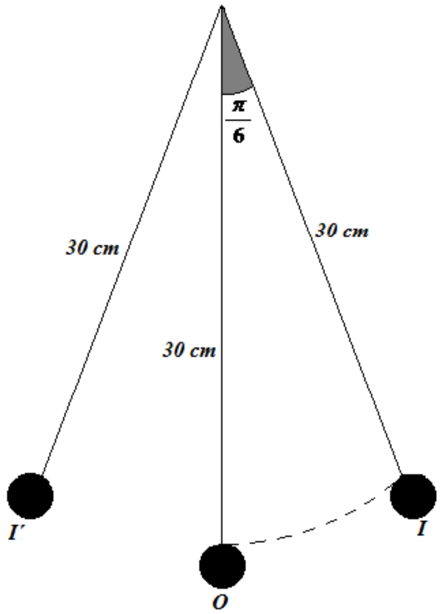


Figura 2

Para responder se deberá construir una función trigonométrica que dependa del tiempo

Preguntar:

27. ¿Qué tipo de movimiento es el movimiento de un péndulo simple y qué es su elongación?

Tal vez será necesario recordar que el movimiento de un péndulo simple es un movimiento armónico simple (MAS), el cual es periódico y su elongación que es la distancia del péndulo desde su posición de equilibrio, dependerá de su posición, la cual variará según una función senoidal o cosenoidal.

Como ayuda, apoyarse de la figura 3, donde aparece la gráfica de la función posición $p(t)$ del movimiento del péndulo.

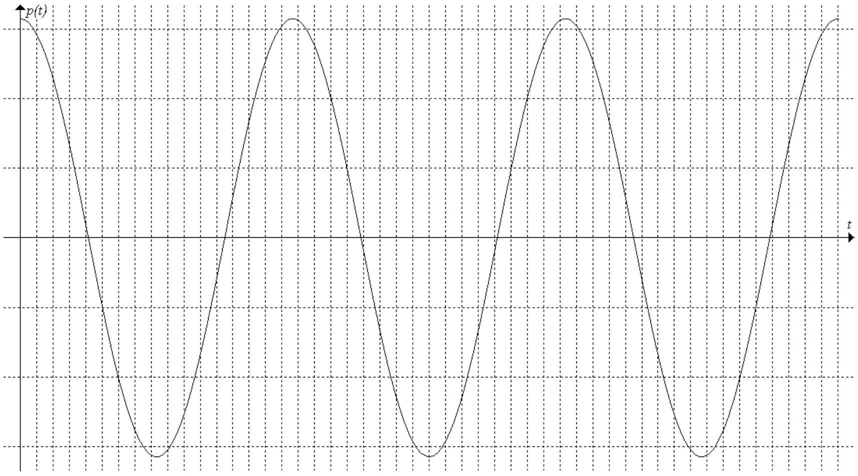


Figura 2

Preguntar:

2. Según la onda graficada, ¿qué tipo de función sería más simple de utilizar, una senoidal o una cosenoidal?

Se espera que la mayoría de alumnos sugieran una cosenoidal, así que en lo que sigue se trabajara bajo este supuesto para construir la función posición $p(t) = A \cdot cos(\omega \cdot t)$.

Preguntar:

3. ¿Cómo se podrá determinar la amplitud de la onda graficada?

Después de escuchar algunas propuestas, indicar que la amplitud A estará dada por la longitud del arco $\overset{\frown}{OI}$ de la figura 2, pedir que la calculen y prestar atención a que se llegue al resultado $A = 5\pi$, el cual se sigue de aplicar la definición de radián.

Preguntar:

4. Si el péndulo hace treinta oscilaciones en cinco segundos, ¿cuál es la frecuencia del movimiento del péndulo?

Esperar a que los alumnos concluyan que tiene una frecuencia de $6\ Hz$, para preguntar:

5. ¿Qué periodo tiene la onda graficada?

6. ¿Cuál es la velocidad angular del péndulo?

Finalmente se tendrá que la posición del péndulo estará dada por la función $p(t) = 5\pi \cdot cos\, 12\pi t$, de donde su elongación a los segundos indicados estará dada por la imagen de dicho valor, esto es por $p\left(\frac{7}{48}\right)$.