CONCEPTOS CLAVE DE LA UNIDAD 1

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos.

1. Una **función** de X en Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x de X con un único elemento y de Y
2. **función polinomial es de la forma**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1,} \ldots a_1 + a_0$ son números reales llamados los coeficientes de la función polinomial y n es un entero no negativo. El dominio lo constituyen todos los números reales.

3. a_n es el coeficiente principal de la función y n es el grado de la función polinomial.

Una forma de graficar una función polinomial es asignar valores a la variable x, y calcular estos para $f(x)$, de esta forma se tienen algunas parejas ordenadas que forman parte de la función.

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos.

4. Una **función** de X en Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x de X con un único elemento y de Y.

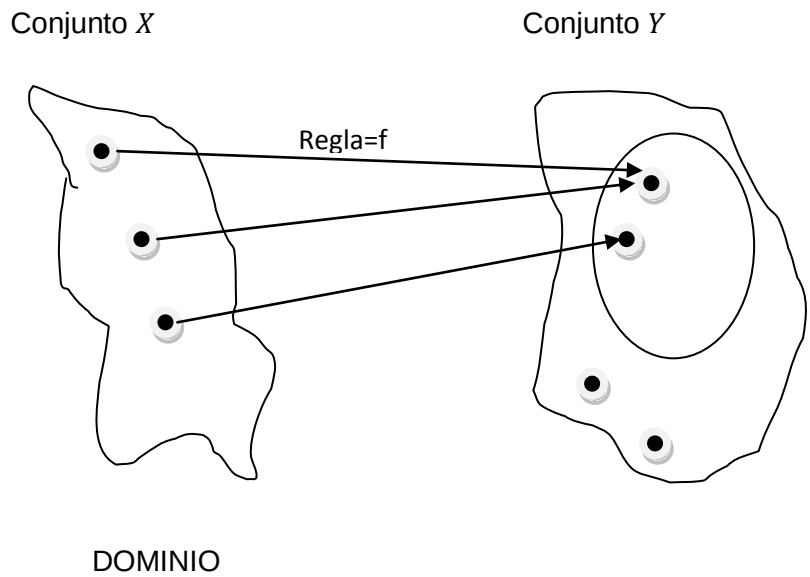
5. **Dominio** de la función es el conjunto X.

6. **Valor de la función en x** o imagen de x. es el elemento y de Y correspondiente a un elemento x de X.

7. **Rango de la función**, es el conjunto de todas las imágenes.

8. Cada uno de los elementos del conjunto X deberá tener una imagen, pudiendo incluso ser la misma.

9. No todos los elementos de Y son imágenes de uno o más elementos de X, por tanto, el rango pudiera ser un subconjunto de Y.



10. Los conjuntos X y Y se pueden definir en términos de variables dependientes e independientes, así, los elementos del conjunto X pueden entenderse como las ***variables independientes*** y los elementos del conjunto Y como las ***variables dependientes***.

11. Al conjunto Y se le denomina como $f(x)$, *se lee "f de x" o "función de x". Algunas otras veces* $f(x) = y$

12. **El contradominio,** es el conjunto de números de entre los cuales se podrán elegir aquellos ***y*** que se asociarán a cada ***x.***

13. Los elementos de ***y*** que se utilizan para asociarse con algún elemento **x** son el **rango de la función**.

14. La función puede representarse como un conjunto de parejas ordenadas (*x,y*), donde $y = f(x)$

15. No puede haber dos o más parejas ordenadas con el mismo primer elemento.

Cuando en el símbolo $f(x)$, x se reemplaza por un numero, como $f(1)$, $f(-3)$, $f(2.8)$, etc. El símbolo representa también un número. Es decir, el valor obtenido al sustituir en la **regla de correspondencia** x por el número dado.

16. **Intervalo.** es una forma de expresar una parte de la recta numérica.
    a. **Intervalo cerrado.** Sean *a* y *b* dos números reales con *a<b*; un intervalo cerrado se denota por [a,b], consta de todos los números reales *x*, en

donde *x*, es mayor o igual que *a* y menor o igual que *b*, es decir, desde a hasta b. $a \leq x \leq b$.

b. **Intervalo abierto.** Sean *a* y *b* dos números reales con *a*<*b*; un intervalo abierto se denota por (a,b), consta de todos los números reales *x*, en donde *x*, es mayor que *a* y menor que *b*, es decir, números entre a y b. $a < x < b$.

c. **Intervalos semiabiertos o semicerrados.** Comprende a todos los números reales *x* para los cuales *x* es mayor o igual que *a* y menor que *b*, es decir, $a \leq x < b$ y (a,b] que comprende a todos los números reales *x* para los cuales *x* es mayor que *a* y menor o igual que *b*, es decir, $a < x \leq b$.

En cada una de las definiciones anteriores, *a* es el **extremo izquierdo** y *b* es el **extremo derecho**.

17. El símbolo ∞, (se lee *infinito*), es una notación que indica que no hay límite en la dirección positiva.

18. El símbolo -∞, (se lee *menos infinito*), es una notación que indica que no hay límite en la dirección negativa.

De esta forma podemos definir otros intervalos:

19. $[a, \infty)$ son todos los números *x* para los cuales $a \leq x < \infty$ tambien se expresa como: , $x \geq a$

20. (a, ∞) son todos los números *x* para los cuales $a < x < \infty$ tambien se expresa como: , $x > a$

21. $(-\infty, a]$ son todos los números *x* para los cuales$-\infty < x \leq a$ tambien se expresa como: , $x \leq a$

22. $(-\infty, a)$ son todos los números *x* para los cuales$-\infty < x < a$ tambien se expresa como: , $x < a$

23.$(-\infty, \infty)$ son todos los números *x* reales para los cuales para los cuales $-\infty < x < \infty$, es decir, todos los números reales.

24. Expresión con dos variables

Si a $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ le restamos $f(x)$ entonces:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - f(x) = 0$$

Si sustituimos $f(x)$ por la variable y obtenemos

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - y = 0$$

Otra forma de expresarlo es:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = y$$

Donde $a_n, a_{n-1,} \ldots a_1 + a_0$ son números reales llamados los coeficientes de la función polinomial y n es un entero no negativo.

a_n es el coeficiente principal de la función y n es el grado

25. En el caso de una función polinomial al valor *x* que hace que

$$f(x) = 0$$

Se le llama cero del polinomio.

Cuando esto sucede, se tiene un punto donde la gráfica **corta al eje x**, es decir, el par ordenado (x,0).

26. Al valor de *x* que cumple con:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Se le llama **solución o raíz** de la ecuación.

Factorización de funciones polinomiales

27. Las funciones polinomiales pueden factorizarse de la misma forma que se hace para un polinomio.

a) $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = x^{n-2}(ax^2 + bx + c)$. factor común.
b) $f(x) = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Diferencia de cuadrados.
c) $f(x) = x^2 + mx + n = (x + a)(x + b), con\ m = a + b\ y\ n = ab$. Binomio con un término común.
d) $f(x) = x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$. Diferencia de cubos.
e) $f(x) = x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$. Suma de cubos.

28. Teorema del factor Sea f una función polinomial, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$ si, y solo si, $f(c) = 0$.

Es decir,

a) Si $f(c) = 0$, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$
b) Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(c) = 0$
c) Al número *c*, se le conoce también como ***cero o raíz*** del polinomio.

La factorización de un polinomio, consiste en expresarlo como el producto de un conjunto de binomios de la forma $(ax + b)$ con a y b números reales, de tal manera que el resultado de la multiplicación de dichos binomios sea precisamente el polinomio original.

29. **Teorema del residuo:** Sea f una función polinomial. Si $f(x)$ es dividida entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$

30. Una ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n factores lineales y por tanto n raíces.

31. Teorema de las raíces racionales: Sea f una función polinomial de grado 1 o superior de la forma. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Condiciones
1. $a_n \neq 0$,
2. cada coeficiente es un entero.

Si la fracción irreductible $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de la función polinomial del tipo antes descrito, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n.

32. Dada una ecuación polinomial de grado n , con coeficientes enteros, podemos expresarla como el producto de n factores lineales. El proceso inverso también es posible.

33. Dado un conjunto de números reales se pueden formar factores lineales con ellos y construir una ecuación polinomial que tenga ese conjunto de números como raíces.

34. Una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, puede escribirse como:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, que a su vez puede expresarse como el producto de dos factores lineales.$(x + m)(x + n) = 0$, donde $-m\ y - n$ son las raíces de la ecuación. Así el dominio de la función cuadrática asociada a esta ecuación son todos los números reales R.

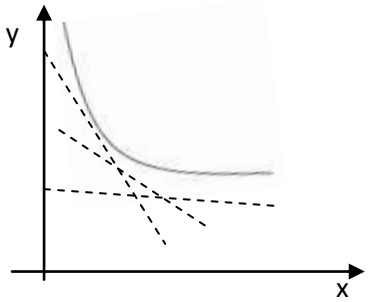
35. Se dice que una función es ***positiva*** en la región en que se gráfica se encuentra *arriba* de las abscisas.

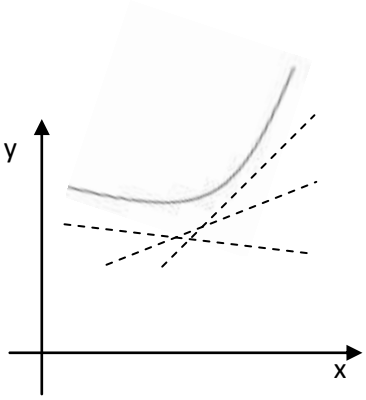
36. Se dice que una función es ***negativa*** en la región en que se gráfica se encuentra *abajo* de las abscisas.

37. Una función polinomial tiene como dominio al conjunto de los números reales, es decir, está definida para todo número real. Este tipo de gráficas consta de un solo trazo sin rupturas, se traza “sin levantar el lápiz”. En general se dice que toda función **polinomial es continua**.

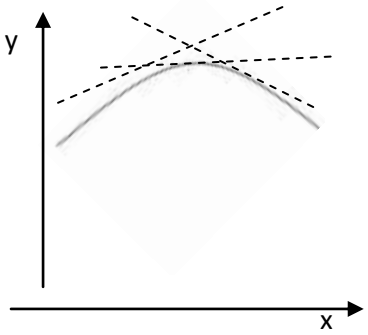
La gráfica de una función puede curvarse hacia arriba o hacia abajo, esto se conoce como ***concavidad***.

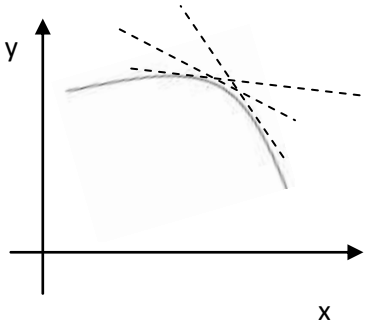
38. Se dice que una curva es ***cóncava hacia arriba*** si sus tangentes están por debajo de ella.





39. Se dice que una curva es ***cóncava hacia abajo*** si sus tangentes están por arriba de ella.





40. El punto más bajo que se encuentra en un intervalo donde la curva es cóncava hacia arriba, se llama ***mínimo local*** porque es el punto más bajo en dicho intervalo.

41. El punto que se encuentra en la cima de un intervalo donde la curva es cóncava hacia abajo, se llama ***máximo local*** porque es el punto más alto del intervalo considerado.

42. Una **función es creciente** en una región si y solo si al aumentar los valores de la variable independiente x, aumentan también los valores de la función. Es decir, $f(x)$ es creciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 de esta región siempre que $x_2 > x_1$ necesariamente $f(x_2) > f(x_1)$ e inversamente.

43. Una **función es decreciente** en una región si y solo si al aumentar los valores de la variable independiente x, disminuyen también los valores de la función. Es decir, $f(x)$ es decreciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 de esta región siempre que $x_2 > x_1$ necesariamente $f(x_2) < f(x_1)$ e inversamente.

44. Cuando una variable crece indefinidamente hacía la región positiva del eje coordenado, **decimos que tiende a infinito.** Se denota por $x \to \infty$

45. Cuando una variable decrece indefinidamente hacía la región negativa del eje coordenado, **decimos que tiende a menos infinito.** Se denota por $x \to -\infty$

En el eje X la región positiva donde x crece indefinidamente es hacia la derecha, la región donde en el eje Y crece la función crece indefinidamente es hacia arriba.

46. En una función el término que tiene el mayor exponente es el que decide la tendencia de la función.

47. En $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

A. Si n es par y a_n es positivo, entonces:
a) Cuando $x \to \infty$, $f \to \infty$
b) Cuando $x \to -\infty$, $f \to \infty$

B. Si n es impar y a_n es positivo, entonces:
a) Cuando $x \to \infty$, $f \to \infty$
b) Cuando $x \to -\infty$, $f \to -\infty$

C. Si n es par y a_n es negativo, entonces:
a) Cuando $x \to \infty$, $f \to -\infty$
b) Cuando $x \to -\infty$, $f \to -\infty$

D. Si n es impar y a_n es negativo, entonces:
a) Cuando $x \to \infty$, $f \to -\infty$
b) Cuando $x \to -\infty$, $f \to \infty$

48. En general, una función polinomial con coeficientes reales tiene como **dominio** a todo el conjunto de los números reales.