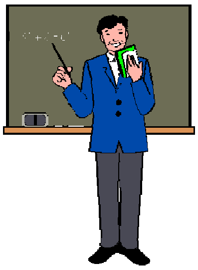
FUNCIÓN BÁSICA DEL SENO Y DEL COSENO, GRÁFICAS Y CARACTERÍSTICAS



Sugerencias para quien imparte el curso:

Es importante que la interacción con los alumnos dentro del salón de clases sea lo más activa posible, para no caer en un esquema expositivo por parte del profesor o profesora, se debe crear en la clase una atmósfera donde los estudiantes se sientan a gusto para proponer y probar conjeturas e ideas, invitándolos constantemente a que expongan sus pensamientos en todas las etapas de la resolución de los problemas planteados.

Propósitos:

1. Introducir el concepto de circunferencia unitaria.
2. Construir la gráfica de la función básica del seno y del coseno, con apoyo de la circunferencia unitaria.
3. Introducir la noción de función periódica.
4. Conocer el concepto de amplitud de una onda.
5. Determinar las principales características de la función básica del seno y del coseno.

EL PROBLEMA DE LA SEÑAL MODULANTE

Las radio frecuencias (RF) son frecuencias que se pueden radiar de manera eficiente por una antena y propagarse por el espacio libre, el proceso de modulación de amplitud (AM) consiste en cambiar la amplitud de una señal portadora de alta frecuencia, de acuerdo con la amplitud de una señal modulante de baja frecuencia como se muestra en la figura 1.

Si la señal portadora requiere de la onda senoidal básica como señal modulante, describe las propiedades fundamentales de la función trigonométrica asociada a dicha onda, en particular su periodo y su amplitud.

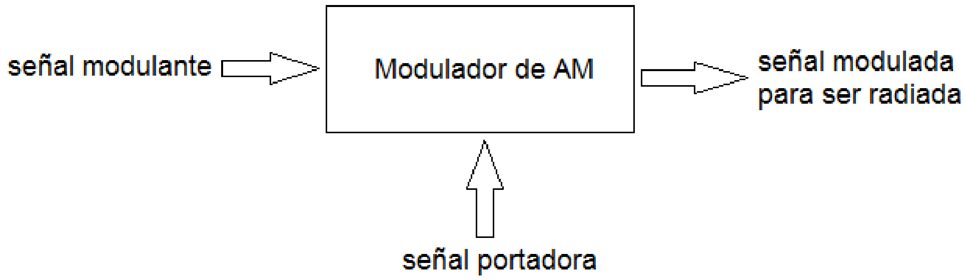
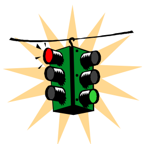


Figura 1

Para realizar el análisis de la onda senoidal básica, que es la gráfica correspondiente a la función senoidal básica $f(x) = sen\ x$, *se sugiere trabajar con el apoyo visual de la circunferencia unitaria para descubrir las propiedades de tal función trigonométrica.*



Concepto clave:

10. Circunferencia unitaria

Si se considera que la circunferencia del ángulo en el plano cartesiano es igual a la unidad, se tendrá un modelo geométrico conocido como circunferencia unitaria mostrada en la figura 2, que tiene la particularidad de que la medida del ángulo central AOP es igual a la longitud x del arco que subtiende.

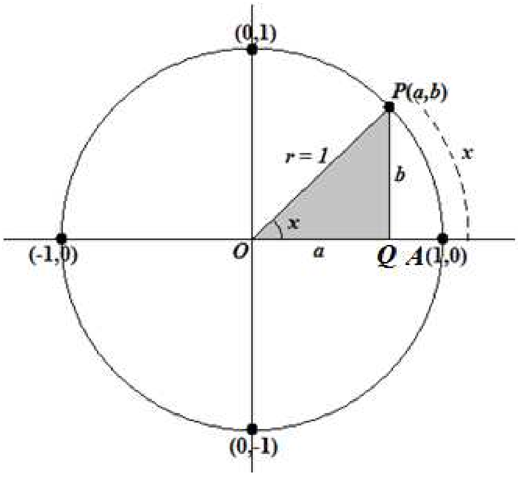


Figura 2

Preguntar:

1. Considerando el concepto clave 9, ¿cuáles serán las coordenadas de cualquier punto P sobre la circunferencia unitaria?

Se espera que los alumnos no tengan dificultad de aplicar dicho concepto para concluir que:

a) $sen\ x = \frac{b}{1}$, de donde el punto P tiene por ordenada al seno de x.

b) $cos\ x = \frac{a}{1}$, de donde el punto P tiene por abscisa al coseno de x.

Así el punto P tiene coordenadas $(cos\ x, sen\ x)$, lo cual es válido para cualquier punto P sobre la circunferencia unitaria.

La importancia de este resultado es que con él se extenderá el dominio restringido de las función básicas del seno, de medidas de ángulos agudos o números reales en el intervalo abierto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a cualquier medida de ángulo que puede ser cero, positivo o negativo, en pocas palabras, a cualquier número real.

A manera de ejemplo, en conjunto con los alumnos y utilizando la circunferencia unitaria, encontrar el valor de las función básica del seno para $x = 0$ y para $x = \frac{3\pi}{2}$. Sugerir que comparen los resultados que se van a obtener, con los que arrojen una calculadora científica, teniendo la precaución de que esté en el modo rad.

Para encontrarlos, solicitar que primero ubiquen la posición del punto P sobre la circunferencia unitaria, para los valores de x dados.

El alumno deberá percatarse que si $x = 0$, entonces el punto P está en la parte positiva del eje de abscisas y sus coordenadas son $(1,0)$, mientras que si $x = \frac{3\pi}{2}$, entonces P está en la parte negativa del eje de ordenadas y sus coordenadas son $(0,-1)$.

a) Para $x = 0$, se considera el punto $P(1,0)$, de donde $sen\ 0 = 0$, correspondiente a la ordenada de P.

b) Para $x = \frac{3\pi}{2}$, se considera el punto $P(0,-1)$, concluyéndose que $sen\ \frac{3\pi}{2} = -1$, que es la ordenada de P.

Ejercicio 1

Utilizando la circunferencia unitaria, encuentra el valor de la función del seno.

a) Para $x = \frac{\pi}{2}$

b) Para $x = \pi$

De los resultados obtenidos en el ejemplo y en el ejercicio 1, se deberá aseverar que la función básica del seno está definida en todo el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$.

A continuación analizar algunas otras características de ésta función en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ con el apoyo visual de la circunferencia unitaria, prestar atención en que el intervalo corresponde a las distancias de los recorridos desde el punto de coordenadas $A(1,0)$ hasta el punto P, en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj), completando una vuelta.

Veamos lo que pasa con la función básica del seno:

1) El valor mínimo que toma es -1, lo que sucede cuando el punto P tiene abscisa $x = \frac{3\pi}{2}$.

2) El valor máximo que toma es 1, esto cuando el punto P tiene abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

3) Es cero cuando el punto P tiene abscisa $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

Pedir que estas primeras tres propiedades las lleven a un sistema de coordenadas cartesianas, resaltando que en el eje de abscisas se utilice una escala en términos de π, al que se le podría llamar el Plano Trigonométrico, como se muestra en la figura 3.

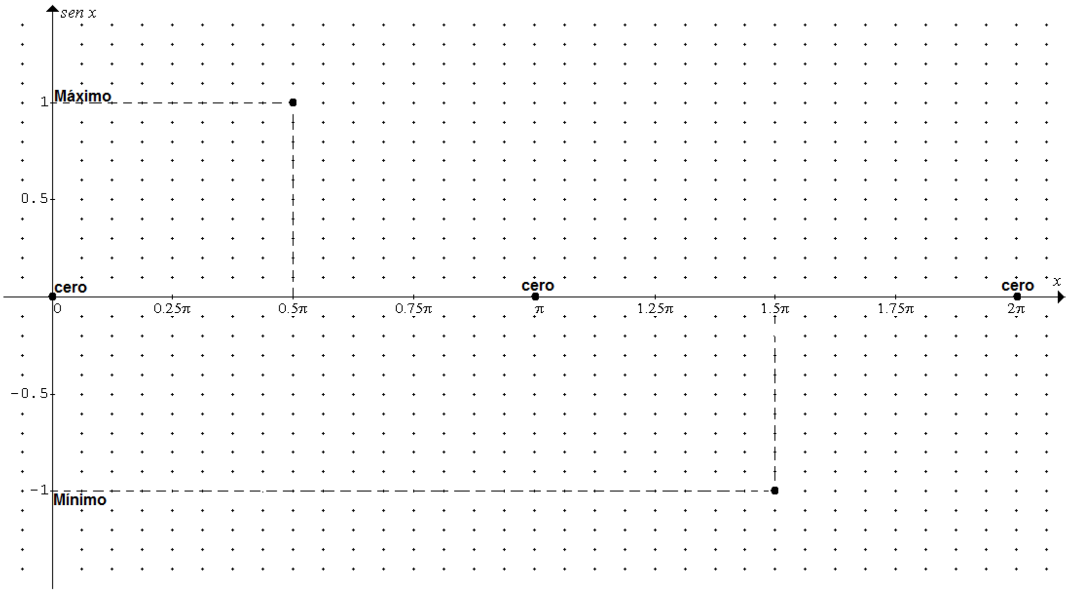


Figura 3

Posteriormente analizar el signo de $sen\ x$, lo cual dependerá del cuadrante en el encuentre el ángulo de referencia, así que:

En el primer cuadrante es positiva y varía continuamente desde 0 hasta 1, lo cual quiere decir que es continua (no tiene interrupciones), creciente y positiva en el intervalo abierto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ como se ve en la figura 4.

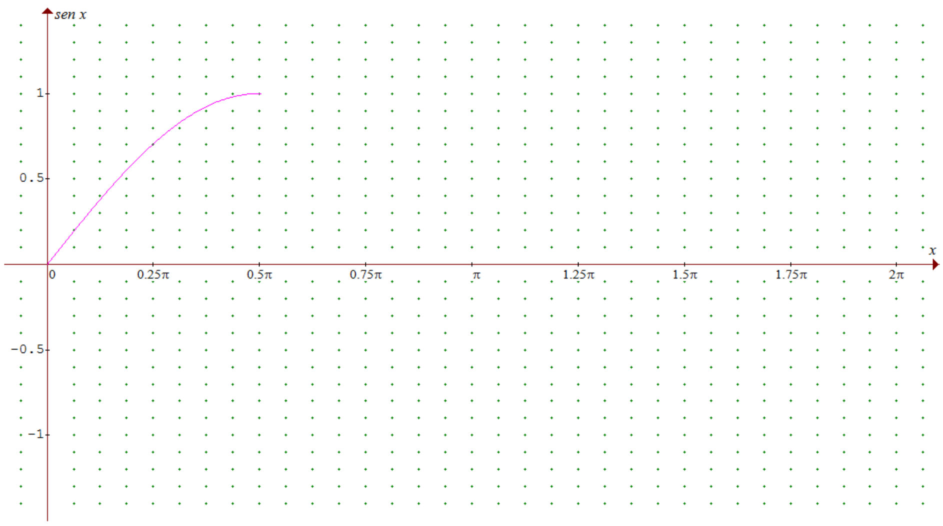


Figura 4

En el segundo cuadrante es positiva y varía continuamente desde 1 hasta 0, lo cual quiere decir que es continua, decreciente y positiva en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, tal como se muestra en la figura 5.

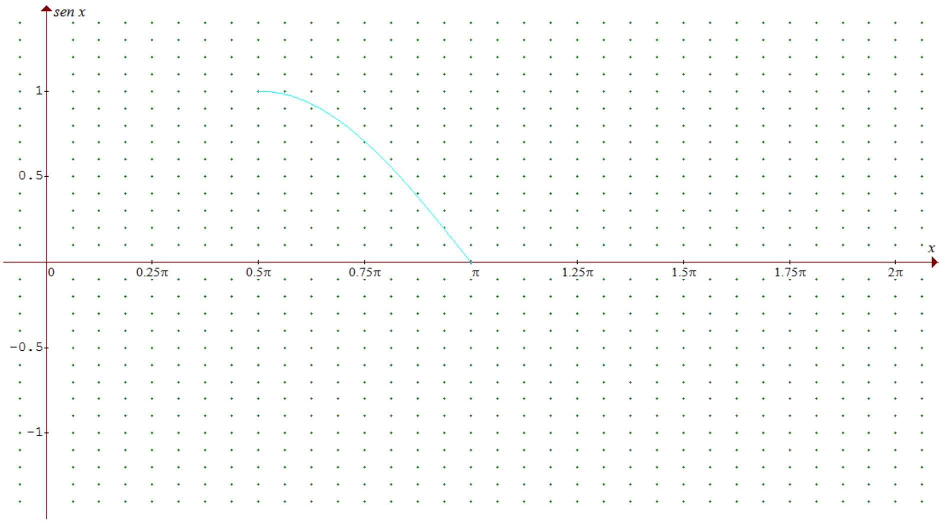


Figura 5

En el tercer cuadrante es negativa y varía continuamente desde 0 hasta -1, lo cual quiere decir que es continua, decreciente y negativa en el intervalo abierto $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, lo que se muestra gráficamente en la figura 6.

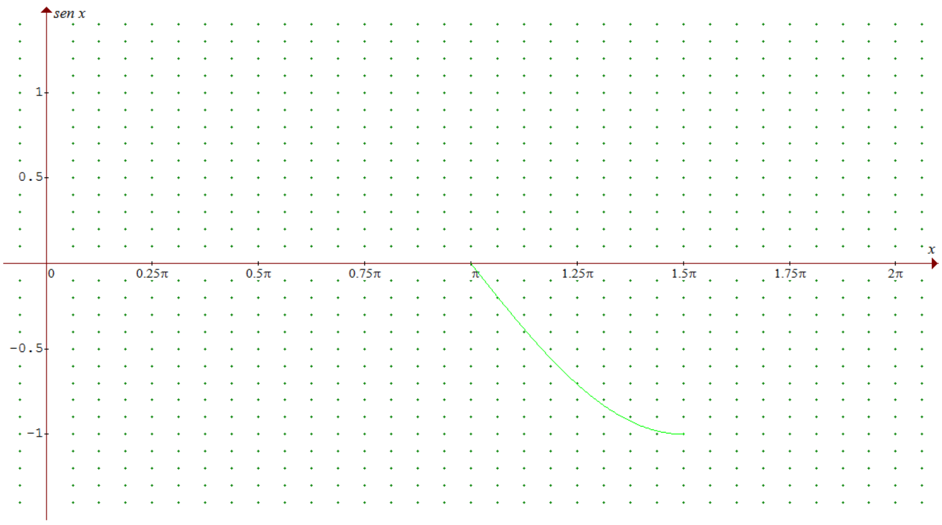


Figura 6

Por último, en el cuarto cuadrante es negativa y varía continuamente desde -1 hasta 0, lo cual quiere decir que es continua, creciente y negativa en el intervalo abierto $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, lo que se aprecia en la gráfica de la figura 7.

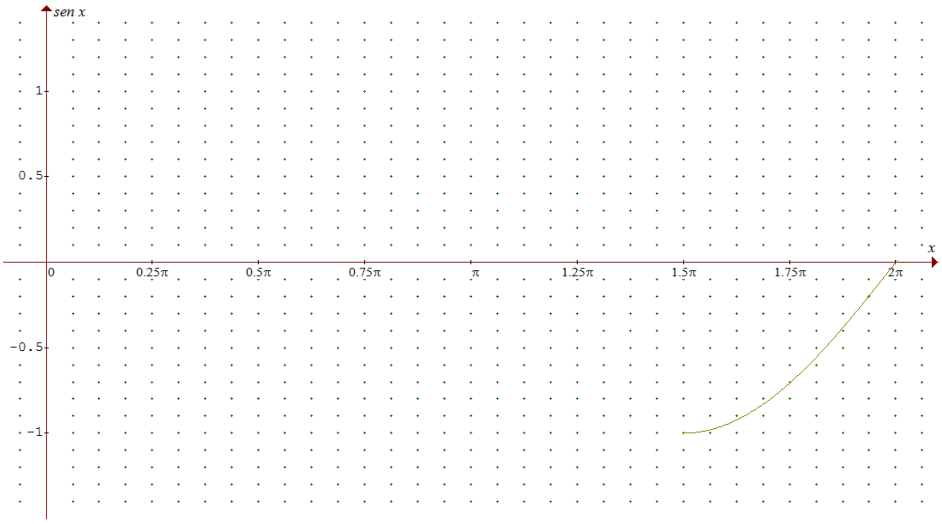


Figura 7

Si se unen las graficas que aparecen en las figuras 4, 5,6 y 7, se tendrá la gráfica mostrada en la figura 8, que es la gráfica de la función básica del seno desde 0 hasta 2π, correspondiente a las distancias recorridas por un punto P de la circunferencia unitaria, iniciando en punto $(1,0)$ y hasta completar una vuelta completa en sentido contrario a las manecillas del reloj.

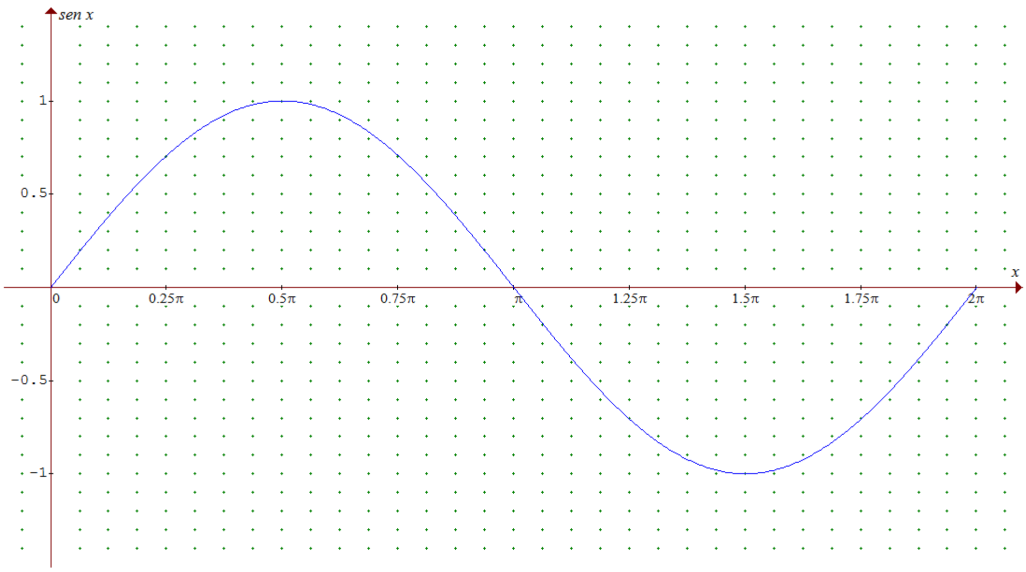


Figura 8

Hasta aquí se tienen algunas características y comportamiento gráfico de la función básica del seno, considerando las distancias sobre la circunferencia unitaria de los recorridos desde el punto de coordenadas $(1,0)$ hasta el punto P, en sentido positivo hasta completar sólo una vuelta.

Señalar que también en este contexto, tal como sucede con los ángulos, no se restringe ni la magnitud ni el sentido del recorrido del punto P sobre la circunferencia unitaria, por lo tanto es posible que el punto de varias vueltas a la circunferencia iniciando en el punto $(1,0)$, o que el sentido del recorrido sea positivo o negativo.

A continuación hacer un análisis de lo que sucede con la función básica del seno en una segunda vuelta positiva completa.

Preguntar:

2. Si la distancia recorrida por el punto P inicia en 2π y recorre una vuelta, ¿dónde terminará?

En efecto, en 4π tal como se modela en la figura 9.

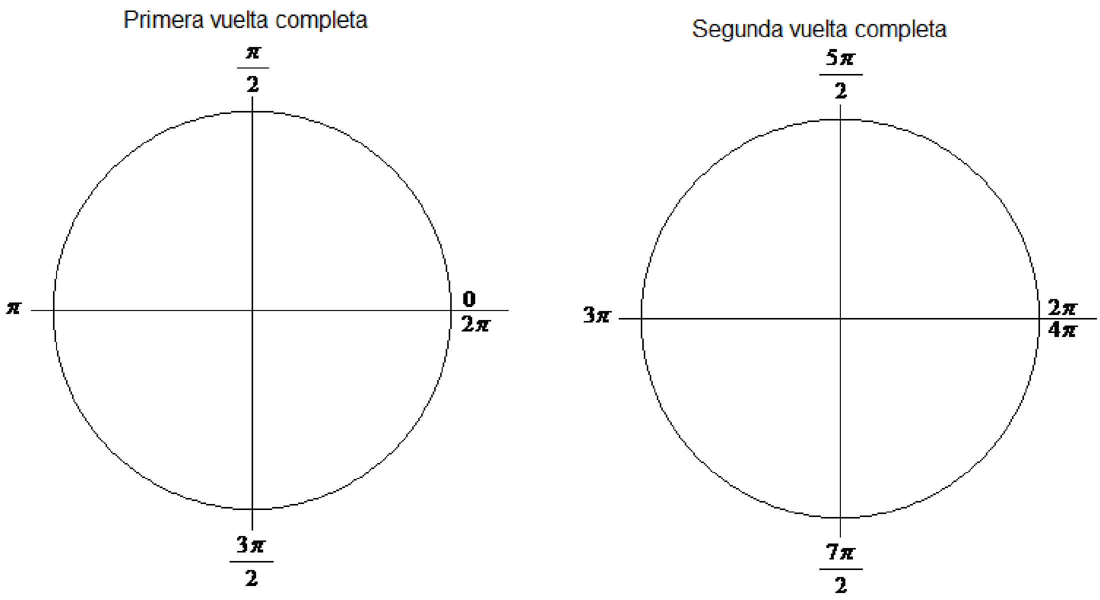


Figura 9

Con el apoyo de la figura 9, preguntar, respecto a la función básica del seno:

3. En la segunda vuelta, ¿cuál es el valor máximo que toma la función y para qué valor de x se logra?

4. En la segunda vuelta, ¿cuál es el valor mínimo que toma la función y para qué valor de x se logra?

5. ¿Para qué valores de x la función es cero?

Además no será difícil observar que el comportamiento de la función será:

En el intervalo $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ el mismo que en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$ el mismo que en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

En el intervalo $\left(3\pi, \frac{7\pi}{2}\right)$ el mismo que en el intervalo $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right)$ el mismo que en el intervalo $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Trasladando toda esta información al Plano Trigonométrico, obtendremos la gráfica de la función básica del seno en el intervalo cerrado $[2\pi, 4\pi]$ tal como aparece en la figura 10.

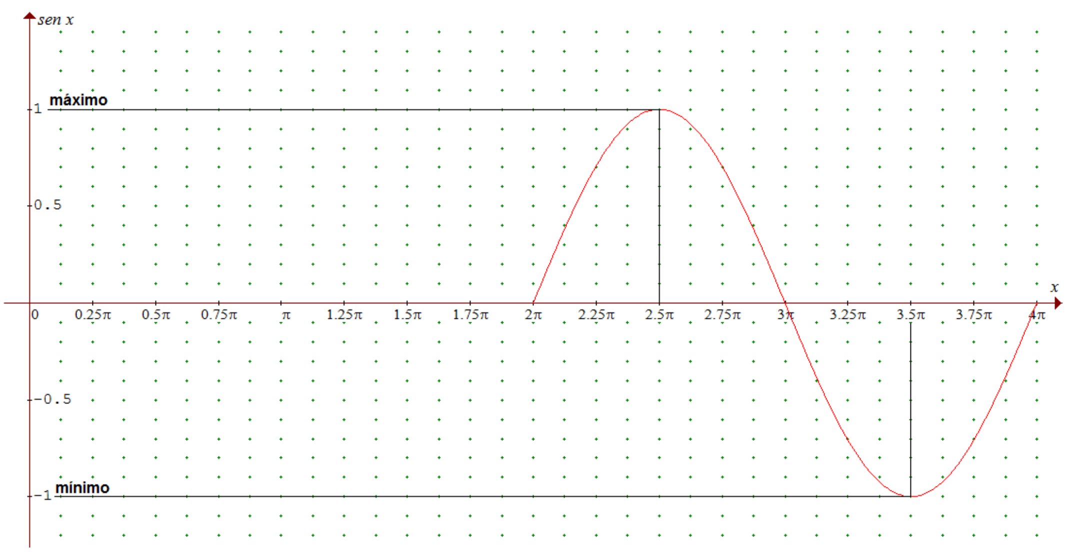


Figura 10

Realizando un análisis similar y apoyándose de la figura 11, la gráfica de la función básica del seno en el intervalo cerrado $[-2\pi, 0]$ es la que aparece en la figura 12.

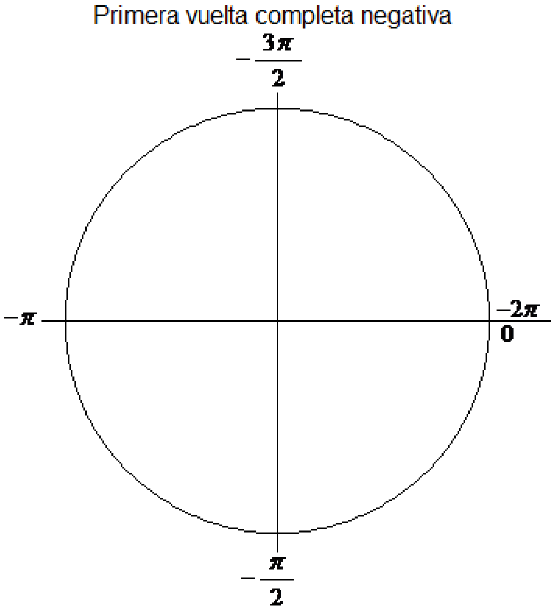


Figura 11

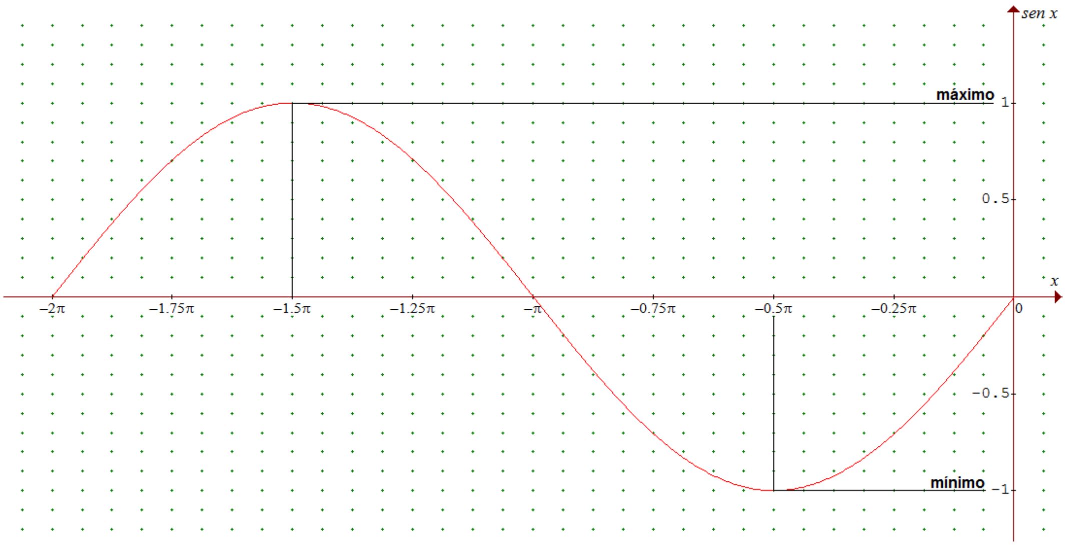


Figura 12

Si se unen las gráficas de las figuras 8, 10 y 12 tendremos en la figura 13, la gráfica de la función trigonométrica $f(x) = sen\ x$, desde $x = -2\pi$ hasta $x = 4\pi$.

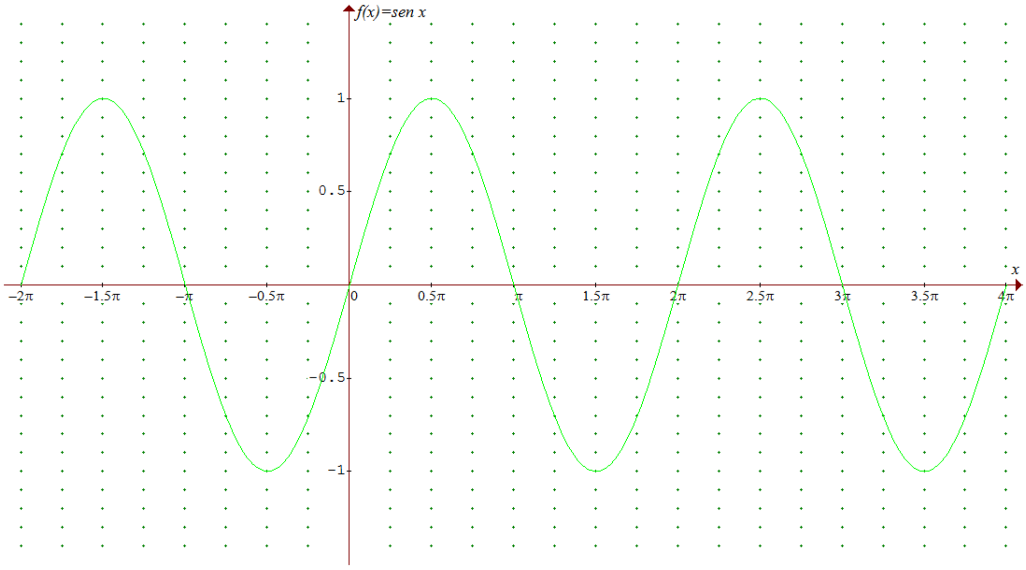


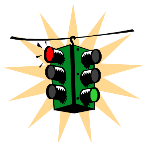
Figura 13

Este proceso se puede repetir una infinidad de veces, ya que como se mencionó anteriormente, en el recorrido del punto P sobre la circunferencia unitaria no se limita ni el número de vueltas ni el sentido de ellas.

Lo anterior afirmación lleva a la conclusión de que el dominio natural de la función básica del seno son todos los números reales.

Tomando como referencia las figuras 8, 10 y 12, los alumnos deberán de percatarse del comportamiento repetitivo de la función básica del seno.

Mencionar que a las funciones que tienen ese comportamiento repetitivo se les llaman funciones periódicas e introducir el siguiente concepto clave.



Concepto clave

11. Función periódica

Si para todo valor de x en el dominio de una función f existe algún número real p tal que $f(x+p)=f(x)$, entonces la función f es periódica.

Al menor número positivo p se le conoce como el periodo de la función f.

Corresponde en este momento verificar que la función básica del seno es periódica y determinar su periodo.

Para responder, en la estrategia conviene tener el apoyo de la circunferencia unitaria, donde se considere de inicio cierta posición de un punto P de ella durante su primera vuelta en un recorrido en sentido positivo, y a partir de él determinar cuáles serán sus nuevas coordenadas, cuando éste logre en su recorrido exactamente la misma posición.

Se puede considerar la posición de inicio para el punto P en la circunferencia unitaria, la que se muestra en la figura 14, además conviene recordar que este punto tiene coordenadas $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$, donde x, que llamaremos el argumento de las coordenadas del punto, es la distancia (recorrida) desde el punto de coordenadas $(1,0)$ hasta el punto P.

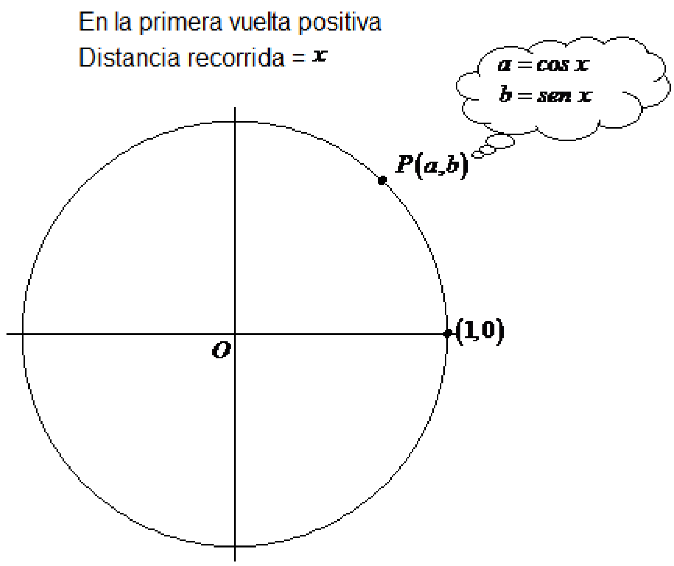


Figura 14

Preguntar:

6. ¿Cuántas unidades tendrá que recorrer sobre la circunferencia de manera positiva el punto P de la figura 14 para que quede exactamente en la misma posición?

Como deberá recorrer una vuelta completa, se tendrá que considerar a las nuevas coordenadas de P suponiendo que éste se encuentra en la segunda vuelta.

Preguntar:

7. ¿Cambiará el argumento de las coordenadas del punto?
8. ¿Cuál será la distancia total recorrida por P desde la primera vuelta hasta su posición en la segunda vuelta?

Las respuestas a estas preguntas permitirán concluir que en la nueva posición del punto P, aunque queda exactamente en la posición inicial, cambia el argumento de sus coordenadas, ya que en lugar de recorrer sobre la circunferencia x unidades, ha recorrido $x+2\pi$ unidades, de tal manera que sus nuevas coordenadas son las que aparecen en la figura 15.

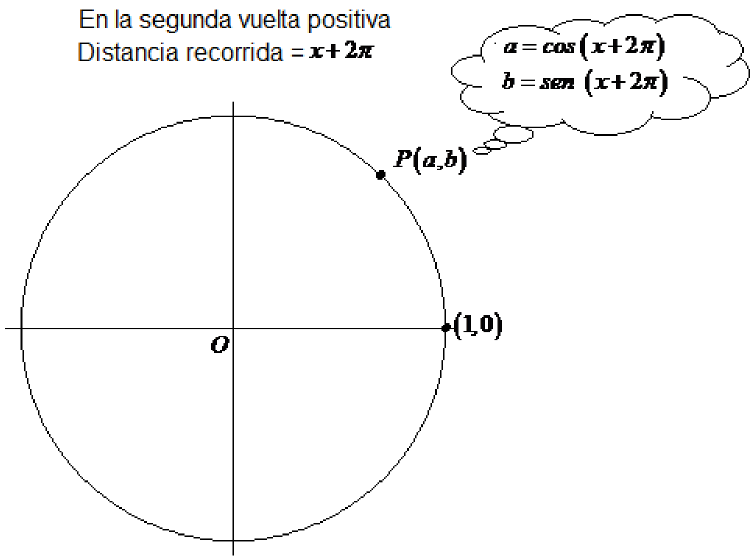


Figura 15

De lo mostrado en la figuras 14 y 15, se deduce que las coordenadas del punto P son las mismas en ambos casos, puesto que tiene exactamente la misma posición, lo que fundamenta que $cos(x+2\pi)=cos\ x$ y $sen(x+2\pi)=sen\ x$

Procediendo de la misma manera, los alumnos serán capaces de ver que para que el punto P quede exactamente en la misma posición que en la figura 14, tendría que avanzar en su recorrido positivo otra vez 2π unidades, lo cual ubicaría al punto en la tercera vuelta, cambiando con ello el argumento de sus coordenadas a $x+4\pi$.

En otras palabras, que $cos(x+4\pi)=cos\ x$ y $sen(x+4\pi)=sen\ x$.

En general, si se le suma al argumento x de las coordenadas del punto P de la figura 14 cualquier múltiplo de 2π, se lograría exactamente la misma posición de inicio, lo cual también es válido si en lugar de sumarlo, lo restamos.

Lo anterior se expresa de manera matemática como sigue:

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$: $cos(x+2k\pi)=cos\ x$ y $sen(x+2k\pi)=sen\ x$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Por el concepto clave 11 se demuestra que la funciones básica del seno es periódica, también lo es la función básica del coseno $f(x)=cos\ x$.

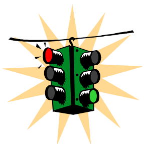
Por el concepto clave 11, el periodo de cada una de ellas será el menor número positivo de la forma $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Preguntar:

9. ¿Cuál es el menor número positivo de la forma $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$?

La respuesta a la pregunta, demuestra que el periodo de la función básica del seno es de 2π.

Otro concepto asociado a las ondas es el de la amplitud, para lo cual se introduce el siguiente concepto clave.



Concepto clave

12. Amplitud de onda

Es el valor de la máxima distancia que separa a la onda de su línea de equilibrio.

Preguntar:

10. Si la línea de equilibrio de la onda senoidal básica es el eje de abscisas, ¿cuál es la amplitud de dicha onda?

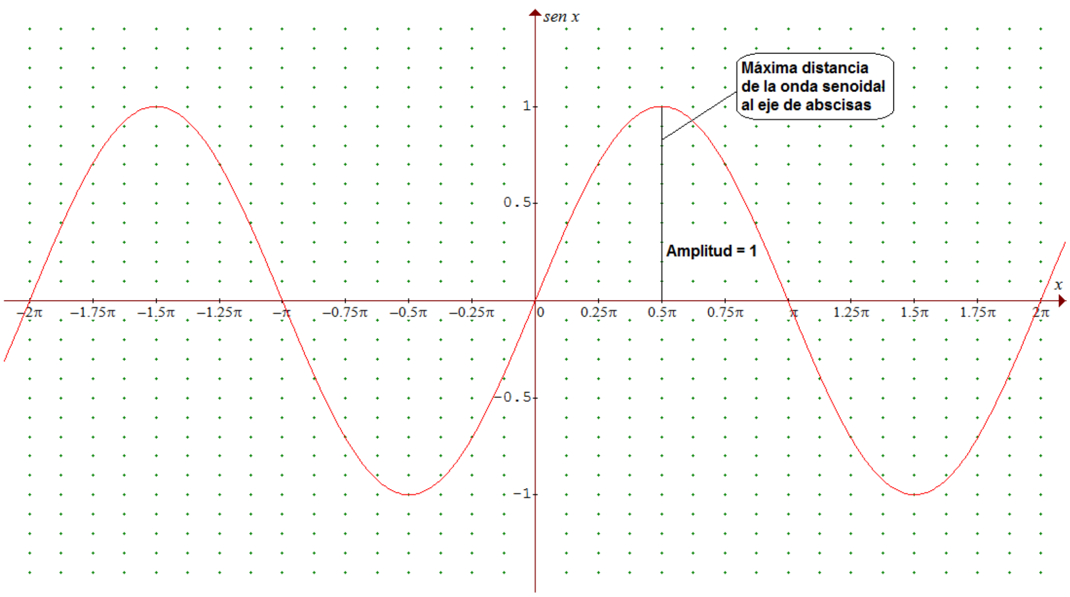
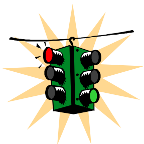


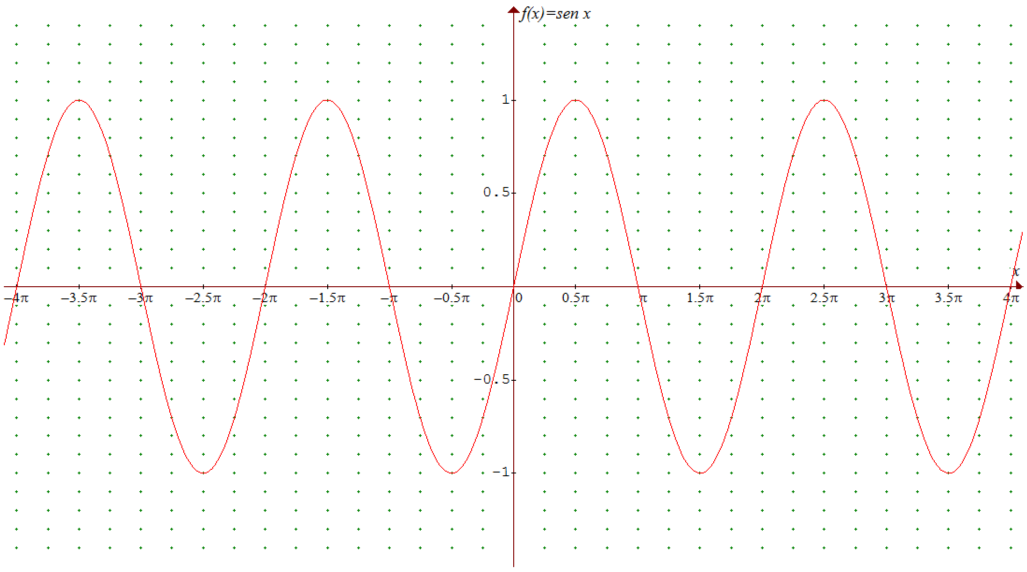
Figura 16

Todo el análisis anterior respecto a la función básica del seno se deberá resumir en un concepto clave.



Concepto clave

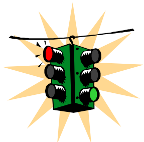
13. La función básica del seno $f(x) = sen\ x$, gráfica y características



Onda senoidal básica

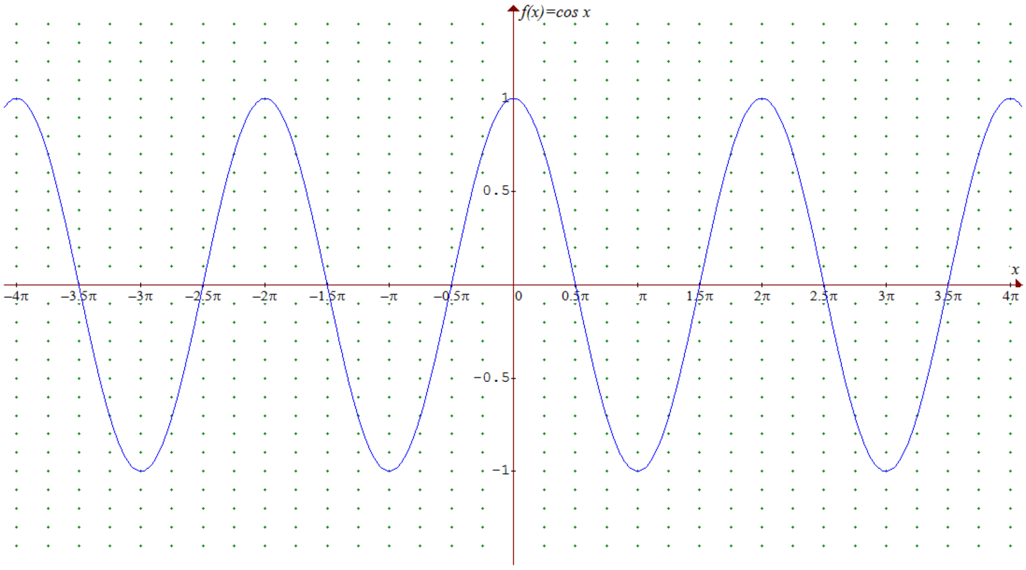
1. Dominio: $\mathbb{R}$
2. Máximo: 1
3. Mínimo: -1
4. Rango: $[-1,1]$
5. Intersección con el eje de ordenadas: $f(x) = 0$
6. Intersección con el eje de abscisas (ceros): valores de $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
7. Es continua (no tiene interrupciones)
8. Periodo: 2π
9. Amplitud: 1

Como estrategia de aprendizaje solicitar como trabajo extra clase realizar a la función básica del coseno, un análisis similar al realizado con la función básica del seno, y luego comparar sus resultados con lo expuesto en el concepto clave 14.



Conceptos clave

14. La función básica del coseno $f(x) = \cos x$, gráfica y características



Onda cosenoidal básica

1. Dominio: $\mathbb{R}$

2. Máximo: 1

3. Mínimo: -1

4. Rango: $[-1, 1]$

5. Intersección con el eje de ordenadas: $f(x) = 1$

6. Intersección con el eje de abscisas (ceros): valores de $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

7. Es continua (no tiene interrupciones)

8. Periodo: 2π

9. Amplitud: 1