FACTORIZACIÓN

Sugerencias para quien imparte el curso

Para abordar mejor este tema, quien imparte el curso debe cerciorarse de que los alumnos saben factorizar, se recomienda proporcionar una lista de las factorizaciones más usuales. Como se muestra abajo.

Propósitos

- Factorizar un polinomio conociendo algunos de sus ceros
- Aplicar el algoritmo para dividir polinomios

Ejemplos

Obtén el producto de los siguientes factores

1. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})=$
2. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})=$
3. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{10})(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{2})=$
4. $(\mathbf{6}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})=$
5. $(\boldsymbol{x}-\mathbf{7})(\boldsymbol{x}+\mathbf{7})=$
6. $(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})=$

Lista de algunas factorizaciones comunes.

a) $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}=x^{n-2}(ax^2+bx+c)$. factor común.
b) $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$. Diferencia de cuadrados.
c) $x^2+mx+n=(x+a)(x+b), con\ m=a+b\ y\ n=ab$. Binomio con un término común.
d) $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$. Diferencia de cubos.
e) $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$. Suma de cubos.

Puntos problemáticos

Algunos alumnos pueden tener problemas para factorizar, se deben realizar más ejercicios y comprobar con todo el grupo que las identidades listadas se cumplen. Hacer equipos de trabajo durante la clase para que con la guía del profesor, entre ellos se ayuden.

Apoyándose en la lista proporcionada para factorizar polinomios, factoriza los siguientes:

1. $x^2 + 2x + 1 =$
2. $x^2 - 9 =$
3. $x^3 - 27 =$
4. $x^3 + 8 =$
5. $x^2 - 3x - 10 =$
6. $x^2 + 6x - 40 =$
7. $x^2 + 6x - 7 =$

Las funciones polinomiales también pueden factorizarse de la misma forma que se hizo para los polinomios. Esto es, pueden reducirse a una serie de factores que al multiplicarse dan como resultado la función original.

Ejemplos

La función polinomial $f(x) = x^3 - 25x$, se puede factorizar como:

$$f(x) = x(x^2 - 25)$$

Lo que está entre paréntesis, puede también factorizarse como:

$$f(x) = x(x + 5)(x - 5)$$

De tal forma que al factorizar $f(x) = x^3 - 25x$, queda como

$$f(x) = x(x - 5)(x + 5).$$

Cuando $x = 0$, $f(0) =$ _____, ¿en que otros dos casos el valor de *x* hace que $f(x) = 0$?_____, _____,

Los números encontrados son los ceros o _____ del polinomio.

¿Cuáles son los tres factores de $f(x) = x^3 - 25x$?
_____, _____, _____.

Sugerencias para quien imparte el curso

Es importante proporcionar varios ejemplos a los alumnos para que se logren factorizar la función y encontrar los ceros. El profesor debe resolver las dudas que vayan surgiendo durante el proceso. Los alumnos pueden trabajar en parejas o de forma individual.

¿Cómo puede factorizarse la función $f(x) = x^2 + x - 12$?

¿Cuáles son los dos casos en que $f(x)$ =0_____, _____

¿Cuáles son los dos factores de $f(x) = x^2 + x - 12$? _____, _____.

¿Cuáles son los ceros o raíces del polinomio?_____, _____

La función $f(x) = x^3 - 8$, puede factorizarse como_____

¿Cuál es una raíz del polinomio? _____, por tanto ¿Cuál es uno de sus factores?_____

Los ceros o raíces de una función polinomial los podemos obtener de los factores de dicha función, si sabemos las raíces o ceros de una función polinomial, podremos encontrar sus factores.

De acuerdo con un teorema de algebra si un numero *a*, es un cero del polinomio, entonces $(x - a)$ es un factor del polinomio.

Ejemplos

1) En $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ evalúa la función cuando $x = 2$

_____

Un factor de la función polinomial es:_____ y por tanto una de sus raíces o cero es: _____

Sabiendo que uno de sus factores es $x-2$, la función puede escribirse como:_____

La función queda como $f(x)=(x-2)(x^2+4x+3)$. La expresión en el segundo paréntesis puede factorizarse nuevamente, (x^2+4x+3), por lo tanto la función factorizada es:_____

En el caso anterior fue fácil encontrar los tres factores, sin embargo, esto no siempre sucede. Tomaremos este mismo ejemplo para explicar otra forma de obtener los factores de un polinomio cuando la respuesta no es tan sencilla.

Suponiendo que tienes el factor de un número por ejemplo, 202=28(___) ¿Cómo sabes cuál es el otro factor?_____

Esto mismo se hace para encontrar los factores de la función polinomial, es decir, dividir entre el factor conocido.

Repasemos brevemente lo que haces cuando divides:

```
     3   ──────────────────→  Toca a 3
7 | 25
  - 21   ──────────────────→  3X7 = 21, cambiamos signo y lo restamos de 25
----------
     4   ──────────────────→  Restan 4
```

```
          Cociente
Divisor  |Dividento
          Residuo
```

Para los polinomios el procedimiento es el mismo,

Puntos problemáticos
Algunos alumnos pueden tener problemas para factorizar o comprender la división, se deben formar parejas para que los alumnos que hayan comprendido mejor apoyen a sus compañeros.

Procedimiento para dividir un polinomio.

De acuerdo al ejemplo, la función polinomial es $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, sabiendo que $x - 2$ es un factor, procedemos a hacer la siguiente división:

$x^2 + 4x + 3$ $x - 2 \overline{\big) x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ $-x^3 + 2x^2$ ---------- $0 + 4x^2 - 5x$ $-4x^2 + 8x$ ---------- $0 \quad + 3x - 6$ $-3x + 6$ ---------- $0 \quad + 0$	1. Ordenar primero los dos polinomios de acuerdo a la potencia mayor. 2.- Al dividir el primer término x^3 entre x, el resultado es x^2, este número multiplicarlo por el divisor $x - 2$ y restarlo al dividendo. $x^2(x-2) = x^3 - 2x^2$ cambiamos signo a todos los términos 3.- Procedemos como en el paso 2, al dividir $4x^2$ entre x, el resultado es $4x$, este numero se multiplica por el divisor $x - 2$ y restarlo al dividendo $4x(x-2) = 4x^2 - 8x$ cambiamos signo a todos los términos. 4.- Nuevamente procedemos como en los pasos 2 y 3, dividiendo $3x$ entre x, el resultado es 3, que debemos multiplicarla por $x - 2$ y restarlo al dividendo $3(x-2) = 3x - 6$ cambiamos el signo a todos los términos. El residuo es cero puesto que $(x - 2)$ es un factor del polinomio, es decir, 2 es raíz del polinomio.

Como en cualquier otra división, cuando el residuo es cero, podemos decir que

Dividendo = Divisor X Cociente

Trasladado a nuestra función polinomial,

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$$

Sabemos que los otros factores de este polinomio son $(x+1)$ y $(x+3)$, pudimos haber hecho la división con cualquiera de estos dos y el residuo hubiera sido también cero, ¿Por qué?_____

Ejemplos

1) En $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, demuestra que $(x+1)$ es un factor de la función polinomial, es decir, que $x = -1$, es un cero o raíz de la función.

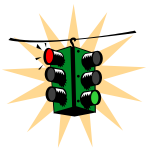
$x+1\overline{\big)\, x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ ---------- ---------- ----------	1.- Debemos encontrar la forma de que al multiplicar $x-1$ por alguna otra constante o variable y cambiar su signo podamos eliminar x^3. ¿Cuál es ese valor?_____ __$(x+1) =$ _____ cambiamos signo a todos los terminos 2.- Procedemos como en el paso 1, ahora busca la forma de que al multiplicar $x+1$ por alguna otra variable o constante y cambiarle signo, sea posible eliminar _____. El valor es: _____ _____$(x+1) =$ _____ cambiamos signo a todos los términos. 3.- Ahora nuevamente procedemos como en los pasos 1 y 2, debes buscar una constante o variable que al multiplicarla por $x+1$ y cambiarle signo, sea posible eliminar _____ El valor es: ____ ____$(x+1) =$ _____ cambiamos el signo a todos los términos.

2) En $f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$, demuestra que $(x - 4)$ es un factor de la función polinomial, es decir, que $x = -4$, es un cero o raíz de la función.

$x + 4 \overline{\big) x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}$	1.- Debemos encontrar la forma de que al multiplicar $x + 4$ por alguna otra constante o variable y cambiar su signo podamos eliminar x^4. ¿Cuál es ese valor?_____ __$(x + 4) =$ _____ cambiamos signo a todos los términos Continúa hasta finalizar, ¿Cuál será el residuo?_____

Sugerencias para quien imparte el curso

Resolver las dudas que surgan con el procedimiento de división de polinomios y dejar ejercicios para trabajar fuer de clases.



Conceptos clave:

Factorización de funciones polinomiales

24. Las funciones polinomiales pueden factorizarse de la misma forma que se hace para un polinomio.

a) $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = x^{n-2}(ax^2 + bx + c)$. factor común.
b) $f(x) = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Diferencia de cuadrados.
c) $f(x) = x^2 + mx + n = (x + a)(x + b), con\ m = a + b\ y\ n = ab$. Binomio con un término común.
d) $f(x) = x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$. Diferencia de cubos.
e) $f(x) = x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$. Suma de cubos.

Ejercicio 5

Realiza los siguientes ejercicios:

a) Indica cuales son los factores
b) Indica cuales son los ceros o raíces del polinomio
c) utiliza el **criterio de la recta vertical** para determinar si se trata o no de una función.

1. $f(x) = x^3 - 3x$

2. $f(x) = x^2 + 6x + 9$

3. $f(x) = 27x^3 + 8$

4. $f(x) = 6x^2 - x - 2$

Escribe las funciones en sus respectivos factores, sabiendo uno de sus factores:

5. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ Un factor es: $(x - 1)$

6. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ Un factor es: $(x + 2)$

7. $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ Un factor es: $(x + 3)$

8. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24$ Un factor es: $(x + 4)$

En los siguientes ejercicios, demuestra por medio de la división de polinomios si el valor dado es factor o no de la función polinomial dada.

9. $f(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$ Factores propuestos $(x - 4)\ y\ (x + 3)$

10. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ Factores propuestos $(x - 1)\ y\ (x + 2)$

11. $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ Factores propuestos $\left(x - \frac{1}{2}\right)\ y\ (x + \frac{1}{2})$

12. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ Factores propuestos $(x - 1)\ y\ (x + 4)$