CONCAVIDAD DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Sugerencias para quien imparte el curso

Se deben revisar los trazos que los alumnos realicen para el bosquejo de sus graficas, errores de signos en las raíces da lugar a bosquejos inadecuados e incorrectos.

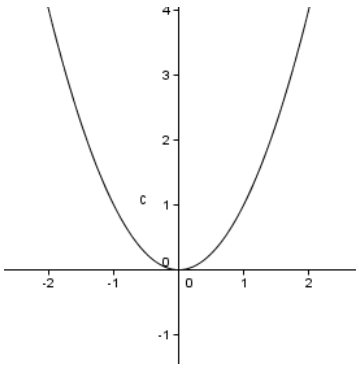
Propósitos

- Determina la concavidad de la gráfica en funciones del tipo $f(x) = ax^n + c$, en base al signo de a y a la paridad de n.
- Determina las concavidades de la gráfica en base al signo y al exponente del término de mayor grado de la función polinomial y a los ceros de la misma.

La gráfica de una función puede curvarse hacia arriba o hacia abajo, esto se conoce como ***concavidad***, en el primer caso se conoce como curva cóncava hacia arriba y tiene un mínimo local, en el segundo caso como curva cóncava hacia abajo y tiene un máximo local.

Ejemplos

1) Completa la siguiente tabla bosquejando las gráficas que faltan e indica si la concavidad es hacia arriba o hacia abajo y si tiene un mínimo o un máximo local.

a) $f(x) = x^2$	b) $f(x) = -x^2$
	
Concavidad_____ Tiene un _____local	Concavidad_____ Tiene un _____local

c) $f(x) = 2x^2 + 1$	d) $f(x) = 2x^4 - 2$	e) $f(x) = -x^6 - 5$
Concavidad_____ Tiene un _____local	Concavidad_____ Tiene un _____local	Concavidad_____ Tiene un _____local

Observa que en una función del tipo $f(x) = ax^n + c$ si el exponente es par y el coeficiente a positivo, la función es cóncava hacia _____

De la misma forma si en una función del tipo $f(x) = ax^n + c$ si el exponente es par y el coeficiente a negativo, la función es cóncava hacia _____

La grafica de una función, dependiendo del intervalo que se trate, puede ser cóncava hacia arriba y en otro intervalo cóncava hacia abajo, por consecuencia tiene **mínimos o máximos locales**, es decir, en un intervalo específico.

2) Completa la siguiente tabla bosquejando las gráficas e indica si la concavidad es hacia arriba o hacia abajo, así los mínimos y máximos locales.

1) $f(x) = 3x^3 - 6x$	a) En el intervalo $(1.5, 0)$ Concavidad_____ Tiene un _____local b) En el intervalo $(0,1.5)$ Concavidad_____ Tiene un _____local

2) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x$	a) En el intervalo $(-1, 0.5)$ Concavidad_____ Tiene un _____local b) En el intervalo $(0.5,1.5)$ Concavidad_____ Tiene un _____local

3) $f(x) = x^5$	a) En el intervalo $(-1, -0.5)$ Concavidad_____ b) En el intervalo $(0.5,1)$ Concavidad_____ Tiene un _____local

Puntos problemáticos

Los alumnos al principio tratarán tabular, es importante aclararles que el bosquejo de la grafica es de gran ayuda. En muchas de las tabulaciones los cálculos no son sencillos y se cometen errores con facilidad, el bosquejo es una guía para comprobar si los resultados de las tabulaciones son correctos.

a) Si entre dos ceros consecutivos (raíces consecutivas), la función polinomial es positiva, la gráfica será cóncava hacia _____

b) Si la función polinomial es negativa entre dos ceros consecutivos, entonces la grafica es cóncava hacia _____

1) Se tiene una función polinomial con cinco ceros o raíces

Las raíces son: $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2\ y\ x_5 = 3.$ Completa los factores que faltan, multiplícalos y obtén el polinomio.

$$(x+2)(x+\quad)x(\qquad)(x-3\,) = 0$$

Multiplicando y simplificando términos tenemos que

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 12x$$

Completa la siguiente tabla indicando si la función es positiva o negativa y el tipo de concavidad según el intervalo. Indica también los mínimos y máximos locales dependiendo de los intervalos.

Intervalo	**Valor x propuesto**	$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 12x$	**Carácter de la función**	**Concavidad Hacia**
$(-2,-1)$	-1.5			Abajo
$(-1,0)$	-0.5	-3.28125		
$(0,2)$	1			
$(2,3)$	2.5			Arriba

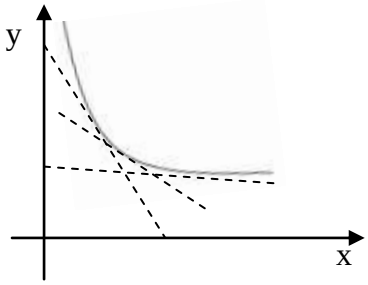
Bosqueja la gráfica utilizando la información de la tabla.

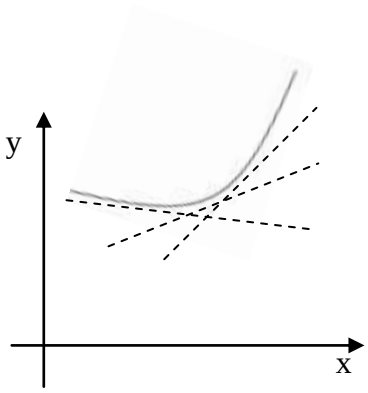
Ayuda: La grafica debe verse parecida a la que se muestra	

Conceptos clave:

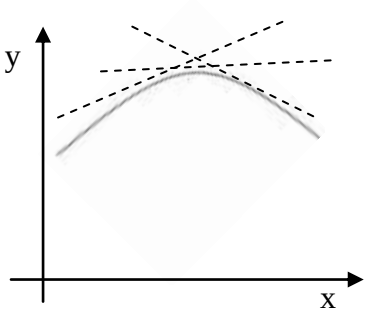
La gráfica de una función puede curvarse hacia arriba o hacia abajo, esto se conoce como ***concavidad***.

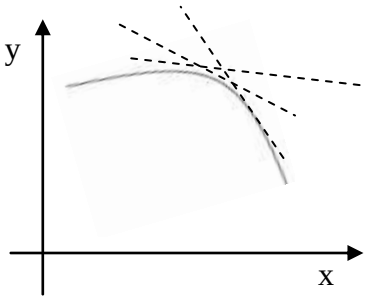
32. Se dice que una curva es ***cóncava hacia arriba*** si sus tangentes están por debajo de ella.





33. Se dice que una curva es ***cóncava hacia abajo*** si sus tangentes están por arriba de ella.





34. El punto más bajo que se encuentra en un intervalo donde la curva es cóncava hacia arriba, se llama ***mínimo local*** porque es el punto más bajo en dicho intervalo.

35. El punto que se encuentra en la cima de un intervalo donde la curva es cóncava hacia abajo, se llama ***máximo local*** porque es el punto más alto del intervalo considerado.

Ejercicio 9

Para los ejercicios 1 a 5 siguientes se proporcionan los ceros o raíces o factores de la función polinomial.

a) Obtener la función polinomial
b) Determinar los intervalos de análisis para indicar la concavidad y elaborar una tabla (Ver ejercicios anteriores en esta sección)
c) Bosquejar la grafica

1.- $x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

2.- $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1, x_3 = 2$

3.- $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1,$

4.- $(x-1)(x+2)(x-3)$

5.- $(2x-1)(3x-1)(x+2)$

En los ejercicios 6 a 8, encuentra por medio de división sintética las raíces o ceros de las funciones, bosqueja la gráfica y señala la concavidad.

6.- $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

7.- $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

8.- $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$