FUNCIONES POLINOMIALES

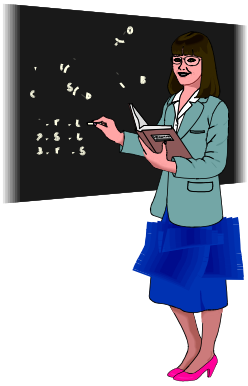
Sugerencias para quien imparte el curso

Es importante comenzar con algún problema introductorio que permita al alumno saber que las funciones polinomiales tienen aplicaciones prácticas.

Propósitos

- Explorar en una situación o problema que da lugar a una función polinomial, las condiciones, relaciones o comportamientos, que permitan obtener información y sean útiles para establecer la representación algebraica.
- Modelar situaciones que den lugar a una función polinomial

El problema del auto



En cierto momento un automóvil tiene una velocidad de 10m/s. El conductor acelera un poco y en 5 segundos aumentó la velocidad a 20m/s.

¿Cuál es la aceleración del automóvil? Si se mantiene la misma aceleración 5 segundos más, es decir, en el instante $t = 10$, ¿Cuál sería la velocidad en ese momento? ¿Cuál es la distancia recorrida por el auto desde el inicio hasta el momento $t = 10$?

Sugerencias quien imparte el curso

Hacer preguntas a los alumnos para saber cómo podrían resolver el problema. Mencionarles que para encontrar la velocidad final de un cuerpo con cierta aceleración, se usa la formula $v = v_0 + at$ *y la distancia recorrida está dada por* $d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$*. Se debe apoyar a los alumnos para que resuelvan el problema.*

Puntos problemáticos

Algunos alumnos pueden tener dificultades para despejar las variables o sustituirlas, si el problema es generalizado, quien imparte el curso debe considerar hacer un breve repaso o formar equipos para que los alumnos con menos dificultades apoyen a sus compañeros.

Para responder a las preguntas del problema del automóvil, primero se debe encontrar la aceleración.

De tal forma que despejando de $v = v_0 + at$, tenemos que

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

Sustituyendo

$$a = \frac{20m/s - 10m/s}{5s} = 2m/s^2$$

Recordemos que las unidades deben estar en el S.I. (Sistema Internacional) por lo tanto, el tiempo está en segundos y la distancia en metros.

En la segunda pregunta debemos encontrar la velocidad cuando $t = 10$. Sabiendo que la aceleración es $2m/s^2$, utilizamos $v = v_0 + at$

Sustituyendo

$$v = 10m/s + 2m/s^2(10s) = 30m/s$$

Para la tercera pregunta la distancia recorrida se obtiene al sustituir los valores correspondientes en $d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

De tal forma que:

$$d = 10m/s(10s) + \frac{1}{2}2m/s^2(10s)^2 = 200m.$$

El problema de las tabletas electrónicas

Una compañía que vende tabletas electrónicas (tablets) ha encontrado que el ingreso por sus ventas, es una función del precio por unidad *p* (en miles de pesos). Si el ingreso I es:

$$I = -2p^2 + 19p$$

¿Cuál es precio unitario *p* que debe cobrarse para maximizar el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?

Sugerencias para quien imparte el curso

Guiar a los alumnos para que lleguen a la solución haciéndoles preguntas individuales, pasándolos al pizarrón o mediante el llenado de una tabla para distintos valores propuestos.

Completa la tabla (valores dados en miles)

Precio P	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ingreso I						

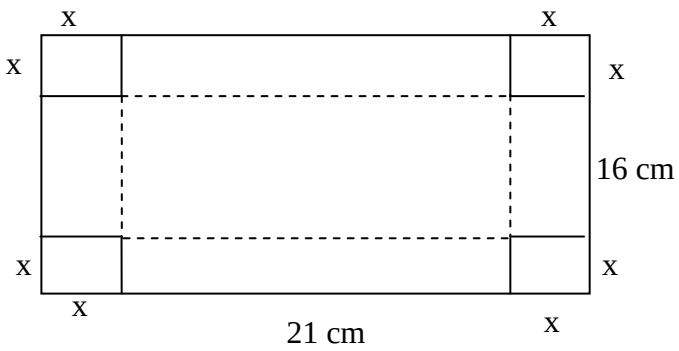
Al parecer el ingreso máximo esta con un precio de entre 4 y 5 (mil pesos).

Completa la siguiente tabla dando diferentes valores entre 4 y 5 y elabora una conjetura para contestar las preguntas planteadas en este problema.

Precio P	**4.1**	**4.3**				**4.9**
Ingreso I						

Problema de la caja

Se requiere construir una caja sin tapa, a partir de una lámina rectangular que mide 21cm de largo y 16cm de ancho. Se debe construir la caja cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas de la lámina, doblando hacia arriba los lados y soldando. Encuentra la medida del lado de los cuadrados que deben cortarse para obtener la caja de volumen máximo.



Puntos problemáticos

Algunos alumnos pueden considerar que los problemas tienen una dificultad mayor a la que están acostumbrados, quien imparte el curso debe hacer preguntas que guíen a los alumnos para que por ellos mismos encuentren la solución, o formar equipos para que los alumnos

con menos dificultades apoyen a sus compañeros. Algunas preguntas sugeridas para este problema pueden ser:

Si x es la medida del lado del cuadrado que cortaremos en cada esquina, ¿Cuánto mide el largo del rectángulo? 21 - _____¿Cuánto mide el ancho del rectángulo? 16 - _____¿Cuál será la altura de la caja? _____
¿Cuál será el volumen de la caja? V=(21 -)(16 -)x

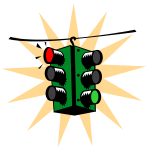
Haciendo las operaciones correspondientes, el volumen anterior puede escribirse como:

$$\mathrm{V(x)} = 4\mathrm{x}^3 - 74\mathrm{x}^2 + 336x$$

Es una expresión que indica que el volumen de la caja depende únicamente del lado *x* del cuadrado que cortamos.

En la siguiente tabla, completa los valores que faltan, según el lado del cuadrado x. Conjetura sobre cuál podría ser la caja de máximo volumen Proporciona valores adicionales si así lo consideras.

Lado del cuadrado x	2.6	2.8	3	3.2	3.4
Volumen de la Caja V					



Conceptos clave:

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos.

1. Una **función** de X en Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x de X con un único elemento y de Y
2. **función polinomial es de la forma**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1,} \ldots a_1 + a_0$ son números reales llamados los coeficientes de la función polinomial y n es un entero no negativo. El dominio lo constituyen todos los números reales.

3. a_n es el coeficiente principal de la función y n es el grado de la función polinomial.

Una forma de graficar una función polinomial es asignar valores a la variable x, y calcular estos para $f(x)$, de esta forma se tienen algunas parejas ordenadas que forman parte de la función.

Sugerencias para quien imparte el curso

Formar parejas de trabajo con los alumnos para que respondan las preguntas siguientes.

En el problema de la caja, $V(x)$ es una función polinomial _____

¿Por qué?_____

¿Cuáles son los coeficientes de $V(x)$?_____

¿De qué grado es la función polinomial $V(x)$? _____

En el ejercicio anterior, x es el lado del cuadrado que se corta en cada esquina de la lámina, x representa un número, tomado de un conjunto ***D*** de números reales.

Hay una ***regla de correspondencia*** que asocia a cada valor x un único número real V, en donde V (volumen) es un número tomado de un conjunto ***C*** de números reales. La regla de correspondencia es:

$$\mathrm{V(x)} = 4\mathrm{x}^3 - 74\mathrm{x}^2 + 336x$$

En el ejercicio de la caja:

1. ¿Porqué x no puede ser menor que cero?_____

_____

2. ¿Porqué x no puede ser mayor que ocho?_____

_____

3. ¿El valor de x solamente puede ser entero?_____

_____

4. ¿El volumen puede tomar valores negativos?_____

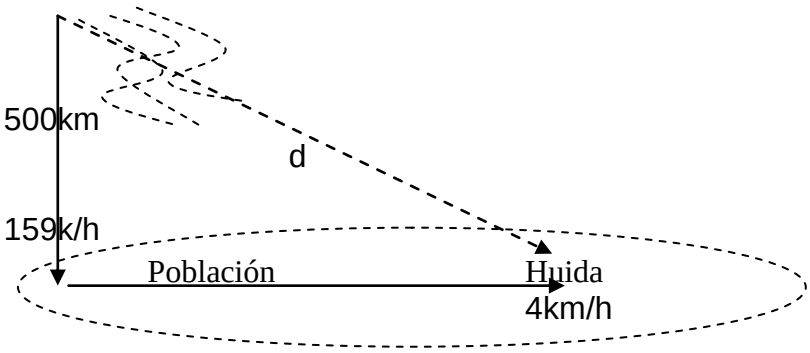
_____

Sugerencias para quien imparte el curso

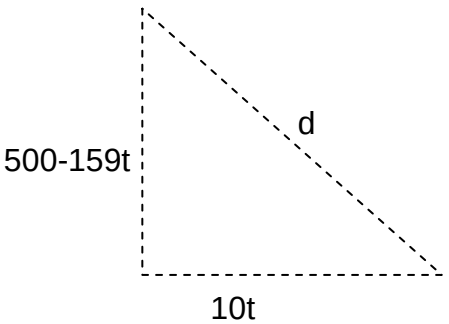
Invitar a los alumnos para que contesten las preguntas 1 a 4 anteriores con el problema del automóvil y ganancias.

El problema del tsunami

Una ola producida a las 13:00 por un tsunami se desplaza rápidamente hacia la playa a una velocidad de 159km/h, una población a 500km corre peligro, la única opción es huir hacia el este, tratando de salir del perímetro de alcance. Se debe calcular a qué hora la ola del tsunami estará más cerca a dicha población. La figura esquematiza el problema. Supón que la velocidad de desplazamiento de una persona promedio es de 4km/h.



Después del tiempo *t* en horas, el tsunami se ha movido 159t kilómetros, la distancia que falta para que llegue a la playa es (500-159t), la gente se ha movido *4t* kilómetros. El la figura se forma un triangulo rectángulo.



Por el teorema de Pitágoras

¿Cuál es la distancia?_____

En una función cuadrática las coordenadas del vértice son $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$

Obteniendo el tiempo t, de $d = 25381t^2 - 159000t + 250000$

$$t = \frac{159000}{2(25381)} \approx 3.1323 hrs$$

¿Qué hora será cuando el tsunami llegue a la playa?_____

¿A qué distancia hacia el este se encontrarán las personas?_____

¿Es una función polinomial?_____

¿De qué grado es? _____

El problema de la compañía de gas.

Una compañía de Gas LP, desea construir tanques de gas para empresas que así lo demandan, se requiere soldar a una pieza cilíndrica de acero de 6 mts de largo con dos semiesferas en cada extremo, tal como se muestra abajo.

Se requiere modificar el volumen del tanque, pero sólo es permitido variar el radio, es decir, el largo del tanque debe permanecer constante a 6mts.

Sugerencias para quien imparte el curso

De forma individual los alumnos deben responder a las preguntas siguientes.

¿Cómo se calcula el volumen de un cilindro? _____

Debido a que la altura siempre es 6mts, entonces $V_1(x) =$ _____

Si unimos las dos mitades de las esferas, se forma una esfera cuyo volumen es: $V_2(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$

¿Cómo se calcula el volumen de una esfera? _____

¿Cuál es el volumen total del tanque? _____

El volumen del cilindro es $V_1(x) = \pi x^2 h$, pero debido a que la altura siempre es 6mts, entonces $V_1(x) = 6\pi x^2$ mas el volumen de la esfera $V_2(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$, el volumen total es $V(x) = 6\pi x^2 + \frac{4}{3}\pi x^3$

Es una expresión que indica que el volumen del tanque depende únicamente del radio, tal como se especificó en un principio.

¿Por qué $V(x)$ es función polinomial?

_____

¿Cuáles son los coeficientes de $V(x)$?_____

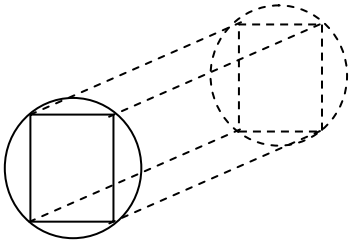
¿De qué grado es la función polinomial $V(x)$? _____

Hay una regla de correspondencia que asocia a cada valor ***x*** un único número real V, en donde V (volumen) es un número tomado de un conjunto de números reales.

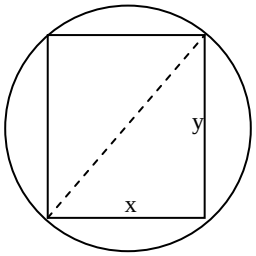
La regla de correspondencia es: _____

Problema del la viga

Se tiene un troco cilíndrico de 30cm de diámetro y se requiere obtener una viga con la mayor resistencia posible. Sabiendo que la resistencia es directamente proporcional al ancho y al cuadrado de la altura. ¿Cuál es el ancho y el alto de la viga?



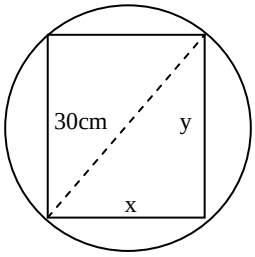
Vista de frente



Puntos problemáticos
Algunas veces el término “directamente proporcional” o el teorema de Pitágoras no es recordado.

Si x es el ancho de la viga y y la altura, ¿cuándo mide la diagonal?_____

¿Por qué?_____



De acuerdo con el teorema de Pitágoras $x^2 +$ _____ $=$ _____

Despejando $y^2 =$ _____ $-$ _____, por lo tanto y= $\sqrt{\text{_____} - \text{_____}}$

Si anteriormente se indicó que la resistencia R de la viga de sección transversal rectangular es directamente proporcional al ancho y al cuadrado de la altura, podemos decir que $R =$ _____

Completa la siguiente tabla con los valores que se te solicitan para x(ancho), realiza las operaciones y obtén y(altura) y R (resistencia).

x	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
y^2	755.70				
y	27.49				
$R = xy^2$	9068.40				

Para valores distintos en x (ancho), la altura y y la resistencia R varian.

Con base en los resultados, ¿a qué altura y ancho de la viga parece haber una resistencia mayor?_____

De acuerdo a lo obtenido sabemos que $1)\ R = xy^2$, y también que

2) $y^2 = 900 - x^2$.

Utilizando la ecuación 2 para sustituirla en la ecuación 1 tenemos:

$$R = x(900 - x^2)$$

$$R = 900x - x^3$$

La expresión anterior, depende solo de la variable x, que en el contexto del problema representa a _____, es decir:

La resistencia así calculada dependerá solo del ancho de la viga.

Hay una regla de correspondencia que asocia a cada valor ***x*** un único número real R, en donde R (resistencia) es un número tomado de un conjunto de números reales.

La regla de correspondencia es: _____

Completa la siguiente tabla con los valores que se te solicitan para x(ancho), obtén y(altura) y R(resistencia).

x	**12**	**16.5**		**17.5**	**18**
$R(x) = 900x - x^3$	9072			10390.625	

La función en el problema de la viga es polinomial _____

¿Por qué?_____

¿Cuáles son los coeficientes de $R(x)$?_____

¿De qué grado es la función $R(x)$? _____

Ejercicio 1

Para cada uno de los ejercicios siguientes encontrar la función que se solicita e indicar si se trata de una función polinomial y justificarlo, indicar también de que grado es esta.

1.- Haciendo pruebas para el lanzamiento de cohetes, se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial de $v_0 = 30m/s$, considerando que la fuerza de gravedad $g = 9.8m/s^2$ y despreciando la resistencia del aire.

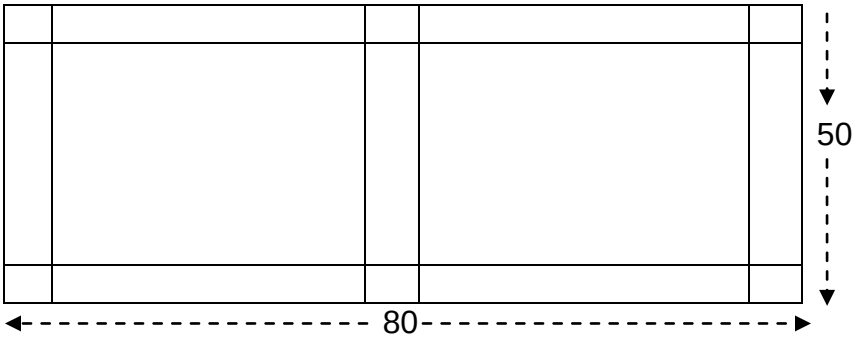
a) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo 2s después del lanzamiento?
b) ¿Cuánto tarde al cuerpo en llegar al punto más alto de su trayectoria?
c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el cuerpo?

2.- La altura *h* en metros de una pelota de golf lanzada desde un montículo en un tiempo de *t* dado en segundos está dada por $h(t) = -3t^2 + 11t + 4$

a) Cuándo $t = 1.5$, ¿Cual es el valor de la altura $h(t)$?_____
b) Cuándo $t = 2$, ¿Cual es el valor de la altura $h(t)$?_____
c) Cuándo $t = 4$, ¿Cual es el valor de la altura $h(t)$?_____
d) Cuándo $t = 4.2$, ¿Cual es el valor de la altura $h(t)$?_____
e) ¿Qué implica este último valor?

3.- Si el volumen de una caja en forma de prisma rectangular es 210cm^3 y las dimensiones de la caja en centímetros son tres números naturales consecutivos. Encuentra las dimensiones de la caja.

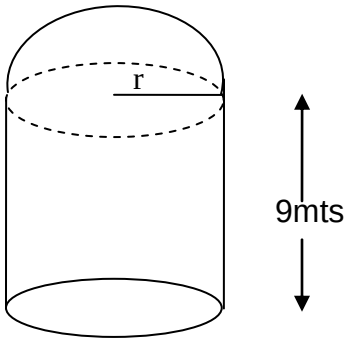
4.-Se necesitan construir cajas para regalo como la que se muestra en la siguiente figura:



Si se cortan 6 cuadrados de x cm por lado en cada esquina y en la parte media de una lámina rectangular y posteriormente se doblan hacia arriba los extremos y los lados, se forma una caja con su tapadera.

a) Encuentra la función que representa el volumen de la caja
b) Si x mide 6cm. ¿Cuál es el volumen de la caja?
c) Si x mide 5cm. ¿Cuál es el volumen de la caja?
d) ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar x?
e) ¿El valor de x solamente puede ser entero?
f) ¿El volumen puede tomar valores negativos?
g) Si el volumen de la caja es de 15000 cm^3 ¿Cuánto mide su alto?

5.- Si se construye tanque de almacenamiento para granos (llamado silo) de forma cilíndrica con una tapa en forma de semiesfera, encuentra la función que representa el volumen sabiendo que la altura del cilindro siempre debe ser de 9mts y el radio puede variar.



6.- Determinar el punto de la parábola $y = 25 - x^2$ que esté más cercano al punto (5,25).

Ayuda: $d = \sqrt{(x-5)^2 + (y-25)^2}$, como el punto (x,y) satisface la ecuación $y = 25 - x^2$, se sustituye esta última en la ecuación de la distancia.

7.- En economía, la cantidad de ingreso R, está definida como la cantidad de dinero obtenida de la venta de un producto y es igual al precio de venta unitario del producto por el numero x de artículos vendidos. R=xp, por lo general existe una relación entre x y p, si uno aumenta el otro disminuye.

Si *p* y *x* están relacionados por $p = -\frac{1}{7}x + 13 \;\; 0 \leq x \leq 91$. Expresar R en función del número de artículos vendidos.