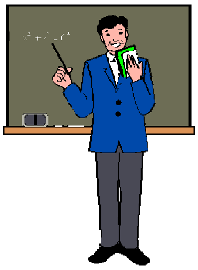
EQUIVALENCIA ENTRE LAS FUNCIONES SENOIDALES Y COSENOIDALES

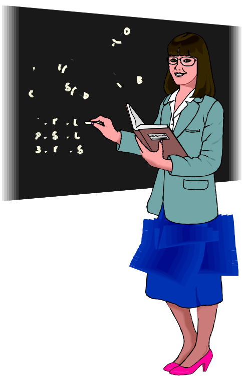


Sugerencias para quien imparte el curso:

Se deberá concebir a la Matemática como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento no se descubre, sino que se construye a partir de la formulación y justificación de conjeturas, a través de la búsqueda de patrones y regularidades, para que así se convierta a la enseñanza de instrucción a socialización, y al aprendizaje de recepción a construcción.

Propósitos:

1. Averiguar qué relación hay entre las funciones senoidales y cosenoidales.
2. Convertir una función senoidal a cosenoidal o una cosenoidal a senoidal.



EL PROBLEMA DE LAS CONVERSIONES

Realizar las conversiones siguientes:

a) La función $f(x) = 2 \cdot sen\ (3x - \pi)$ como función cosenoidal.

b) La función $f(x) = -1 + \frac{3}{5} \cdot cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ como función senoidal.

Para responder se habrá de construir la herramienta necesaria para conseguirlo, la cual puede surgir de una exploración como la siguiente:

En la figura 1 aparecen las gráficas de las funciones básicas del seno y del coseno, en ella se observa sin dificultad que al desfasar $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda a la onda $sen\ x$, se obtiene la onda $cos\ x$, mientras que al desfasar $\frac{\pi}{2}$ hacia la derecha a la onda $cos\ x$, se obtiene la onda $sen\ x$.

Preguntar:

1. ¿Qué operación hay que realizar para que la onda senoidal básica se desfase $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda?
2. ¿Qué operación hay que efectuar para que la onda cosenoidal básica se desfase $\frac{\pi}{2}$ hacia la derecha?

Las respuestas a esas preguntas permitirán relacionar las funciones seno y coseno de la manera siguiente:

$$sen\ x = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } cos\ x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

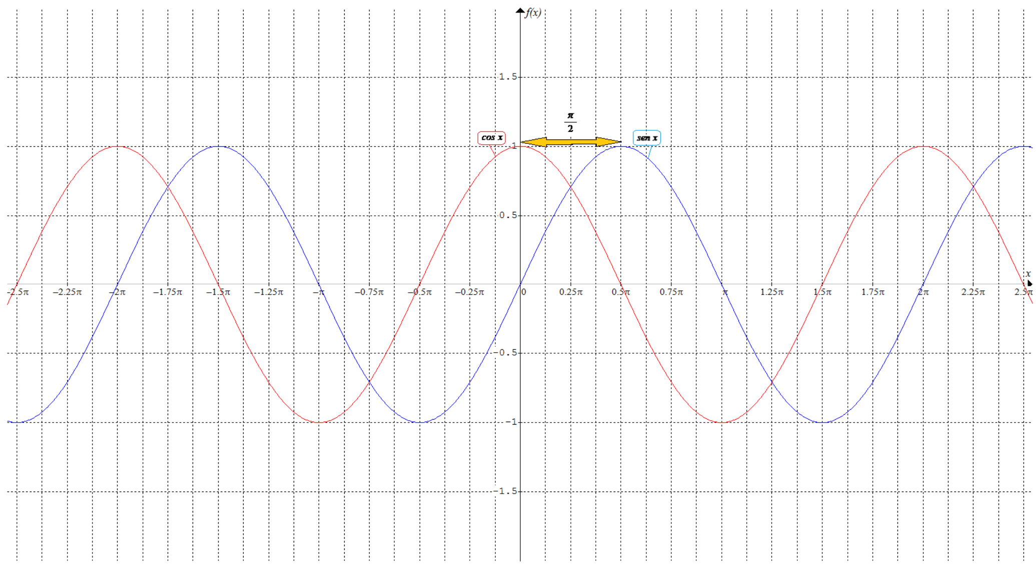


Figura 1

Proceder de manera semejante pero ahora con el apoyo de la figura 2 donde aparecen las ondas $sen\ 2x$ y $cos\ 2x$ en la que se observa que al desfasar $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda a la onda senoidal, se obtiene la onda cosenoidal, en tanto que al desfasar $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha a la onda cosenoidal, se obtiene la onda senoidal.

Preguntar:

3. ¿Qué operación hay que realizar para que la onda $sen\ 2x$ se desfase $\frac{\pi}{4}$ hacia la izquierda?

4. ¿Qué operación hay que efectuar para que la onda $cos\,2x$ se desfase $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha?

Ahora las respuestas a las preguntas permitirán relacionar las funciones seno y coseno de la manera siguiente:

$$sen\ x = cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } cos\ x = sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

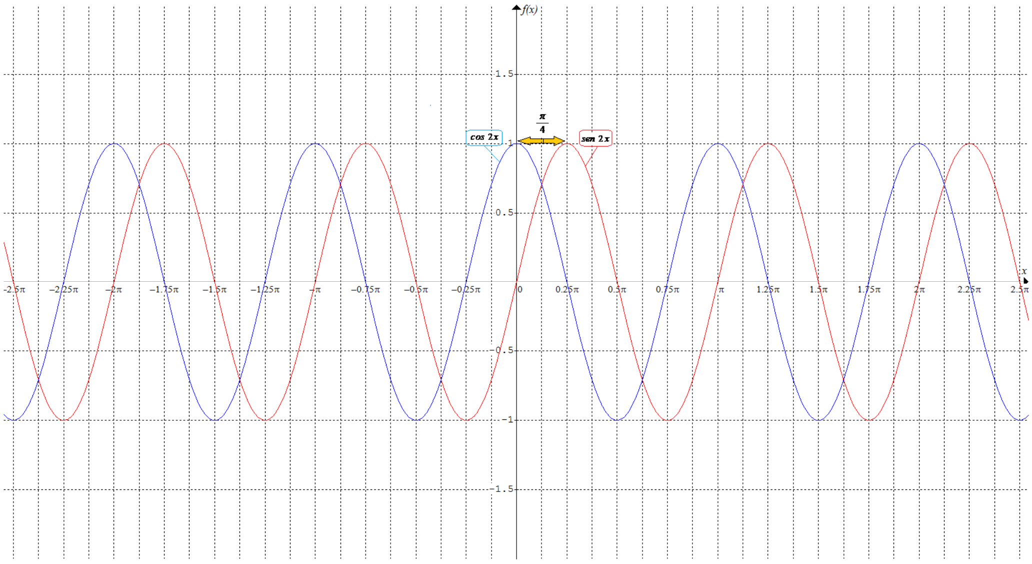


Figura 2

En ambos casos examinados se observa que:

a) Para convertir de seno a coseno, se resta $\frac{\pi}{2}$ al argumento de la función y se intercambia seno por coseno.

b) Para convertir de coseno a seno, se suma $\frac{\pi}{2}$ al argumento de la función y se intercambia coseno por seno.

La importancia de estos resultados es que permite introducir un nuevo concepto clave.

Concepto clave:

20. Equivalencia entre las funciones senoidales y cosenoidales

a) La función senoidal $f(x)=D+A\cdot sen\ (Bx+C)$, es equivalente a la función cosenoidal $f(x)=D+A\cdot cos\left(Bx+C-\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) La función cosenoidal $f(x)=D+A\cdot cos\ (Bx+C)$, es equivalente a la función senoidal $f(x)=D+A\cdot sen\left(Bx+C+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Aplicar este concepto clave para dar respuesta al problema inicial.

Por el inciso a) del concepto clave 20, se obtiene la conversión siguiente:

$$f(x)=2\cdot sen\ (3x-\pi)=2\cdot cos\left(3x-\pi-\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot cos\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right)$$

Mientras que por el inciso b) del mismo concepto, se logra la conversión que aparece a continuación:

$$f(x)=-1+\frac{3}{5}\cdot cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1+\frac{3}{5}\cdot sen\left(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{3}{5}\cdot sen\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

Si se tiene a la mano alguna computadora con algún programa para graficar funciones, se sugiere verificar que en cada caso se obtiene la misma onda o en su defecto obtener la imagen de varios valores para la variable independiente y observar que es la misma en ambas funciones de cada caso.

Para reforzar los procedimientos establecidos, plantear a manera de ejemplo la resolución de algún ejercicio como el que se indica a continuación.

Considerando la gráfica de la figura 3, resolver lo siguiente:

a) Determinar una expresión de la forma $f(x)=D+A\cdot cos\ (Bx+C)$ que corresponda a la onda graficada.

b) ¿Cuál será la expresión de la forma $f(x)=D+A\cdot sen\ (Bx+C)$ que produzca la misma gráfica?

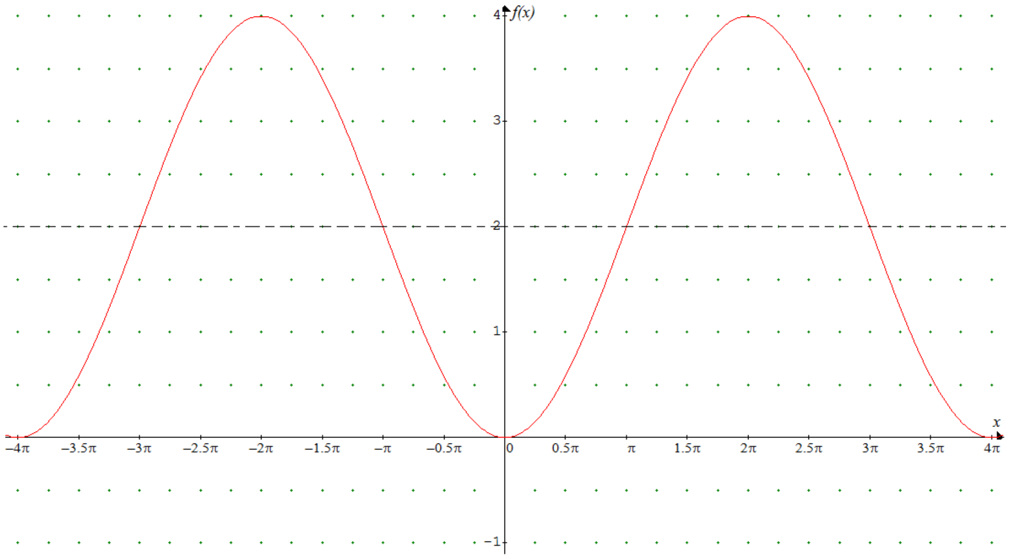


Figura 3

En el examen se podría partir de la gráfica de la función básica coseno que aparece en la figura 4.

Si se toma como referencia la línea de equilibrio punteada que aparece en la figura 3, se observa que ésta se encuentra a dos unidades por arriba del eje de abscisas, lo cual indica que la onda cosenoidal básica fue desplazada dos unidades hacia arriba.

Preguntar:

5. ¿Qué operación hay que realizar para lograrlo?

El resultado de la operación propuesta se muestra en la figura 5, donde aparece graficada la onda cosenoidal $cos\, x+2$.

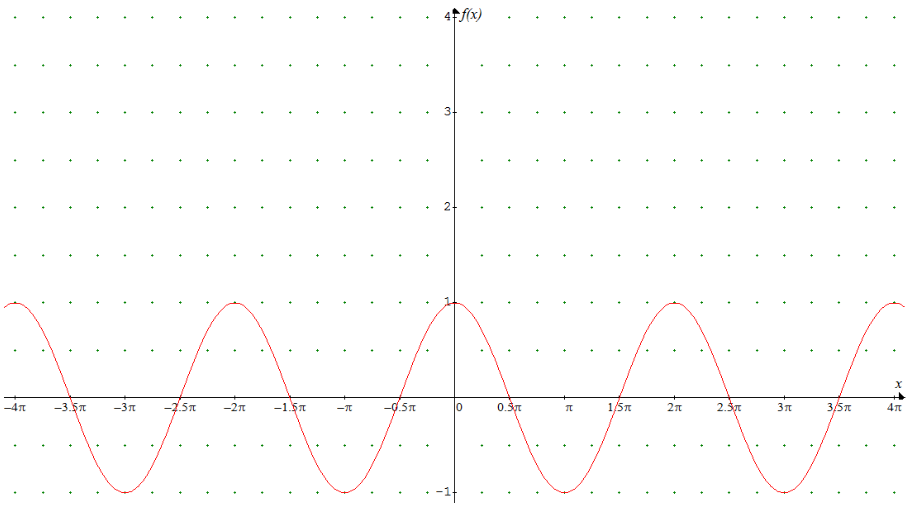


Figura 4 $f\left(x\right)=cos\, x$

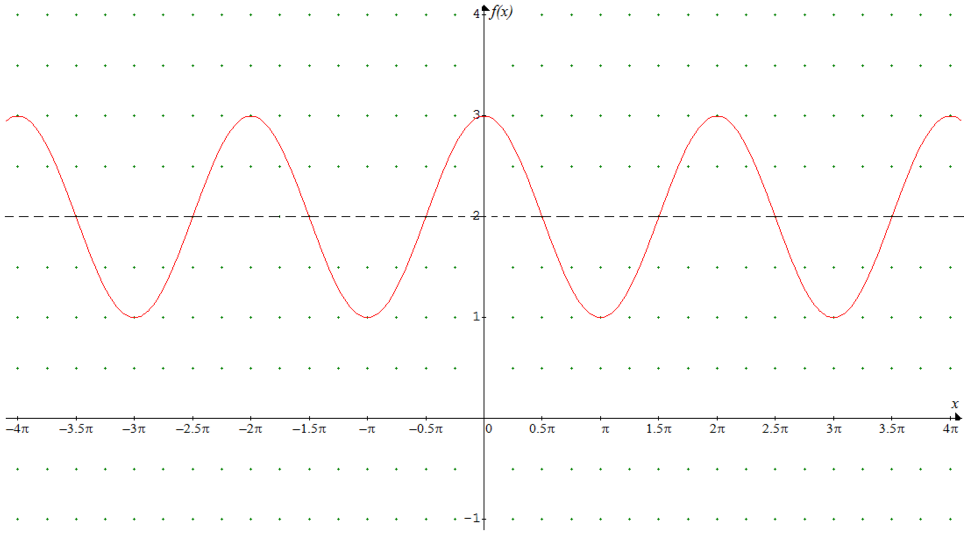


Figura 5 $f(x) = 2 + cos\ x$

También tomando como referencia la línea de equilibrio punteada, se observa que además ha sido cambiada la amplitud de la onda cosenoidal básica a dos.

Preguntar:

6. ¿Con cuál operación se logra esta transformación?

En la figura 6 se muestra la transformación lograda con dicha operación.

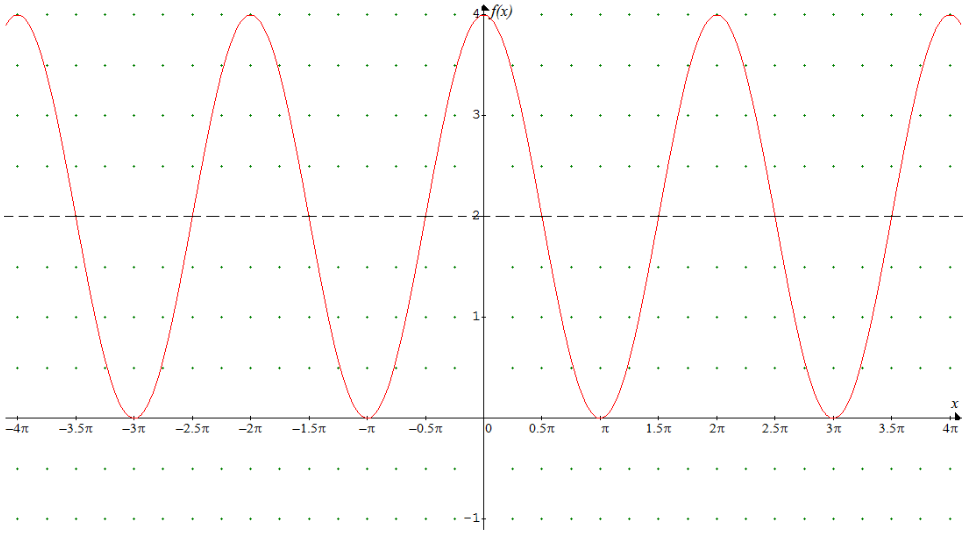


Figura 6 $f(x) = 2 + 2 \cdot cos\ x$

Realizando una observación cuidadosa, se pueden dar cuenta que la siguiente operación a realizar, podría ser desfasar la onda obtenida en la figura 6, π unidades a la derecha o a la izquierda.

Preguntar:

7. Si decidimos desfasarla a la derecha, ¿cuál sería la operación ha realizar?

En la figura 7 se tiene la onda cosenoidal $f(x) = 2 + 2 \cdot cos(x - \pi)$, resultado de la operación sugerida.

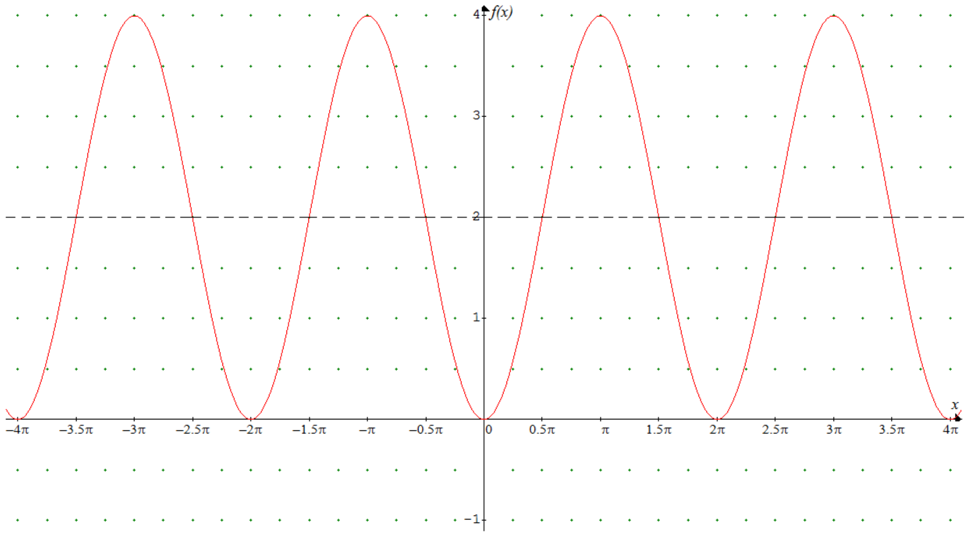


Figura 7 $f(x) = 2 + 2 \cdot cos(x - \pi)$

Por último, se modificaría el periodo de la onda cosenoidal de la figura 7 a 4π, observando que es precisamente el periodo de la onda graficada en la figura 3.

Preguntar:

8. ¿Cómo se logra esta transformación?

Así que la expresión pedida en el inciso a) es $f(x) = 2 + 2 \cdot cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$.

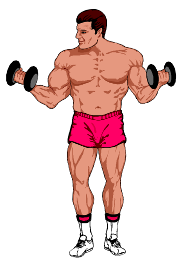
Preguntar:

9. ¿Cómo convertimos la función cosenoidal a una función senoidal que sea equivalente?

Por lo tanto, la función como senoidal es $f(x) = 2 + 2 \cdot sen\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$.

Cabe señalar que la solución no es única, ya que por ejemplo si en la tercera operación la decisión hubiese sido desfasarla a la izquierda, entonces los resultados finales serían $f(x)=2+2\cdot cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$ y $f(x)=2+2\cdot sen\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)$.

O si en el mismo paso se hubiese decidido reflejarla con respecto a la línea de equilibrio, los resultados finales serían $f(x)=2-2\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)$ y $f(x)=2-2\cdot sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$.



Ejercicio 1

En las figuras 8, 9 y 10 aparecen, respectivamente, las gráficas de las funciones $f(x)=sen\,x\cdot cos\,x$, $f(x)=2\cdot cos^2 x$ y $f(x)=-3\cdot sen^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, obtén para cada una de ellas una función senoidal y una cosenoidal que produzcan la misma gráfica, prueba la validez de tus respuestas evaluando las funciones para los valores de la variable independiente que aparecen en las gráficas y observa que se obtienen los mismos valores.

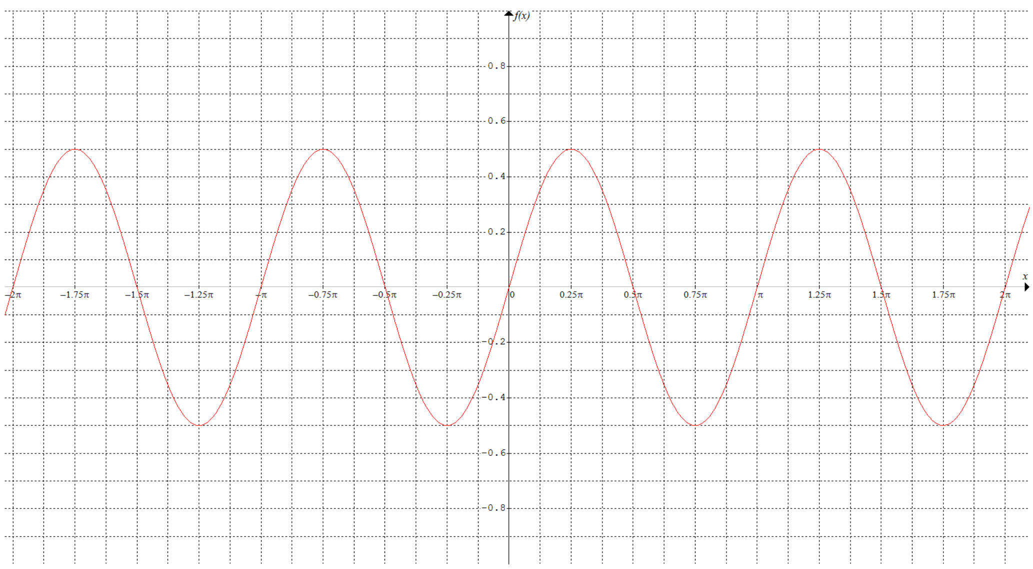


Figura 8

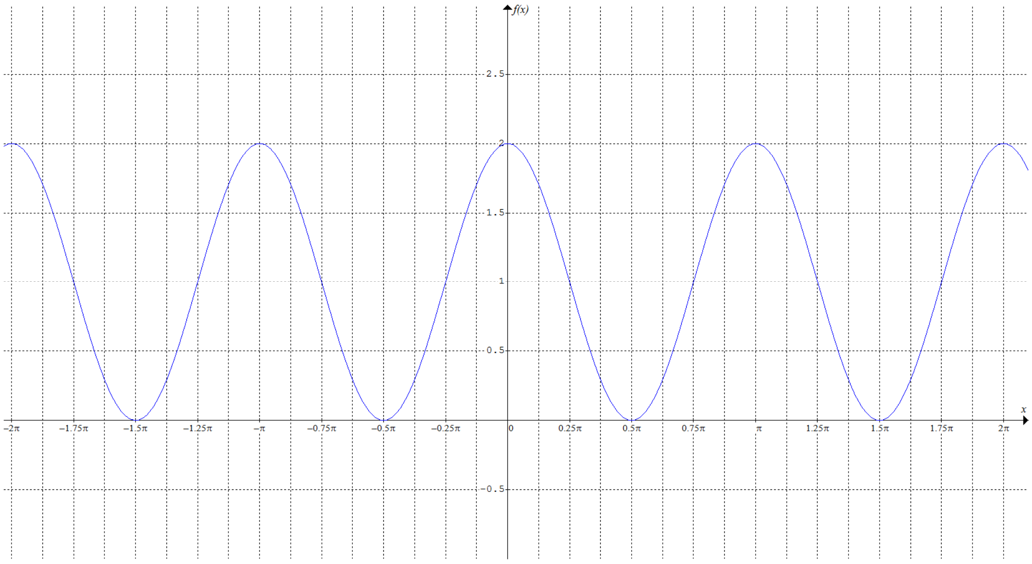


Figura 9

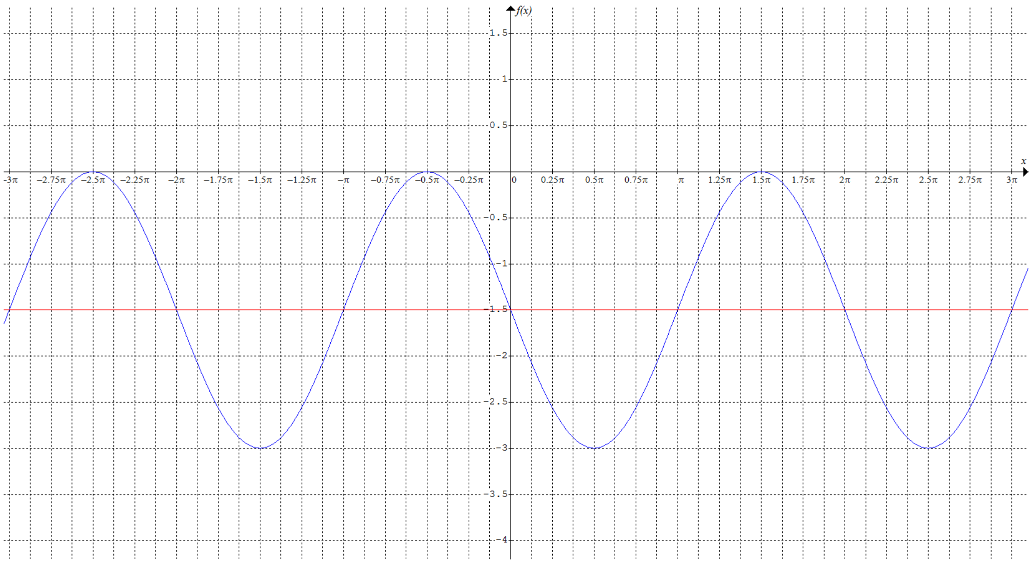


Figura 10