RAÍCES DE UNA FUNCIÓN

Sugerencias para quien imparte el curso

Comenzar planteándoles a los alumnos una función polinomial de grado tres o cuatro con la cual se puedan calcular valores sin hacer cálculos de manera exagerada para centrarse más en el procedimiento. Recordarles que este tipo de funciones son las que se han venido trabajando en las sesiones anteriores.

Propósitos

- Comprender la relación entre una función y una ecuación polinomial.
- Reconocer la ecuación $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ como un caso particular de la función polinomial asociada.
- Identificar los ceros de una función polinomial como las raíces de una ecuación asociada.

Ejemplos

1) Si se tiene $f(x) = x^3 - 2x + 3$, si se sustituye $f(x)$ por la variable y, se obtiene:

$x^3 - 2x + 3 - y = 0$ o $y = x^3 - 2x + 3$

2) Para $x = 1$ en $f(x) = x^3 - 2x + 3$, $f(1) = (1)^3 - 2(1) + 3$, por lo tanto $f(1) = 2$, de esta forma tenemos la pareja ordenada $(1,2)$.

En la siguiente tabla encuentra las parejas ordenadas para los valores de la variable *x* que se indican.

$\boldsymbol{x}$	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{f(x)}$					

¿Podrías evaluar la función anterior para valores no enteros? _____ ¿Por qué?_____.

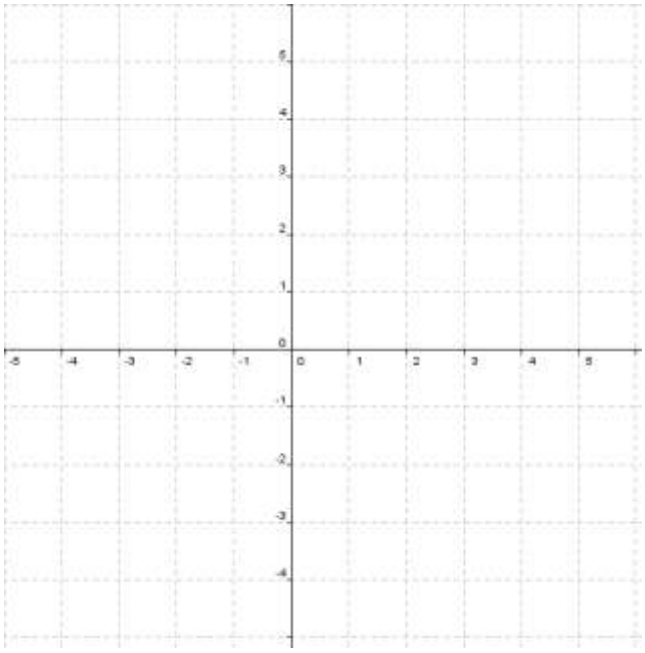
Evalúa $f(x)$ para *x* con los siguientes valores $-1.8, -0.6$, 1.3, 2.9 y forma las parejas ordenadas.

$f(-1.8) =$ _____ $f(-0.6) =$ _____ $f(1.3) =$ _____

$f(2.9) =$ _____

Con las parejas ordenadas que obtuviste bosqueja la gráfica de

$$f(x) = x^3 - 2x + 3,$$



¿Cuál es el dominio y rango de la función?_____

Obtuviste la ecuación polinomial

$$x^3 - 2x + 3 - y = 0 \quad \text{o} \quad y = x^3 - 2x + 3$$

Notaras que se cumple con: $x^3 - 2x + 3 - y = 0$, es decir, tomando la pareja ordenada (-2,-1), tenemos:

$$(-2)^3 - 2(-2) + 3 - (-1) = 0$$

Sugerencias para quien imparte el curso

En parejas, los alumnos trabajarán en los ejercicios siguientes u otros para que encuentren parejas ordenadas.

Tomen otras parejas ordenadas de la tabla que ya calcularon y verifiquen que esto siempre se cumple.

Para (,) ; $(\quad)^3 - 2(\quad) + 3 - \quad = 0$
Para (,) ; $(\quad)^3 - 2(\quad) + 3 - \quad = 0$
Para (,) ; $(\quad)^3 - 2(\quad) + 3 - \quad = 0$

Para (,) ; ($)^3 - 2($ $) + 3-$ $= 0$

Ejemplo 2. Si se tiene la función $f(x) = 2x^3 - x + 1$

¿Cuál es el valor de x que hace que $f(x) = 0$?_____

¿Cuál es la pareja ordenada?_____

Sugerencias para quien imparte el curso

Supervisar muy de cerca el trabajo de los alumnos. De acuerdo a las características el grupo quien imparte el curso puede proporcional los valores de *x* para que los alumnos encuentren los valores de *y,* y bosquejen la grafica de manera correcta.

Encuentra otras parejas ordenadas y bosqueja la gráfica. Asegúrate de trazar el punto en donde $f(x) = 0$

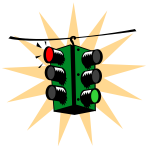
$f($ $) = 2($ $)^3 - ($ $) + 1$ = la pareja es (,)
$f($ $) = 2($ $)^3 - ($ $) + 1$ = la pareja es (,)
$f($ $) = 2($ $)^3 - ($ $) + 1$ = la pareja es (,)
$f($ $) = 2($ $)^3 - ($ $) + 1$ = la pareja es (,)
$f($ $) = 2($ $)^3 - ($ $) + 1$ = la pareja es (,)

El punto o puntos en donde la grafica cruza el eje equis, se conoce como la raíz o solución de la ecuación, es decir, es el punto en donde $f(x) = 0$

¿Cuál es la raíz o solución de la ecuación $x =$ _____ . La grafica corta el eje x en ese punto.

Puntos problemáticos

Algunos alumnos pueden considerar que los problemas tienen una dificultad mayor a la que están acostumbrados, quien imparte el curso debe hacer preguntas que guíen a los alumnos para que ellos mismos encuentren la solución, o formar equipos para que los alumnos con menos dificultades apoyen a sus compañeros.



Conceptos clave:

24. Expresión con dos variables

Si a $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ le restamos $f(x)$ entonces:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - f(x) = 0$$

Si sustituimos $f(x)$ por la variable y obtenemos

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - y = 0$$

Otra forma de expresarlo es:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = y$$

Donde $a_n, a_{n-1,} \ldots a_1 + a_0$ son números reales llamados los coeficientes de la función polinomial y n es un entero no negativo.

a_n es el coeficiente principal de la función y n es el grado

25. En el caso de una función polinomial al valor *x* que hace que

$$f(x) = 0$$

Se le llama cero del polinomio.

Cuando esto sucede, se tiene un punto donde la gráfica **corta al eje x**, es decir, el par ordenado (x,0).

26. Al valor de *x* que cumple con:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Se le llama **solución o raíz** de la ecuación.

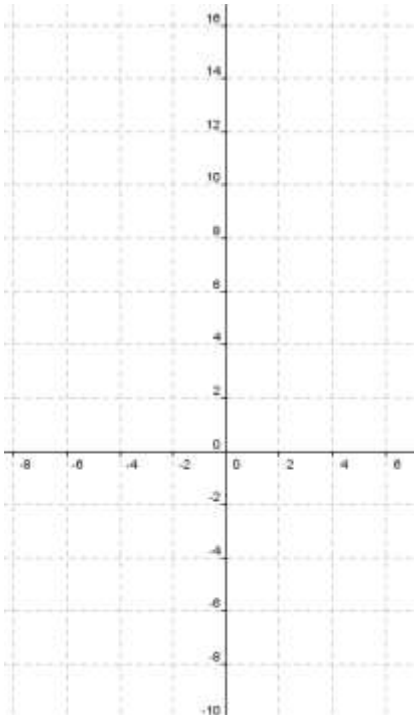
Obtén la solución de $x^2 + 3x - 4 = 0$

_____

Evalúa $f(x) = x^2 + 3x - 4$ para los valores que se indican en la tabla.

$\boldsymbol{x}$	-5	-4.5	-4	-3	-2	-1	0	1	1.5	2.5
$\boldsymbol{f(x)}$	6		0		-6		-4	0		9.75

Bosqueja la gráfica



¿Cuál es el dominio y rango de la función?_____

En este ejemplo, obtuviste $x^2 + 3x - 4 - y = 0$ o bien $y = x^2 + 3x - 4$

Toma algunas parejas ordenadas y como en el ejemplo anterior, verifica que $x^2 + 3x - 4 - y = 0$

Para: (,); ($)^2 + 3($ $) - 4-$ $= 0$
Para: (,); ($)^2 + 3($ $) - 4-$ $= 0$
Para: (,); ($)^2 + 3($ $) - 4-$ $= 0$
Para: (,); ($)^2 + 3($ $) - 4-$ $= 0$

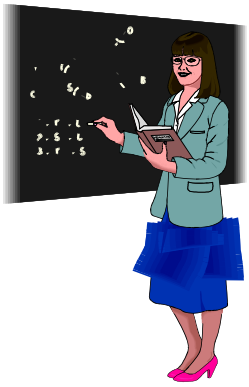
¿Cuáles son los valores de x que hacen que $f(x) = 0$?_____

¿Cuáles son las parejas ordenadas?_____

¿Cuáles son las raíces o soluciones de la ecuación? $x =$ _____.
La grafica corta el eje x en esos puntos.

Sugerencias para quien imparte el curso

Mediante una serie de graficas que los alumnos ya conocen de sus cursos anteriores, se puede introducir al estudiante para que utilice el criterio de la recta vertical y reconozca si una grafica representa una función o no.



Ejemplo

En la grafica que se muestra, cuando $x = -1$, ¿Cuál es el valor de y ?_____

Para $x = 2$, ¿Cuál es el valor de y?_____

Cuando $x = 0$, $y =$:_____. Si $x = 1$, $y =$:_____.

A cada valor de x, ¿Cuántos valores de y le corresponden?_____

En el plano cartesiano podemos representar los puntos de coordenadas (x, y) que satisfagan cierta función f. Sin embargo, como antes ya mencionamos en los conceptos clave de la primera sección, cada numero x, en el dominio de f, tiene una y sólo una imagen $f(x)$. Es por esta razón que la grafica de una función, no puede tener dos puntos con la misma abscisa y distintas ordenadas.

Por ejemplo si se tiene una grafica como la siguiente:

Cuando $x = 1$, $y =$:_____. Si $x = 4$, $y =$:_____.

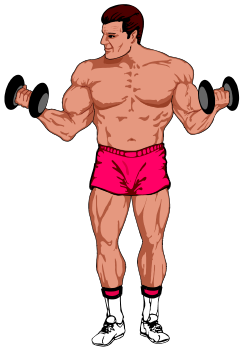
En esta gráfica a cada valor de $x\ con\ 0 \leq x$, le corresponden dos valores de y.

Sugerencias para quien imparte el curso

Tratar de que los alumnos conjeturen y lleguen por ellos mismos a enunciar con sus propias palabras el criterio de la recta vertical.

Un conjunto de puntos en el plano xy, es la gráfica de una función si, y solo si, una recta vertical intersecta a la gráfica a lo mas en un punto.

Concluimos que si la recta vertical intersecta a la gráfica en más de un punto, entonces NO es una función

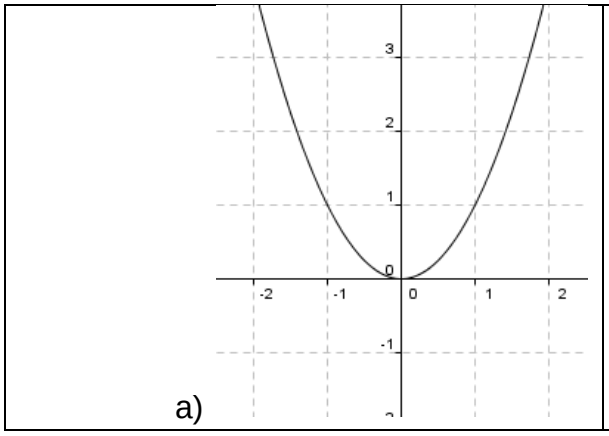


Ejercicio 4

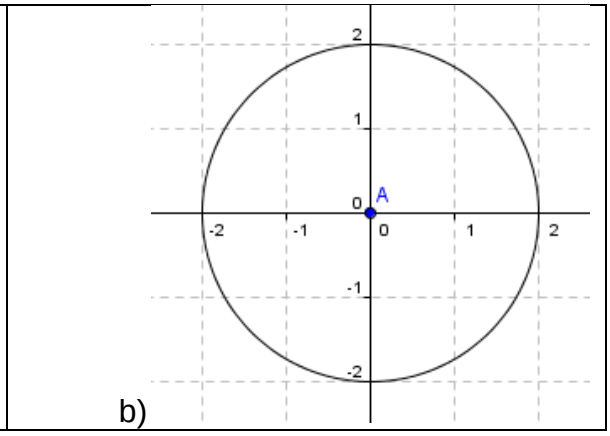
Para cada uno de las funciones dadas.

a) Indica cual es dominio y rango
b) Elabora una tabla de valores (en un rango de -5 a 5)
c) Indica cuál es el valor o valores de x que hacen que $f(x) = 0$.
d) Indica cuál es la pareja ordenada o parejas ordenadas que cumplen con el inciso c.
e) Cuáles son las raíces de la ecuación
f) Bosqueja la gráfica

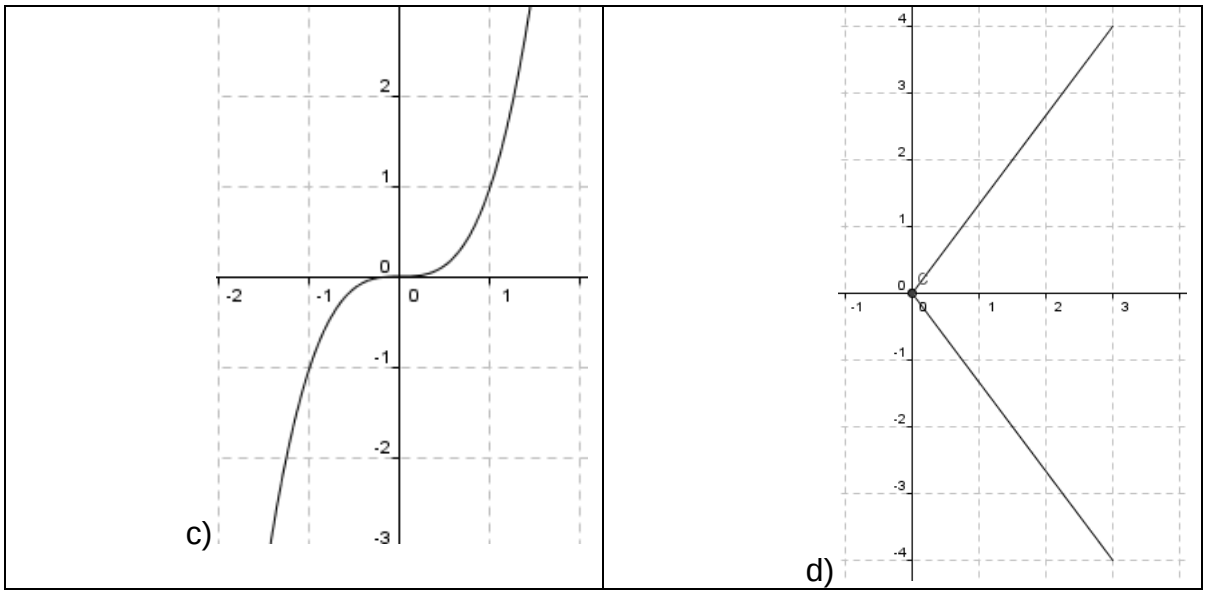
1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
2. $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - 1$
3. $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$
4. $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
5. $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$
6. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24$
7. En las siguientes gráficas indica mediante el criterio de la recta vertical si se trata de una función o no.



a)



b)



Dado lo anterior puedes concluir que:
La grafica a) _____ representa a una función.
La grafica b) _____ representa a una función.
La grafica c) _____ representa a una función.
La grafica d) _____ representa a una función.