GRAFICA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Sugerencias para quien imparte el curso

Asegurarse de que los alumnos manejan los conceptos vistos, tales como concavidad, máximo y mínimo, función positiva y negativa, intervalos, raíces de una función, división sintética y saben factorizar.

Propósitos

- Bosqueja la grafica de funciones polinomiales a partir del comportamiento local y al infinito.

Aparte de las características estudiadas en las secciones anteriores para el análisis de funciones, existen particularidades que son también importantes para dicho análisis.

Ejemplos

1) La grafica de $f(x) = x^2 - 5x + 6$ tiene la forma que se muestra en la figura:

¿En qué intervalo la función es creciente?_____

¿Por qué?_____

_____

Considerando el intervalo donde la función es creciente, ¿Cómo son los valores para *f(x)* a medida que se consideran valores mayores de *x*?_____

Si la grafica de una función sube a medida que se recorre el eje X de izquierda a derecha, entonces dicha función es **creciente** en esa región. Si se tabula, puede observarse que a valores mayores de *x*, también aumenta *f(x)*.

¿En qué intervalo la función es decreciente?_____

¿Por qué?_____

_____

Considerando el intervalo donde la función es decreciente, ¿Cómo son los valores para *f(x)* a medida que se consideran valores mayores de *x*?_____

De manera análoga, una función es **decreciente** en la región, si al recorrer de izquierda a derecha el eje de las abscisas, *f(x)* toma valores cada vez menores.

Puntos problemáticos
Al inicio, para algunos alumnos será complicado entender el comportamiento al infinito, quien imparte el curso debe asegurarse de que todos entiendan, siguiendo las sugerencias indicadas arriba.

2) En la sección anterior, analizaste y graficaste

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 12x$$

Notaste que la grafica se aleja del origen de forma indefinida tanto en *x = -2* como en *x = 3.* Evalúa *f(x)* para *x = 4,5,6*

_____, _____, _____

¿Qué pasa con *f(x)* cuando se toman valores de *x* cada vez mayores?_____ Cuando una variable crece indefinidamente hacia la región positiva del eje coordenado, se dice que, **tiende a infinito** y se denota como $\boldsymbol{x} \to \infty$ En la función que acabas de evaluar, a valores más a la derecha del eje *x*, los valores en *f(x)* también crecen, es decir, van hacia arriba, tal como se muestra en la grafica. En $f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 12x$, tiene cinco términos ordenados de acuerdo al término de mayor exponente. El cual es: _____. El termino con el exponente menor es_____	

Si *x* toma valores más grandes, por ejemplo *x = 50 o x = 100*, ¿Cuál de los términos tiene el mayor valor?_____ ¿Por qué?_____
_____

A medida que son más grandes los valores de la variable *x*, el termino x^5, crece mucho más rápido que los otros, de esta forma, x^5 marca la tendencia que tiene la función, ya que los demás términos resultan despreciables comparados con el término de mayor exponente.

En una función, cuando $\boldsymbol{x} \to \infty$ el **término de mayor exponente es el de mayor influencia en la tendencia de la gráfica**.

Sugerencias para quien imparte el curso

*Discutir con los compañeros y profesor, que significa la expresión **"tiende a menos infinito"**, que se denota como:* $\boldsymbol{x} \to -\infty$

En las siguientes funciones indica lo que se te pide sin realizar operaciones:

i) En $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$, cuando $x \to \infty$, $f \to$ _____ y cuando $x \to -\infty$, $f \to$ _____.

ii) En $f(x) = 5x^3 - x^2 + 1$, cuando $x \to \infty$, $f \to$ _____ y cuando $x \to -\infty$, $f \to$ _____.

iii) En $f(x) = -x^5 - x^3 + 2x - 8$, cuando $x \to \infty$, $f \to$ _____ y cuando $x \to -\infty$, $f \to$ _____.

Para **bosquejar la gráfica** de una función polinomial, será conveniente seguir un procedimiento como el siguiente:

a) Estimar con base en el grado del polinomio, el numero de ceros reales (raíces reales) que podría tener el polinomio.
b) Calcular los ceros reales del polinomio, es decir, los valores para los que $f(x) = 0$. Corresponden a los puntos en que la grafica corta al eje x.
c) Obtener la tendencia de la función cuando $x \to \infty$, y cuando $x \to -\infty$
d) Delimitar el intervalo del eje X en el que se darán valores de x de tal manera que la gráfica no se salga del espacio disponible.
e) Dar a x valores convenientes y calcular $f(x)$,
f) Analizar el comportamiento de la función para los valores dados y decidir si son suficientes.
g) Decidir si hay necesidad de utilizar para el eje Y una escala diferente de la empleada en el eje X.
h) Bosquejar la gráfica
i) Dar el rango

Cuando completemos estos pasos, debemos unir los puntos con un trazo suave que nos permita respetar el comportamiento de la función en el resto de su dominio.

Sugerencias para quien imparte el curso

Formar parejas de alumnos y posteriormente equipos de tres personas, para que resuelvan y repasen los ejercicios de manera que todos puedan comprender. No se recomienda para esta actividad equipos grandes. Se debe dar tiempo suficiente para completar las actividades.

Ejemplos

3) Bosqueja la grafica de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, indica el dominio, rango y el comportamiento cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$,

De acuerdo a los pasos recomendados (del inciso a al inciso i) tenemos que:

a) Dado que la función es de tercer grado tendremos cuando mas tres ceros reales.

b) La ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ tiene al menos una solución de la forma $\frac{p}{q}$, donde $p = \pm 1, \pm 2$ y $q = \pm 1$. Las posibles soluciones son entonces: $= \pm 1, \pm 2$.

Utiliza la división sintética para verificar que una de sus raíces es -1 y encuentra las otras dos.

c) Como en x^3 el coeficiente es positivo, es decir 1, cuando $x \to \infty$, $f \to$ _____ y cuando $x \to -\infty$, $f \to$ _____.

d) Con base en la información hasta aquí recopilada, podemos intentar graficar la función para valores de *x* entre -3 a 2.

e) Completa la siguiente tabla

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	0				

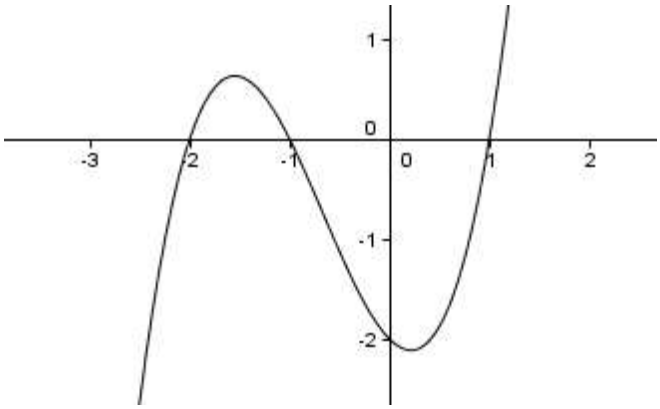
f) En la tabla anterior, se tienen dos ceros consecutivos, de tal forma que no sabemos si la grafica es positiva o negativa en ese intervalo, para saberlo, debemos dar un valor entre -2 y -1, por ejemplo -1.5.

Como queda ahora la tabla con este nuevo valor

x	-3	-2	-1.5	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	0					

g) De acuerdo a lo obtenido No es necesario ajustar la escala

h) La grafica es la que se muestra a continuación



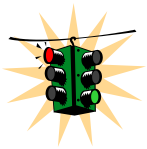
i) Por ser una función de grado impar (grado 3). El dominio son todos los números reales, el rango también son todos los reales.

4) Bosqueja la grafica de $\mathrm{V(x)} = 4\mathrm{x}^3 - 74\mathrm{x}^2 + 336x$
   a) ¿Cuántos ceros o raíces tiene a lo más?_____
   b) Una raíz que salta a la vista es: _____ encuentra las otras dos raíces usando la formula general para ecuaciones de segundo grado.
   c) Cuando $x \to \infty$, $f \to$ _____ y cuando $x \to -\infty$, $f \to$ _____.
   d) ¿Cuál es el rango de valores que intentarías para x?_____
   e) Completa la tabla

x	-2	-1	0	1	2	3	4	6	7	8	10	12
$f(x)$	-1000	-414		266				216			-40	

   f) ¿Los valores dados son suficientes? _____
   g) ¿Es necesario ajustar la escala del eje y?_____
   h) Bosqueja la gráfica

i) Tanto el dominio y rango de la función son todos los números_____
Debido a que el exponente es_____



Conceptos clave:

32. Una **función es creciente** en una región si y solo si al aumentar los valores de la variable independiente x, aumentan también los valores de la función. Es decir, $f(x)$ es creciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 de esta región siempre que $x_2 > x_1$ necesariamente $f(x_2) > f(x_1)$ e inversamente.

33. Una **función es decreciente** en una región si y solo si al aumentar los valores de la variable independiente x, disminuyen también los valores de la función. Es decir, $f(x)$ es decreciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 de esta región siempre que $x_2 > x_1$ necesariamente $f(x_2) < f(x_1)$ e inversamente.

34. Cuando una variable crece indefinidamente hacía la región positiva del eje coordenado, **decimos que tiende a infinito.** Se denota por $x \to \infty$

35. Cuando una variable decrece indefinidamente hacía la región negativa del eje coordenado, **decimos que tiende a menos infinito.** Se denota por $x \to -\infty$

En el eje X la región positiva donde x crece indefinidamente es hacia la derecha, la región donde en el eje Y crece la función crece indefinidamente es hacia arriba.

36. En una función el término que tiene el mayor exponente es el que decide la tendencia de la función.

37. En $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

A. Si n es par y a_n es positivo, entonces:
a) Cuando $x \to \infty$, $f \to \infty$
b) Cuando $x \to -\infty$, $f \to \infty$

B. Si n es impar y a_n es positivo, entonces:
a) Cuando $x \to \infty$, $f \to \infty$
b) Cuando $x \to -\infty$, $f \to -\infty$

C. Si n es par y a_n es negativo, entonces:
a) Cuando $x \to \infty$, $f \to -\infty$

D. Si n es impar y a_n es negativo, entonces:
a) Cuando $x \to \infty$, $f \to -\infty$

b) Cuando $x \to -\infty$, $f \to -\infty$

b) Cuando $x \to -\infty$, $f \to \infty$

38. En general, una función polinomial con coeficientes reales tiene como **dominio** a todo el conjunto de los números reales.

Ejercicio 10

Para cada una de las funciones polinomiales siguientes:

a) Estimar con base en el grado del polinomio, el numero de ceros reales (raíces reales) que podría tener el polinomio.

b) Calcular los ceros reales del polinomio, es decir, los valores para los que $f(x) = 0$. Corresponden a los puntos en que la grafica corta al eje x.

c) Obtener la tendencia de la función cuando $x \to \infty$, y cuando $x \to -\infty$

d) Delimitar el intervalo del eje X en el que se darán valores de x de tal manera que la gráfica no se salga del espacio disponible.
e) Dar a x valores convenientes y calcular $f(x)$,
f) Analizar el comportamiento de la función para los valores dados y decidir si son suficientes.
g) Decidir si hay necesidad de utilizar para el eje Y una escala diferente de la empleada en el eje X.
h) Bosquejar la gráfica
i) Dar el rango

1.- $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

2.- $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

3.- $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 13x^2 - 14x - 24$

4.- $f(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$

5.- $f(x) = -x^6 + 14x^4 - 49x^2 + 36$

6.- $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$