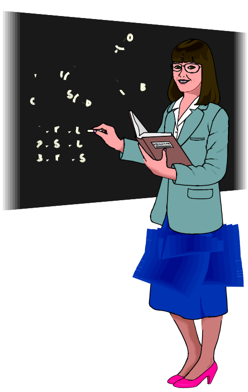
# ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS Y DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

**Sugerencias para quien imparte el curso**

*Es importante que los alumnos tengan presentes los conceptos de congruencia de ángulos vistos en matemáticas II, sistemas de ecuaciones de matemáticas I y unidad I de Matemáticas III.*

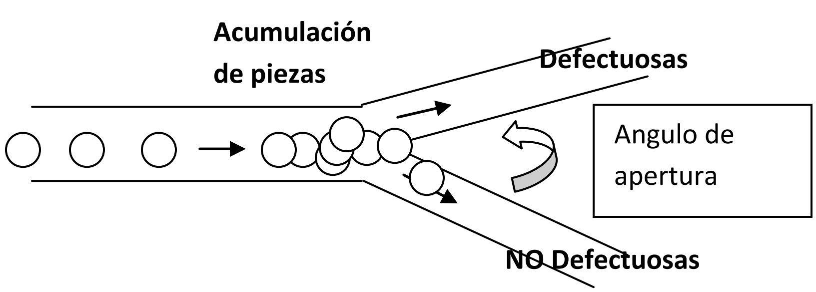
**Propósitos**

- Encontrar el ángulo entre dos rectas
- Encontrar las coordenadas del punto de intersección entre dos rectas
- Encontrar la distancia de un punto a una recta



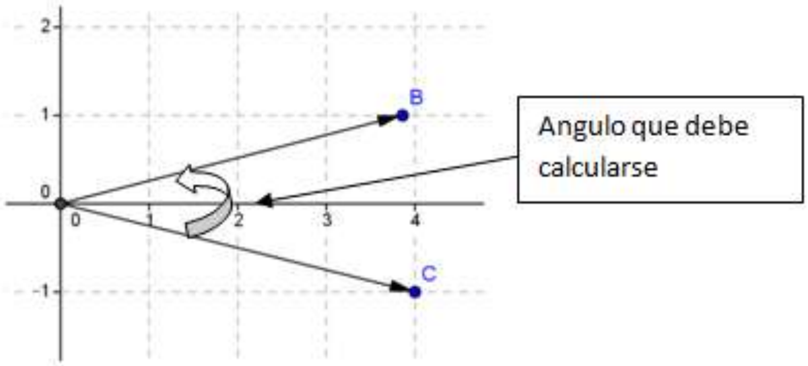
## El problema de la máquina

Una máquina debe dirigir ciertas piezas en una banda trasportadora, sin embargo, no está funcionando correctamente, las piezas se han fracturado o han caído, generando grandes pérdidas económicas y mucho retraso, lo anterior debido a que el ángulo de apertura de las bandas no es el correcto. Incluso algunas piezas defectuosas han saltado a la banda de piezas no defectuosas y viceversa. El fabricante insiste en que el ángulo de apertura es el adecuado pues ya lo midió con un trasportador. La situación se modela en el siguiente dibujo.




Te han llamado para verificar lo anterior, pues la modificación de los canales requerirá de paro en la producción y costos bastante grandes. La empresa debe decidir entre demandar al fabricante o despedir al gerente de producción.

Después de tomar medidas a los canales de trasporte, modelaste la situación de la siguiente forma.




**La bifurcación entre las dos bandas debe tener un ángulo menor a $29^0$, de lo contrarios las bandas tienen un defecto**.

¿Demandarás al fabricante de la máquina o despedirás al gerente de producción?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

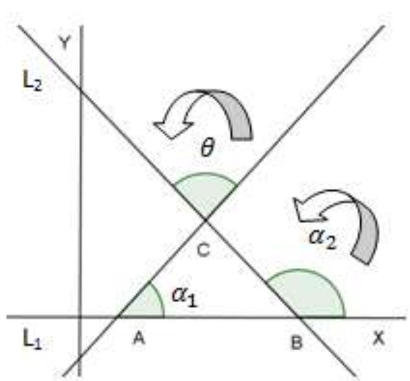
¿Cuáles serían tus argumentos?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

Para encontrar el ángulo entre dos rectas, observa la grafica siguiente




¿Cuál es el punto de intersección entre las rectas $L_1$ y $L_2$?______

¿En qué punto corta la recta $L_1$ al eje X?______

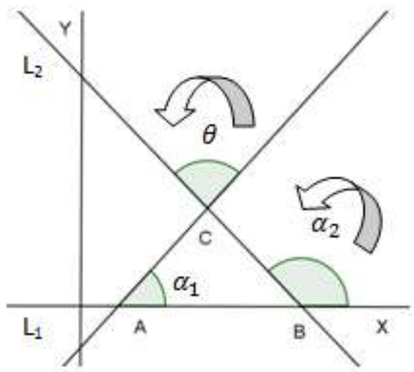
¿En qué punto corta la recta $L_2$ al eje X?______

Para saber la medida del ángulo $\theta$, primero debemos encontrar las ecuaciones de las rectas $L_1$ y $L_2$. ¿Cuáles son estas ecuaciones?

____________________ y ________________________

Según se ha visto en secciones anteriores que la ecuación de una recta en su forma general es $Ax + By + C = 0$, aplicando esto mismo entonces las ecuaciones de las rectas $L_1$ y $L_2$ son $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ respectivamente.

Sus pendientes son $m_1$ y $m_2$ respectivamente y sabemos que $m_1 = tan\alpha_1$ y $m_2 = tan\alpha_2$




En la figura, el ángulo $\theta$ formado por las dos rectas se mide en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj, de esta forma $L_1$ es el lado inicial de dicho ángulo y $L_2$ el lado final.

Por esa razón la **pendiente final** será: $m_2 = tan\alpha_2$ y la **pendiente inicial** será_____________

¿Qué figura se forma con los puntos A, B y C?_______________

De acuerdo con tu curso de Matemáticas II, ¿Cómo son entre si el ángulo ACB del triángulo y el ángulo $\theta$?

Debido a que el ángulo ACB y el ángulo $\theta$ son opuestos por el vértice, son congruentes y por lo tanto, miden lo mismo.

También sabes que el ángulo exterior $\alpha_2$ es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes y entonces:

**Sugerencias para quien imparte el curso**

*El profesor debe hacer participar al grupo para que entre todos encuentren las respuestas que se van planteando y lleguen al resultado para encontrar el ángulo entre dos rectas.*

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \_\_\_$$

De donde obtenemos que $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

Tomando la tangente a ambos lados de la igualdad $\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$

Hay una relación trigonométrica para calcular la tangente de la resta de ángulos

$$\tan(A - B) = \frac{tanA - tanB}{1 + tanA\ tanB}$$

O también

$$\tan(\theta) = \frac{tan\alpha_1 - tan\alpha_2}{1 + tan\alpha_2\ tan\alpha_1}$$

Donde $tan\alpha_2\ tan\alpha_1 \neq -1$ y finalmente

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Con $m_2 m_1$ siendo $m_2$ la pendiente final y $m_1$ la pendiente inicial.

Si debemos encontrar el ángulo $\theta$, entonces debemos calcular

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

O bien

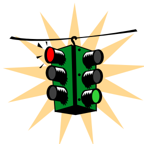
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{tan\alpha_2 - tan\alpha_1}{1 + tan\alpha_2\ tan\alpha_1}\right)$$

Regresa al problema de la maquina al inicio de la sesión y calcula $m_1$ y $m_2$, recuerda que en sesiones anteriores calculamos la pendiente de una recta dados dos puntos. Toma los puntos $A(0,0), B(4,1) y\ C(4,-1)$.

$m_1 =$ ____________ y $m_2 =$ ____________

Sustituyendo estos valores en $\theta = tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1+m_2 m_1}\right)$, tenemos que $\theta = tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1+m_2 m_1}\right) = tan^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) =$

¿Qué concluyes?_______________________________________________



**Conceptos clave:**

1. El ángulo que forman dos rectas no perpendiculares con $m_1 = \tan(\alpha_1)$ $y\ m_2 = \tan(\alpha_2)$

Está dado por:

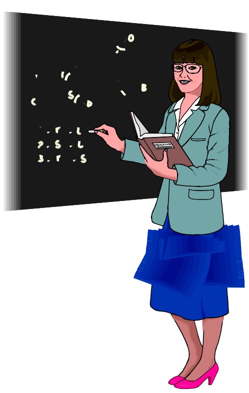
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

con $m_2 m_1 \neq -1$

ó

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{tan\alpha_2 - tan\alpha_1}{1 + tan\alpha_2\ tan\alpha_1}\right)$$

con $\tan(\alpha_2)\tan(\alpha_1) \neq -1$



**El problema del hospital**

En una pequeña ranchería se ha instalado un modesto hospital, algunas veces se registran emergencias y se debe trasladar a los pacientes lo más rápido posible a través de un camino de terracería, hay una supercarretera cercana al poblado la cual se puede modelar como una línea recta de la forma $-2x + 7y + 1 = 0$, el poblado se encuentra ubicado en la posición A(2,-3). Se le ha pedido ayuda al presidente municipal para que construya un camino pavimentado que conecte con la supercarretera. Tú eres el responsable de calcular la distancia en línea recta que hay desde la ranchería hasta la supercarretera.

¿Cuál es la mínima distancia en km que existe desde la ranchería hasta la supercarretera?

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

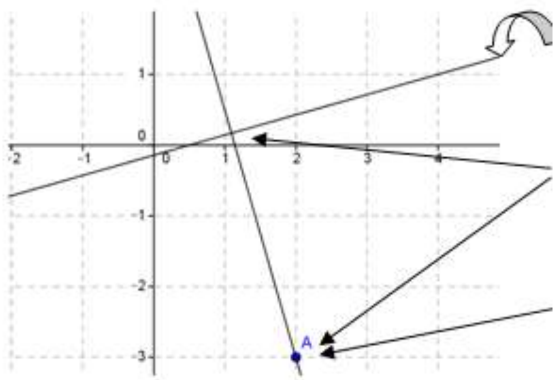
La distancia de un punto a una recta se define como la longitud del segmento perpendicular a la recta que la une con el punto.

Para resolver el problema anterior, debes hacer uso de algunos conocimientos que ya tienes. En sesiones anteriores se estudió que si una recta tiene pendiente $m$, la recta perpendicular a esta tiene pendiente reciproca con signo distinto, esto es: __________

Por lo anterior, la pendiente de la recta perpendicular a la recta $-2x+7y+1=0$, del problema es:_________________.

Recuerda que ya sabes cómo encontrar la ecuación de una recta dados un punto y su pendiente. Por lo tanto la recta perpendicular a $-2x+7y+1=0$ que pasa por el punto A(2,-3) es:__________________________

La situación hasta ahora puede ser bosquejada como se muestra en la siguiente figura




Super carretera

Distancia a calcular es la distancia del punto a al punto de intersección con la suoercarretera

Ranchería (punto A)

Puesto que no sabemos el punto de intersección entre la recta que recién calculaste y la recta $-2x+7y+1=0$, ¿qué debemos hacer?________________
__________________________________________.

**Puntos problemáticos**

Algunos alumnos les resulta fácil hacer cálculos y obtener las respuestas, se debe invitar a los alumnos para que apliquen las expresiones y obtengan los resultados a partir del uso de estas, también proponerles problemas que no tengan soluciones enteras.

Exactamente, debemos resolver el sistema de ecuaciones por el método que gustes, recuerda que en matemáticas I y unidad I de matemáticas III, pudiste resolver por métodos como el de igualación, sustitución o suma y resta entre otros.

Entonces el punto de intersección entre las rectas es:_________ o también $B\left(\frac{58}{53},\quad\right)$.

Finalmente la distancia entre dos puntos la encontramos sustituyendo en:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Donde los dos puntos son $P_A(2, -3)$ y $P_B(\frac{58}{53}, \frac{9}{53})$

$$d = \sqrt{(2 - \quad)^2 + (\quad - \quad)^2}$$

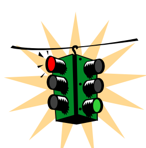
**La respuesta al problema del hospital es $d =$____________**

Sistematizando el proceso anterior, la distancia de un punto $P(x_p, y_p)$ a la recta cuya ecuación es: $Ax + By + C = 0$, esta dada por:

$$d = \frac{\mathrm{Ax_p + By_p + C}}{\pm\sqrt{\mathrm{A^2 + B^2}}}$$

Se elegirá el signo del radical que hace que el cociente sea positivo.

Resuelve el problema del hospital pero ahora con esta fórmula y llegarás al mismo resultado.



**Conceptos clave:**

2. La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1) y\ P_2(x_2, y_2)$ denotada por $d(P_1, P_2)$, está dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. La distancia de un punto $P(x_p, y_p)$ a la recta cuya ecuación es:
$Ax + By + C = 0$, esta dada por:

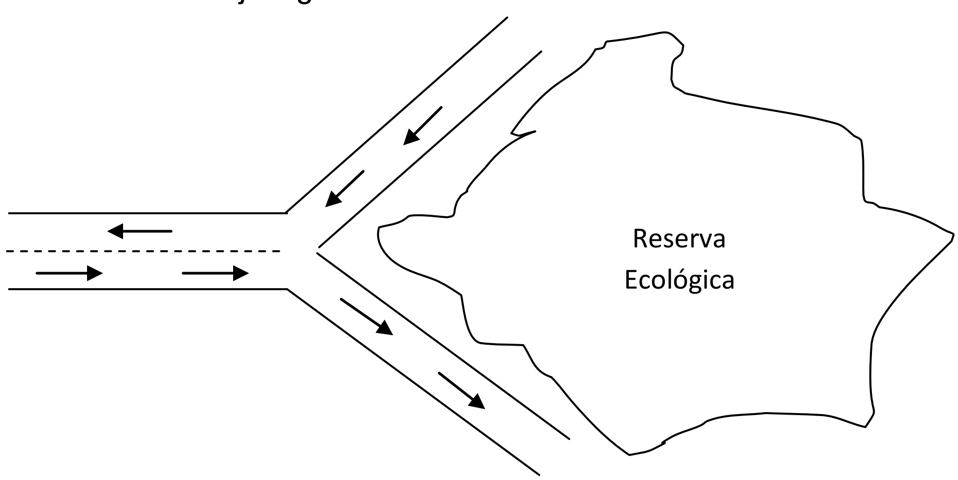
$$d = \frac{\mathrm{Ax_p + By_p + C}}{\pm\sqrt{\mathrm{A^2 + B^2}}}$$

Se elegirá el signo del radical que hace que el cociente sea positivo.

**Ejercicio 5**

**Resuelve los siguientes ejercicios**

1. Encuentra el ángulo entre la recta $3x - 6y + 1 = 0$ y la recta que pasa por los puntos A(3,4) y B(1.6, 1.7).
2. Calcula la medida de los ángulos interiores del triángulo formado por los vértices $P(-3,3), Q\ (-2,-1) y\ R(1.5,1.7)$
3. Calcula la distancia entre la recta $y = 5x - 3$ y el punto P(-1,-1)
4. Calcula la distancia entre las rectas $5x - 4y - 8 = 0$ y $5x - 4y - 20 = 0$
5. En cierto bosque tropical, se planea construir un centro turístico y para ello se debe construir una carretera, sin embargo, existe una reserva protegida. Se ha instruido a la empresa constructora para que deje intacta esa zona. Los ingenieros realizan los cálculos y han decidido que lo mejor es bifurcar la carretera tal como se muestra en el dibujo siguiente:




Si la bifurcación entre las dos carreteras tiene un ángulo de al menos $43^0$, la reserva ecológica no sufrirá grandes daños. Se te ha contratado para que verifiques lo anterior, pues se sospecha de que la empresa constructora no está respetando la restricción y lo único que quiere es ahorrar gastos.

La empresa constructora te comentó que utilizando un plano cartesiano y simulando la bifurcación, la primera carretera pasaría por los puntos A(0,3) y B(1.5,4). La segunda carretera pasaría por los puntos C(-4,0) y D(3,-1).

¿La empresa constructora está respetando el acuerdo?
¿Cuáles serían tus argumentos?