DIVISIÓN SINTÉTICA

Sugerencias para quien imparte el curso

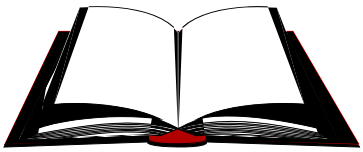
Para abordar mejor este tema, quien imparte el curso debe cerciorarse de que los alumnos saben realizar la división larga de un polinomio. Se debe ir paso a paso hasta que los alumnos comprendan los temas.

Propósitos

- Conocer y aplicar el algoritmo de la división sintética
- Conocer y aplicar el teorema del factor
- Conocer y aplicar el teorema del residuo

División sintética

Para encontrar el cociente y residuo de una función polinomial f de grado 1 o mayor que es dividida entre $x - c$, una versión abreviada de la división larga, es la llamada **división sintética** mucho más fácil de manejar.



Procedimiento para la división sintética.

Para la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, sabiendo que $x - 2$ es un factor, procedemos usar el siguiente arreglo:

Divisor | Dividendo

Productos parciales

Cociente y residuo

1. En el dividendo escribe sólo los coeficientes del polinomio, en orden descendente.	Divisor	1 2 -5 -6 Productos parciales Cociente y residuo
2. En el lugar del divisor anota el término constante $x - 2$ cambiando el signo de este.	2	1 2 -5 -6 Productos parciales Cociente y residuo

3. La fila de productos parciales la dejamos en blanco y bajamos el primer coeficiente del dividendo a la tercera fila, para ir formando el cociente.	2 | 1 2 -5 -6 1
4. Multiplicamos este cociente por el divisor y anotamos el producto abajo del segundo coeficiente del dividendo.	2 | 1 2 -5 -6 2 1
5. Sumamos la columna	2 | 1 2 -5 -6 2 1 4
6. Multiplicamos el resultado por el divisor y anotamos el resultado para el tercer coeficiente del polinomio	2 | 1 2 -5 -6 2 8 1 4
7. Se hace la suma de la columna	2 | 1 2 -5 -6 2 8 1 4 3
8. Multiplicamos el resultado por el divisor y ponemos el producto bajo la columna del cuarto coeficiente (divisor).	2 | 1 2 -5 -6 2 8 6 1 4 3

9. Obtenemos la suma de la cuarta columna	2 | 1 2 - -6 5 2 6 8 1 4 3 0 *El residuo es cero*

Los números 1, 4 y 3 de la tercera fila, son los coeficientes del cociente, el cual es un **polinomio de un grado menor que el dividendo**, es decir, el polinomio resultante es $x^2 + 4x + 3$.

Si el residuo es cero entonces $x - 2$ es un factor.

Sugerencias para quien imparte el curso

En los ejemplos siguientes, quien imparte el curso debe estar atento para resolver las dudas de los alumnos y verificar que los resultados sean correctos.

Ejemplos

1) En $f(x) = 3x^3 + 8x^2 - 7x + 4$ utiliza división sintética y demuestra que el residuo es 9 cuando el divisor es $x - 1$

De acuerdo el procedimiento,
¿Cuál es el divisor, con el cambio de signo?_____
¿Cuáles son los coeficientes?_____

1 | 3 8 -7 4

3

Realiza la división sintética en tu cuaderno, guíate con el procedimiento para la división sintética antes descrito.

2) Usa la división sintética y demuestra que $x + 3$ es un factor de

$$f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$$

Si $x + 3$ es un factor, entonces al evaluar $f(-3) =$_____

De acuerdo al procedimiento antes visto y puesto que $x + 3$, es un factor, el residuo de la división sintética debe ser:_____

Si en un polinomio faltaran algunas potencias de x, por ejemplo

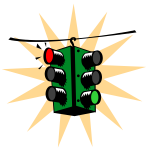
$$f(x) = 7x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 9$$

Al hacer la división sintética, deben incluirse ceros en las posiciones faltantes, es decir:

$$f(x) = 7x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 0x - 9$$

Posteriormente se procede a realizar la división.

En $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ si $x = -1$ es una raíz, al evaluar la función en ese valor el resultado será:_____



Conceptos clave:

28. Teorema del factor Sea f una función polinomial, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$ si, y solo si, $f(c) = 0$.

Es decir,

a) Si $f(c) = 0$, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$
b) Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(c) = 0$
c) Al número *c*, se le conoce también como ***cero o raíz*** del polinomio.

La factorización de un polinomio, consiste en expresarlo como el producto de un conjunto de binomios de la forma $(ax + b)$ con a y b números reales, de tal manera que el resultado de la multiplicación de dichos binomios sea precisamente el polinomio original.

Por el teorema del factor se cumple que:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(otro\ factor)$$

Si efectúas la división sintética para el factor $x = -1$, el residuo será: _____

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

Entonces el cociente nos arroja el factor buscado, es decir, la función, $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, puede ser factorizada como: $f(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$

Podemos efectuar la división sintética sobre este nuevo factor o aplicar la formula general de segundo grado y encontraremos que los otros dos factores son:_____ _____

Así es que $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, puede factorizarse y escribirse como:

---

3) Si $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$ y $x = 1$ son tres de las cinco raíces de la función

$$f(x) = x^5 - \frac{2}{3}x^4 - 5x^3 + \frac{10}{3}x^2 + 4x - \frac{8}{3}$$

Factorizala y obtén las otras dos raíces.

Sabiendo que una de las raíces es $x = \frac{2}{3}$ aplicando división sintética obtenemos que el cociente resultante es:

_____

$$f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)(x^4 - 5x^2 + 4)$$

Aplicando nuevamente la división sintética a $x^4 - 5x^2 + 4$ con $x = 2$ (no olvides completar con ceros los coeficientes de las x que faltan tal como se explicó después del ejemplo 2 anterior.

Continua en tu cuaderno aplicando la división sintética para el cociente que resulta sabiendo que $x = 2$ aplicando división sintética obtenemos que el cociente es:

_____

$$f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

Aplicando por tercera ocasión la división sintética al cociente $x^3 + 2x^2 - x - 2$ con $x = 1$ obtenemos que el cociente es:

_____

$$f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)(x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

Ahora puedes aplicar la formula general para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado para el cociente_____ las dos raíces restantes son:_____, _____.

Finalmente, una vez conocidas las cinco raíces de

$$f(x) = x^5 - \frac{2}{3}x^4 - 5x^3 + \frac{10}{3}x^2 + 4x - \frac{8}{3}$$

se puede factorizar como:_____

Puntos problemáticos

Algunos alumnos pueden considerar que los problemas tienen una dificultad mayor a la que están acostumbrados, quien imparte el curso debe hacer preguntas que guíen a los alumnos para que sean ellos los que encuentren la solución, también se recomienda que en parejas los alumnos con menos dificultades apoyen a sus compañeros.

Para comprobar si un numero es un cero del polinomio, se puede sustituir en la función, es decir, si $f(a) = 0$, entonces a es un factor de la función. La sustitución de estos valores puede ser laboriosa por el número de operaciones involucradas. Si el polinomio es de grado superior a tres con coeficientes racionales, los cálculos se complicarán aun mas.

Si la evaluamos en $x = 2$ la siguiente función polinomial

$$f(x) = 3x^4 + 8x^2 - 7x + 4$$

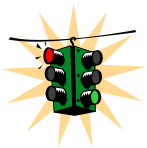
$$f(x) = 3(2)^4 + 8(2)^2 - 7(2) + 4$$

$$= 3(16) + 8(4) - 14 + 4 = 48 + 32 - 10 = 70$$

Ocupando división sintética

2	3	0	8	-7	4
		6	12	40	66
	3	6	20	33	**70**

Observa que los cálculos son mucho más fáciles



Conceptos clave:

29. **Teorema del residuo:** Sea f una función polinomial. Si $f(x)$ es dividida entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$

30. Una ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n factores lineales y por tanto n raíces.

Ejercicio 6

Para cada uno de los ejercicios siguientes demuestra por división sintética que el valor propuesto es factor de la función polinomial dada.

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ Factor: $(x + 2)$
2. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ Factor: $(x + 1)$
3. $f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ Factor: $(x + 1)$
4. $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 4x + 3$ Factor: $(x - \frac{3}{4})$
5. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24$ Factor: $(x + 3)$

Evalúa las funciones anteriores en $x = -\frac{1}{2}, 0\ y\ \frac{1}{2}$, posteriormente utiliza el teorema del residuo para comprobar tus resultados.