TEOREMA DE LAS RAÍCES RACIONALES

Sugerencias para quien imparte el curso

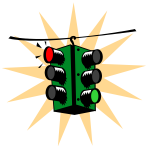
Iniciar con problemas que al inicio involucren pocos factores y verificar los casos de los alumnos para no omitir alguno.

Propósitos

- Conocer y aplicar el teorema de las raíces racionales

Raíces racionales

Una cosa es aplicar los métodos que ya se han visto cuando se sabe cuál es la raíz de una función polinomial y otra cosa es saber cómo encontrar dicha raíz, en ocasiones no es tan sencillo, uno de esos métodos es el que se muestra a continuación.



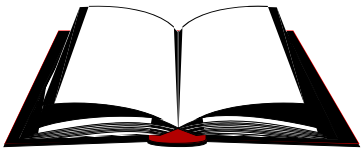
Conceptos clave:

31. Teorema de las raíces racionales: Sea f una función polinomial de grado 1 o superior de la forma. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Condiciones

1. $a_n \neq 0$,
2. cada coeficiente es un entero.

Si la fracción irreductible $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de la función polinomial del tipo antes descrito, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n.



Procedimiento para aplicar el teorema de las raíces racionales.

1) En un ejemplo visto en la sesión anterior, se tiene que $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

Una raíz debe ser $\frac{p}{q}$, donde p es un factor de 6, es decir, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, y q es un factor de 1, esto es: +1 o -1.

Por lo tanto las raíces $\frac{p}{q}$ pueden ser $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{1}, -\frac{1}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{3}{1}, -\frac{6}{1}$. El paso siguiente es probar una a una las raíces haciendo la división correspondiente (se recomienda la división sintética) usando el teorema del residuo y teorema del factor nos permite encontrar las raíces y factores del polinomio con más facilidad.

Ejemplos

1) Encontrar las raíces de la función $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$.

p es un factor de 2, es decir: _____

q es un factor de 4, es decir:_____

Por lo tanto las posibles raíces son: _____

_____

Probemos con $x = 1$

1	4	-5	-7	2
		4	1	8
	4	-1	8	-6

No es raíz

Probemos con $x = -1$

-1	4	-5	-7	2
		-4	9	-2
	4	-9	2	0

Si es raíz, entonces $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$, puede factorizarse como: $f(x) = (x+1)(4x^2 - 9x - 2)$
Las otras raíces puedes encontrarlas aplicando la formula general para resolver ecuaciones de segundo grado para: $4x^2 - 9x - 2 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4(4)(-2)}}{2(4)}$$

Las otras dos raíces son:_____ y _____

Puntos problemáticos
Al inicio resulta tedioso a algunos alumnos encontrar las posibles raíces ya que deben hacerse muchas divisiones y cálculos, se deben iniciar con ejemplos sencillos y motivar al alumno para que encuentre por si mismo las raíces.

2) Hallar las raíces de $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 35x + 12$

p es un factor de: _____

q es un factor de: _____

Las posibles raíces $\frac{p}{q}$ pueden ser $\pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 3, \pm 4, \pm\frac{4}{3} \pm 6, \pm 12$

Probemos con $x = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$	3	-4	-35	12
		2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{218}{9}$
	3	-2	$-\frac{109}{3}$	$-\frac{110}{9}$

No es raíz

Probemos con $x = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$	3	-4	-35	12
		1	-1	-12
	3	-3	-36	0

Si es raíz, entonces $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 35x + 12$, puede factorizarse como: $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 - 3x - 36)$
Las otras raíces puedes encontrarlas aplicando la formula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Puesto que al dividir entre tres no se altera la ecuación, podemos obtener: $x^2 - x - 12 = 0$

Aplicando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ tenemos $x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$

Las otras dos raíces son:_____ y _____

Ejercicio 7

Para cada uno de los siguientes ejercicios encuentra únicamente todos los posibles ceros o raíces del polinomio dado.

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
2. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12$
3. $f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$
4. $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 10x^2 + 12x - 8$

Para los ejercicios siguientes resuelve por división sintética encontrando todas y cada una de sus raíces.

5. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
6. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12$
7. $f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$
8. $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 10x^2 + 12x - 8$