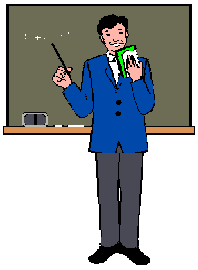
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 3×3 Y SU RESOLUCIÓN ALGEBRAICA CON EL MÉTODO DE GAUSS



Sugerencias para quien imparte el curso:

El principal papel del profesor o profesora que imparte el curso consiste en controlar el proceso de solución de los problemas planteados y reorientar el trabajo en caso de desvíos, para lo cual le insistimos que en su planeación didáctica deberá pensar en establecer un diálogo con los estudiantes basado en una serie de preguntas que guíen hacia la solución del problema, sobre todo en aquellos momentos en que no puedan utilizar directamente los conocimientos previos, por ser insuficientes y demanden la necesidad de construir otros nuevos, sin embargo en algunas etapas de la búsqueda del conocimiento se deberá permitir que los estudiantes lo hagan de manera independiente.

Propósitos:

1. Reforzar el concepto de sistema de ecuaciones lineal.
2. Introducir el concepto de ecuaciones lineal de 3×3
3. Retomar el método de Gauss para aplicarlo a los sistemas de ecuaciones lineales de 3×3.
4. Reafirmar el concepto de función cuadrática y subconceptos asociados.

EL PROBLEMA DEL COSTO DE FABRICACIÓN

En la tabla siguiente aparece en pesos el costo de fabricación para producir cierto adorno navideño, el cual depende del número de piezas producidas:

Piezas producidas	3	6	9
Costo de fabricación	180	282	402

Sabiendo que la relación que hay del número de piezas producidas al costo de su fabricación es una función cuadrática, responder lo siguiente:

a) ¿Cuánto será el costo de fabricación por producir solamente un adorno?
b) ¿Cuál será el costo de fabricación para producir 21 adornos?
c) Si en cierto día la producción fue de 52 adornos, ¿en cuánto se debe vender cada uno para obtener una ganancia de $\$3,700.00$?

d) Si en otro día el costo de fabricación fue de $\$810.00$, ¿de cuántos adornos fue la producción?

Como en las secciones anteriores primero hay que dar el tiempo que se considere prudente para que los alumnos intenten por ellos mismos resolver el problema utilizando los conocimientos previos, en tanto que la labor de quien imparte el curso será tomar nota de las sugerencias y dificultades que se vayan presentando, cuando alguien pregunte cuál es la función cuadrática mencionada en el problema, es el mejor momento para emprender el camino hacia su solución.

A pesar que en el curso anterior se ha trabajado con el concepto de función cuadrática, es posible que haya alumnos que aún tengan dificultades con su manejo, así que es el momento de retomarlo, creando una discusión general para concluir que si la relación que existe de una variable independiente x a una variable dependiente y es una función cuadrática, entonces su regla de correspondencia está dada por una expresión matemática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes, y $a \neq 0$.

Preguntar, sobre el problema:

1. ¿Quién es la variable independiente?
2. ¿Quién es la variable dependiente?
3. Si x representa al número de piezas producidas, entonces ¿cuál será la expresión matemática que la relaciona con el costo de fabricación y?

Cuando ya se haya establecido la necesidad de construir una relación particular de la variable independiente x a la variable dependiente y, de la forma $y = ax^2 + bx + c$, señalar que se logrará en el momento que se encuentren los valores apropiados para las constantes a, b y c, es decir cuando se descubran los valores de esas tres incógnitas, vale la pena destacar que en éste caso, las variables x y y no son representantes de incógnitas.

Preguntar:

4. ¿Cómo se logrará descubrir esos valores para las incógnitas?

Cuando surja la propuesta de construir un sistema de ecuaciones, preguntar:

5. ¿Cómo se podrán obtener las ecuaciones que formarán el sistema?

Si no hay respuesta, orientar su construcción a través de las tres preguntas que siguen u otras que sean equivalentes:

6. ¿Qué ecuación expresará que 180 es la imagen de 3?
7. ¿Qué ecuación representará el hecho de que 282 es la imagen de 6?

8. ¿Con cuál ecuación se simbolizará que 402 es la imagen de 9?

Solicitar y comparar las respuestas obtenidas por los alumnos para confirmar que todos tengan el mismo resultado.

De las respuestas a las preguntas 6, 7 y 8, se tendrá el siguiente conjunto de ecuaciones:

1. $9a+3b+c=180$
2. $36a+6b+c=282$
3. $81a+9b+c=402$

Si se consideran estas tres ecuaciones como un todo, se tendrá un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y como todas las ecuaciones son de primer grado, se ha construido un sistema de ecuaciones lineal de 3×3.

$$\begin{aligned} 9a+3b+c&=180 \text{ ...... ecuación } 1\\ 36a+6b+c&=282 \text{ ...... ecuación } 2\\ 81a+9b+c&=402 \text{ ...... ecuación } 3 \end{aligned}$$

Lo siguiente será encontrar, si es que tiene, su solución, la indicación será hacerlo de manera algebraica utilizando el método de Gauss, para lo cual hay que recordar que el propósito de tal método es conseguir un sistema equivalente que sea triangular, a partir del sistema original, aplicando los criterios de equivalencia entre sistemas de ecuaciones, de ser necesario volverlos a explicar.

Ahora la idea es que dado el sistema original, se tratará de obtener un sistema equivalente, de tal forma que la primera ecuación conserve a las tres incógnitas, la segunda a dos de ellas y la tercera solamente una.

Una vez que se ha logrado un sistema triangular, la solución del sistema original estará dado por las siguientes acciones con el sistema triangular:

a) Despejar la incógnita que aparece en la tercera ecuación.
b) Sustituir en la segunda ecuación el valor de la incógnita obtenido anteriormente y despejar la incógnita que aparece.
c) Sustituir en la primera ecuación el valor de cada una de las incógnitas obtenidos anteriormente y despejar la incógnita que falta.

Dejar que los alumnos traten de resolverlo aunque no lleguen a la solución correcta, posteriormente quien imparte el curso podrá sugerir pasos para solucionarlo que podrían ser, por ejemplo lo que siguen más adelante, e inclusive, si así lo desea, podría además permitir que usen la calculadora para realizar operaciones y no perder la naturaleza del método.

1. Aplicando el tercer criterio, sustituir la ecuación 2 por el resultado de la operación $(4)(\text{ecuación } 1)-(1)(\text{ecuación } 2)$.

2. Por ese mismo criterio de equivalencia, sustituir la ecuación 3 por el resultado de la operación $(9)($ecuación $1)-(1)($ecuación $3)$.
3. Aplicando otra vez el criterio mencionado, sustituir la ecuación 3 por el resultado de la operación $(3)($ecuación $2)-(1)($ecuación $3)$.

El resultado final será el sistema triangular:

$$\begin{aligned} 9a+3b+c &= 180 \text{ ...... ecuación } 3 \\ 6b+3c &= 438 \text{ ...... ecuación } 2 \\ c &= 96 \text{ ...... ecuación } 3 \end{aligned}$$

De donde la solución es $a=1$, $b=25$ y $c=96$ y por lo tanto, la función cuadrática buscada es $y=x^2+25x+96$.

A pesar de que en los ejemplos se muestra que la estrategia a seguir es ir eliminado las incógnitas de izquierda a derecha, es posible que algunos alumnos decidan en éste caso eliminar primero la incógnita c de las ecuaciones 2 y 3, acción permitida por el quinto criterio de equivalencia entre ecuaciones, y haber realizado los pasos siguientes:

1. Por el quinto criterio, cambiar la incógnita c al inicio de las ecuaciones.
2. Por el sexto criterio, intercambiar las ecuaciones 1 y 3.
3. Por el segundo criterio, sustituir a la ecuación 2, por el resultado de la operación ecuación $1-$ecuación 2.
4. Por el mismo criterio, sustituir a la ecuación 3, por el resultado de la operación ecuación $1-$ecuación 3.
5. Por el primer criterio, dividir a la ecuación 3 entre dos.
6. Por el quinto criterio, cambiar la incógnita b al segundo lugar.
7. Por el segundo criterio, reemplazar a la ecuación 3 por el resultado de la operación ecuación $2-$ecuación 3, con lo que se tendrá el sistema triangular:

$$\begin{aligned} c+9b+81a &= 180 \text{ ...... ecuación } 1 \\ 3b+45a &= 120 \text{ ...... ecuación } 2 \\ 9a &= 9 \text{ ...... ecuación } 3 \end{aligned}$$

Si se da este caso o cualquier otro diferente, solicitar a los alumnos que obtengan la solución del sistema original con el sistema triangular obtenido para verificar que se llega a la misma solución.

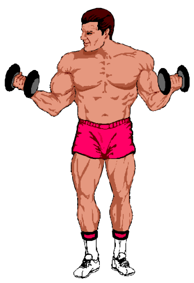
Ya obtenida la función cuadrática $y=x^2+25x+96$, los alumnos deberán de comprobar que la función es la correcta verificando que se cumple con la información dada en la tabla, esto es que 180 es la imagen de 3, que 282 es la imagen de 6 y que 402 es la imagen de 9.

Luego dar tiempo para que los alumnos den respuesta a los incisos del problema y posteriormente discutirlas de manera grupal, descartando las incorrectas, identificando las dificultades y obstáculos observados, y señalando los *principales errores cometidos, con el propósito de retroalimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje.*

Para practicar la parte algorítmica se pueden sugerir ejercicios como los que siguen, subrayando que discutir un sistema de ecuaciones consiste en averiguar si es compatible o incompatible y en caso de ser compatible analizar si es dependiente o independiente, mientras que resolverlo quiere decir obtener su solución, si es que tiene.

Tal vez sea necesario remitirse o volver a enunciar los resultados generales que fueron establecidos en la tercera sección sobre la incompatibilidad y la dependencia de los sistemas de ecuaciones.

a) Si el sistema triangular contiene una expresión del tipo $0 = c$, donde c es una constante distinta de cero, entonces el sistema de ecuaciones es **incompatible**.
b) Si el sistema triangular contiene una expresión del tipo $0 = 0$, entonces el sistema de ecuaciones es **dependiente**.



Ejercicio 1

Aplicando el método de Gauss, discutir cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes y resolverlo en caso de ser independiente.

a) Sistema 1.

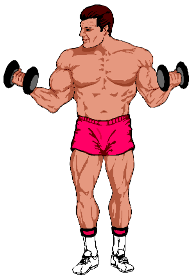
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= -7 \quad \text{...... ecuación } 1 \\ -3x - 2y + z &= -4 \quad \text{...... ecuación } 2 \\ x + 3y - 2z &= 11 \quad \text{...... ecuación } 3 \end{aligned}$$

b) Sistema 2.

$$\begin{aligned} x - 9y + 5z &= 33 \quad \text{...... ecuación } 1 \\ x + 3y - z &= -9 \quad \text{...... ecuación } 2 \\ x - y + z &= 9 \quad \text{...... ecuación } 3 \end{aligned}$$

c) Sistema 3.

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 0 \quad \text{...... ecuación } 1 \\ x + y + z &= 4 \quad \text{...... ecuación } 2 \\ x - y &= 0 \quad \text{...... ecuación } 3 \end{aligned}$$



Ejercicio 2.

Todos los sistemas de ecuaciones lineales siguientes son independientes, resolverlos con el método de Gauss.

a) Sistema 1.

$2x + y - z = 2$ ...... ecuación 1

$x + 2y + 4z = 1$ ...... ecuación 2

$5x + y + 7z = 4$ ...... ecuación 3

b) Sistema 2.

$x + z = 13 - y$ ...... ecuación 1

$3z - y = 17 - x$ ...... ecuación 2

$2x + 2y - 8 = z$ ...... ecuación 3

c) Sistema 3.

$2x - 4 + z = -3y$ ...... ecuación 1

$y - 2z = 14 - x$ ...... ecuación 2

$-x - z = -2(y + 25)$ ...... ecuación 3

Una vez superada la parte algorítmica proponer problemas que requieran de un sistema de ecuaciones lineal de 3×3 para resolverlo, quien imparte el curso puede seleccionarlos de la gran variedad de libros de texto de álgebra que existen, a continuación una pequeña muestra de algunos.

1. EL PROBLEMA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Encuentra el área de un triángulo rectángulo que satisfaga las tres condiciones siguientes:

1. El doble de su perímetro debe ser igual a 48 centímetros.
2. El doble de la longitud de la hipotenusa debe ser igual al doble de la longitud del cateto menor más la longitud del cateto mayor.
3. Seis veces la longitud del cateto menor más ocho veces la longitud del cateto mayor debe ser igual a diez veces la longitud de la hipotenusa.

2. EL PROBLEMA DE SUCESOS OLÍMPICOS

¿Sabías que …?

a) En los juegos olímpicos de Estocolmo, se exigió por primera vez a los deportistas un certificado médico para competir y por primera vez el maratón terminó con un muerto. Un corredor portugués de 21 años cayó fulminado después de los 30 kilómetros y al día siguiente falleció.

b) En los juegos olímpicos de Roma, el etíope Abebe Bikila asombró al mundo, pues corrió descalzo el maratón e impuso el récord que perdió tres años más tarde, pero lo recuperó en los juegos olímpicos de Japón.
c) La primera vez que se recorrió la distancia oficial del maratón de 42.195 kilómetros, sucedió que el italiano Dorand Pietro entró al estadio en primer lugar, pero se desplomó antes de llegar a la meta, fue ayudado en los últimos 100 metros y fue descalificado.

Para conocer en qué año ocurrió cada uno de los acontecimientos narrados, se sabe que en todos ellos el primer dígito es 1 y para encontrar los tres dígitos que faltan hay que resolver en cada caso, el sistema de ecuaciones definido por las condiciones indicadas:

Para el año en que ocurrió la tragedia relatada en el inciso a:

1. El doble del dígito de las unidades menos el de las decenas, **es igual** al dígito de las centenas menos seis.
2. La suma del dígito de las unidades con el de las centenas, menos el dígito de las decenas, **es igual** a diez.
3. El triple del dígito de las unidades más el doble del dígito de las centenas, **es igual** a la suma de veintitrés con el dígito de las decenas.

Para el año en que sucedió la hazaña contada en el inciso b:

1. Al quitarle al doble del dígito de las unidades el dígito de las centenas, **se obtiene** menos la suma del dígito de las decenas con tres.
2. Si al dígito de las centenas le quitas el doble del dígito de las decenas y luego sumas nueve, **obtienes** la suma del dígito de las unidades con seis.
3. Si le restas tres al dígito de las centenas, el resultado **será igual** a la suma del dígito de las unidades con el de las decenas.

Para el año en que aconteció la anécdota expuesta en el inciso c:

1. Si al triple del dígito de las unidades le sumas ocho veces el dígito de las decenas, **se obtiene** al dígito de las centenas más quince.
2. Si al dígito de las decenas le restas el doble del de las unidades, el resultado debe **ser igual** a once menos el triple del dígito de las centenas.
3. La suma de los dígitos de las centenas y de las decenas **es igual** a la suma del dígito de las unidades más uno.

3. EL PROBLEMA DE LOS TAZOS

Alberto, Guillermo y César estuvieron jugando apostando sus “tazos”, al final del juego Alberto terminó con el doble de “tazos” que Guillermo, César terminó con 15 “tazos” más que Guillermo, mientras que Guillermo terminó con la cuarta parte del total de “tazos” de Alberto y César. ¿Cuántos “tazos” tienen entre los tres?

4. EL PROBLEMA DE LOS NÚMEROS

Encuentra tres números a, b y c tales que $a<b<c$ y que cumplan con las siguientes condiciones:

1. Al restarle una unidad al número menor, se debe obtener la tercera parte de la suma de los otros dos números.
2. La diferencia positiva entre los números menor y mediano debe ser igual al número mayor menos trece.
3. La suma de los tres números debe ser igual a treinta y siete.

5. EL PROBLEMA DEL MARATÓN

Alberto, César y Carlos corrieron en un maratón de 25 kilómetros, César recorrió el doble de kilómetros que Carlos, mientras que Alberto recorrió las tres cuartas partes de lo que recorrió César. Si la suma de las distancias recorridas por los tres fue de 45 kilómetros, ¿quién llegó a la meta y en qué kilómetro abandonó el maratón cada uno de los que no lo terminaron?

Para cerrar la sesión se puede señalar que el método de Gauss tiene la virtud de poderse generalizar a sistemas cuadrados de ecuaciones lineales de dimensión mayor, de ser posible ejemplificar con alguno de 4×4. *También queda a criterio de quien imparte el curso trabajar el método de Gauss considerando solamente los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes, en un arreglo matricial, pues es claro que los resultados solamente dependen de tales valores, sin necesidad de introducir el concepto de matriz, solo se utiliza el arreglo como un representante más sencillo de los sistemas equivalentes que se van obteniendo desde el original hasta el triangular. Por ejemplo, en el problema de inicio el sistema original y el sistema triangular quedarían representados como sigue:*

El original $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 180 \\ 36 & 6 & 1 & 282 \\ 81 & 9 & 1 & 402 \end{pmatrix}$ se transforma finalmente en $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 180 \\ & 6 & 3 & 438 \\ & & 1 & 96 \end{pmatrix}$