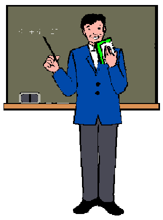
CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE [illegible]



Sugerencias para quien imparte el curso:

Es común que los alumnos no comprendan para qué el estudio de los sistemas de ecuaciones, lo cual suele suceder cuando se les enfrenta a dicho concepto con un enfoque totalmente abstracto sin relación alguna con sus posibles aplicaciones, por esta razón en la propuesta, se plantea romper con un enfoque puramente formal, que esconda las ideas que generan el concepto estudiado. El contenido se irá dando a través de la necesidad de resolver problemas, procurando exponer distintas representaciones de los conceptos involucrados, de tal suerte que los conceptos clave se irán estableciendo durante la búsqueda de la solución a los problemas que de inicio se plantean en cada sección.

Propósitos:

1. Fortalecer la relación que hay entre los registros algebraico y gráfico de un sistema de ecuaciones lineal de 2×2.
2. Establecer la clasificación de los sistemas de ecuaciones.
3. Mostrar el papel que juega el concepto de parámetro dentro de un sistema de ecuaciones.

Programar de inicio la siguiente duda:

Hasta ahora, todos los sistemas de ecuaciones lineales que se han resuelto han tenido solución, pero ¿esto será cierto siempre?, en otras palabras, ¿todo sistema de ecuaciones lineal de 2×2 tiene solución?

Para dar respuesta a esas interrogantes se ha diseñado el problema de las cajas de refresco, donde se propone recurrir al método gráfico para resolver algunos sistemas de ecuaciones lineales de 2×2, y contrastarlos con el método de Gauss.

EL PROBLEMA DE LAS CAJAS DE REFRESCO

Un camión repartidor transporta un pedido de cajas completas de cierto tipo de refresco envasado en botellas de PET y en latas, para entregarlas a un centro comercial.

Se sabe que cada caja con refresco embotellado pesa 20 kilos, pero se desconoce el peso de cada caja con refresco enlatado.

Si todas las cajas con refresco embotellado pesan 100 kilos más que el peso de todas las cajas con refresco enlatado y hay 20 cajas con refresco embotellado menos que las cajas con refresco enlatado, plantea un sistema de ecuaciones lineal con dos ecuaciones para encontrar cuántas cajas de cada tipo fueron solicitadas por el centro comercial.

Dar tiempo para que los alumnos entiendan el problema y propongan el modelo matemático, posteriormente preguntar:

1. ¿Crees que falta algún dato que se deba considerar imprescindible para poder resolver el modelo matemático solicitado o no es necesaria más información que la dada?

Luego de escuchar respuestas, dirigir la discusión para enseñar cómo manejar la falta de ese importante dato, a saber el peso de cada caja con refresco enlatado, para lo cual se puede sugerir que se represente, por ejemplo con la letra minúscula p que no será considerada como una incógnita más.

Preguntar:

2. ¿Cuáles son las incógnitas del problema?

Si la variable x representa al número de cajas con refresco embotellado y la variable y representa al número de cajas con refresco enlatado:

3. ¿Cómo se expresará el peso de todas las cajas con refresco embotellado?
4. ¿Cómo se representaría el peso de todas las cajas con refresco enlatado?
5. ¿Cuál ecuación formulará que todas las cajas con refresco embotellado pesan 100 kilos más que el peso de todas las cajas con refresco enlatado?
6. ¿Cuál ecuación indicará que hay 20 cajas con refresco embotellado menos que las cajas con refresco enlatado?

De las respuestas se obtendrá el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} 20x &= py + 100 \quad \text{...... ecuación } 1 \\ x &= y - 20 \quad \text{...... ecuación } 2 \end{aligned}$$

Resaltar que la variable p que aparece en la primera ecuación juega el papel de un **parámetro**, ya que como se verá, se podrá fijar su valor, dando lugar a distintos casos del problema y por ende tener distintos sistemas de ecuaciones lineales de 2×2, como los casos que siguen:

Caso 1. ¿Será posible que el peso de cada caja con refresco enlatado sea la mitad del peso de cada caja con refresco embotellado? En caso afirmativo, ¿cuál será la solución del problema?

Preguntar, en este primer caso:

7. ¿Cuál es el valor que se le deberá asignar al parámetro p?

8. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones asociado a él?

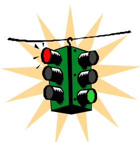
9. Ya se tiene una representación algebraica de la situación, pero ¿cómo será su representación gráfica?

Esta última pregunta sugiere a quien imparte el curso, utilizar en el proceso de enseñanza y aprendizaje las representaciones gráficas como herramienta para interpretar y presentar los conceptos o para resolver problemas, pues como se sabe es un medio ideal para que el alumno logre una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, sin embargo será ineludible distinguir, para no confundir, los objetos matemáticos de sus representaciones, bajo esta tónica se arriba a conceptos clave que a su vez se convierten en recursos para ser utilizados en otras situaciones problemáticas.

Preguntar:

10. ¿Qué figura geométrica representa a una ecuación de primer grado con dos incógnitas?

La respuesta a esta pregunta servirá para instaurar el siguiente concepto clave.



Concepto clave

14. Gráfica de la ecuación $ax + by = c$

Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas es gráficamente una línea recta.

Aunque hay distintos modos para graficar una recta, solicitar que se aplique el procedimiento que consiste en proponer tres valores distintos para la variable x, que será considerada como variable independiente, y posteriormente encontrar utilizando la ecuación los valores correspondientes para la variable y, considerada como variable dependiente, cada par de valores correspondientes (x, y) será un punto en el plano cartesiano.

Señalar que teóricamente bastarían dos puntos para trazar la recta, pues por dos puntos distintos pasa una y solamente una recta, sin embargo el tener tres puntos distintos permite asegurar que la recta a graficar es la correcta, ya que si los tres puntos son colineales la recta que pasa por esos puntos es la buscada, pero si los tres puntos no son colineales, no será posible trazar la recta que los incluya y se deberán revisar los cálculos realizados.

Pedir a los alumnos que escriban el sistema cuando el valor para el parámetro p sea igual a 10 y luego transformarlo a uno en el que la variable y esté despejada de ambas ecuaciones.

No está de más recordar que despejar una variable en una ecuación, es el proceso de modificar la ecuación hasta que la variable a despejar quede aislada en alguno de los miembros de la ecuación, generalmente en el primero.

Así el sistema:

$$20x = 10y + 100 \text{ ...... ecuación } 1$$
$$x = y - 20 \text{ ...... ecuación } 2$$

Se deberá transformar en el sistema, donde la variable y aparezca de manera explícita:

$$y = 2x - 10 \text{ ...... ecuación } 1$$
$$y = x + 20 \text{ ...... ecuación } 2$$

Para graficar la ecuación 1, proponer tal como se sugiere, tres valores distintos para la variable x, por ejemplo 10, 35 y 50 y pedir llenar una tabla como la siguiente:

x	$y = 2x - 10$	Punto
10	$2(10) - 10 = 10$	$A(10,10)$
20	$2(20) - 10 = 30$	$B(20,30)$
25	$2(25) - 10 = 40$	$C(25,40)$

Localizar los puntos A, B y C en el plano cartesiano y como son colineales, se traza la recta que los contiene, como se muestra en la figura 1.

Es importante verificar que en efecto los estudiantes hayan trazado la recta que pasa por los puntos A, B y C, y no solamente el segmento de recta $\overline{AC}$ como podría suceder, lo cual es un indicio de que para algunos alumnos no está claro el concepto de recta y su diferencia con el de segmento de recta.

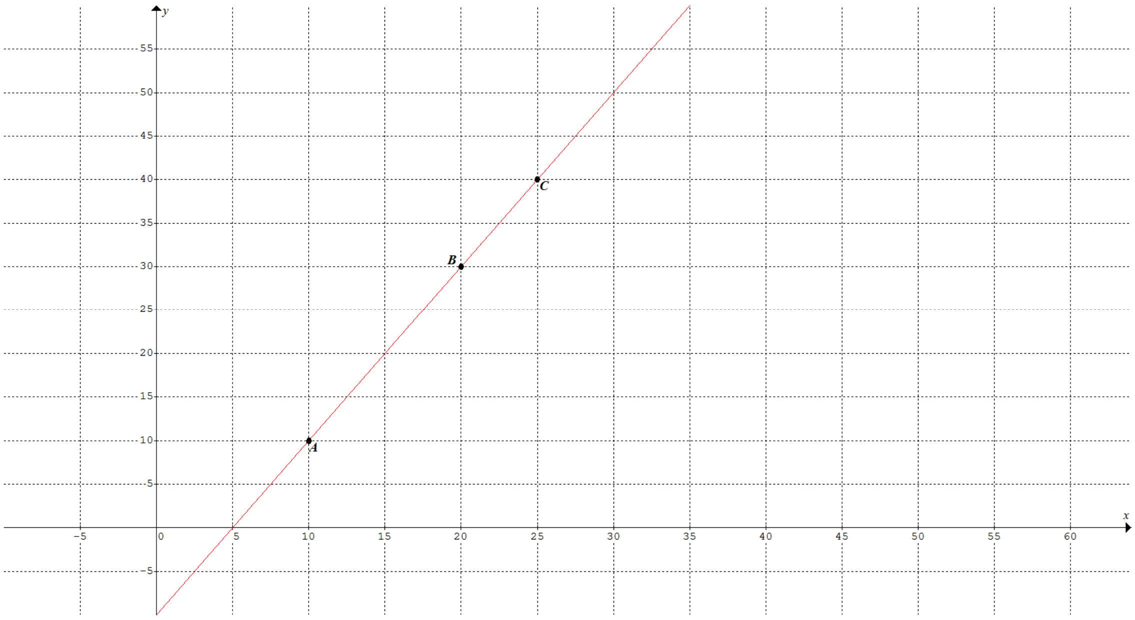


Figura 1

Procediendo de manera semejante con la ecuación 2, solicitar trazar su gráfica en el mismo plano donde se haya graficado la ecuación 1.

x	$y = x + 20$	Punto
5	$5 + 20 = 25$	$D(5,25)$
15	$15 + 20 = 35$	$E(15,35)$
25	$25 + 20 = 45$	$F(25,45)$

En la figura 2 se tiene la gráfica del sistema de ecuaciones correspondiente al caso 1 del problema de las cajas de refresco.

Como en la ecuación 1, es importante prestar atención a que no se haya dibujado solamente el segmento de recta $\overline{DF}$.

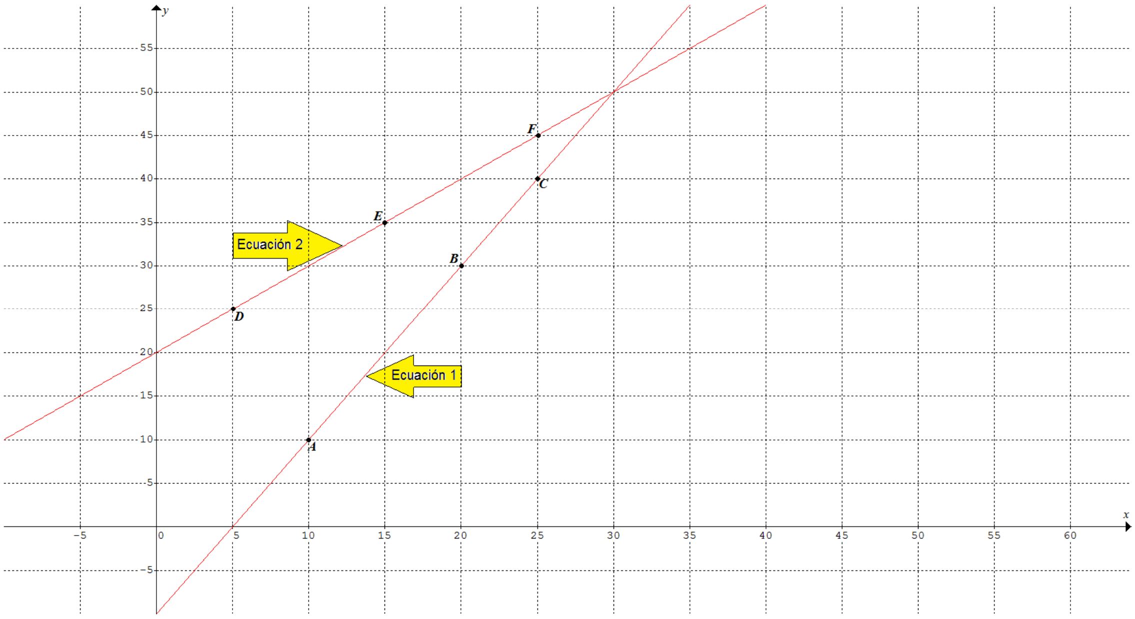


Figura 2

Preguntar:

11. ¿Cómo son las rectas de la figura 2?

Ejercicio 1.

Resuelve con el método de Gauss el sistema de ecuaciones graficado, observa con cuidado la gráfica de la figura 2 y responde la pregunta, ¿existe alguna relación entre la solución algebraica del sistema de ecuaciones y la gráfica del sistema mostrada en la figura 2?

No será difícil para los alumnos percatarse que la solución algebraica corresponde precisamente a las coordenadas del punto de intersección del **par de rectas secantes**, de las cuales se sabe que se deben intersectar en un y solamente un punto, de donde se deberá concluir que el sistema tiene solución y **es única**.

Por lo tanto, sí es posible que el peso de cada caja con refresco enlatado sea la mitad del peso de cada caja con refresco enlatado, en cuyo caso el camión estaría transportando 30 cajas con refresco embotellado y 50 cajas con refresco enlatado.

Caso 2. ¿Será posible que el peso de cada caja con refresco enlatado sea igual al peso de cada caja con refresco embotellado? En caso afirmativo, ¿cuál será la solución del problema?

Como en el caso anterior, preguntar:

12. ¿Cuál será el valor que se deberá asignar al parámetro p en éste caso?

13. ¿Cuál será el sistema de ecuaciones asociado a él?

Invitar a que siguiendo un procedimiento semejante como en el caso 1, representen gráficamente al sistema de ecuaciones obtenido, quien imparte el curso podrá sugerir valores para la variable x y revisar que los resultados que obtienen los alumnos son los correctos.

Ecuación 1

x	$y =$	Punto
10		A
20		B
40		C

Ecuación 2

x	$y =$	Punto
5		D
25		E
35		F

Finalmente tendrán una gráfica como la mostrada en la figura 3.

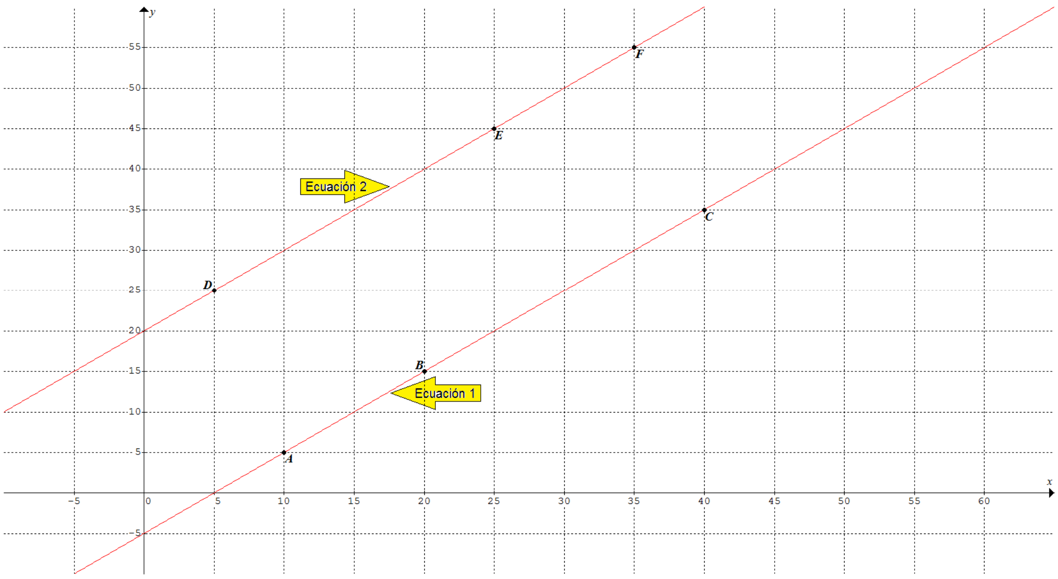


Figura 3

Preguntar:

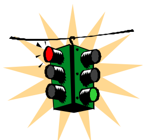
14. ¿Qué diferencia conceptual distingue al par de rectas graficadas en la figura 3 del par de rectas graficadas en la figura 2?

15. En éste caso, ¿qué se podrá decir acerca del sistema de ecuaciones?

Reflexionando un poco los alumnos podrán concluir que el sistema de ecuaciones **no tiene solución**, ya que en el caso anterior, la solución está dada por el punto que tienen en común las dos rectas y las rectas paralelas no tienen puntos en común.

Por lo tanto, no es posible que el peso de cada caja con refresco enlatado sea igual al peso de cada caja con refresco enlatado, en cuyo caso el problema no tiene solución.

Es así que un sistema de ecuaciones lineal de 2×2 puede tener o no tener solución, por lo que los casos analizados permiten introducir los siguientes conceptos clave.



Conceptos clave:

Compatibilidad e incompatibilidad de sistemas de ecuaciones.

15. Un sistema de ecuaciones es **compatible** si y sólo si tiene solución.

16. Un sistema de ecuaciones es **incompatible** si y sólo si no tiene solución.

A continuación mostrar qué es lo que sucede cuando se resuelve con el método de Gauss el sistema de ecuaciones incompatible del caso 2.

Sistema original:

$$\begin{aligned} 20x &= 20y + 100 \quad \text{...... ecuación } 1 \\ x &= y - 20 \quad \text{...... ecuación } 2 \end{aligned}$$

Se puede solicitar que los alumnos realicen las siguientes transformaciones:

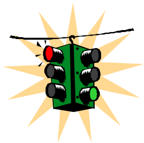
1. Por el primer criterio, dividir entre 20 a la ecuación 1, para simplificarla.
2. Por el tercer criterio, restar y en la ecuación 1, para que todos los términos con incógnitas estén en el primer miembro.
3. Por el mismo criterio y por la misma razón, restar y en la ecuación 2.
4. Aplicando el segundo criterio, sustituir la ecuación 2 por el resultado de la operación $\text{ecuación } 1 - \text{ecuación } 2$.

El resultado será:

$$x - y = 5 \quad \text{...... ecuación } 1$$

$$0 = 25 \text{ ...... ¡igualdad falsa!}$$

Este resultado se deberá generalizar del siguiente modo:

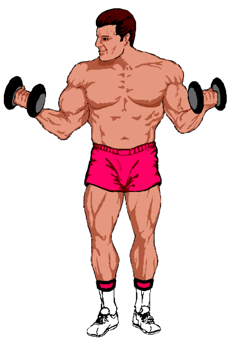


Concepto clave:

17. Criterio de incompatibilidad para sistemas de ecuaciones lineales.

Si el sistema triangular contiene una expresión del tipo $0 = c$, donde c es una constante distinta de cero, entonces el sistema de ecuaciones es **incompatible**.

Queda a juicio de quien imparte el curso diseñar un tercer caso donde el sistema sea compatible y sin embargo su solución no sea un recurso para poder responder el problema, bastaría con proponer un valor para el parámetro p que conduzca a un sistema de ecuaciones cuyos valores de su solución no sean todos números enteros o que no sean números enteros positivos, por ejemplo la pregunta ¿será posible que cada caja con refresco enlatado pese 8 kilos menos que el peso de cada caja con refresco embotellado? Conduce a un sistema de ecuaciones compatible, sin embargo su solución que es $x = \frac{85}{2}$ y $y = \frac{125}{5}$ no es solución para el problema. Esto permitirá que el alumno distinga entre la solución del sistema de ecuaciones y la solución del problema, y comprenda que no es suficiente que el sistema de ecuaciones asociado a un problema sea compatible para que el problema tenga solución, aunque sí es necesario; mientras que por otro lado, bastará con que el sistema sea incompatible para asegurar que el problema no tiene solución.



Ejercicio 2

Trazar la gráfica del siguiente sistema de ecuaciones y decidir si es compatible o incompatible.

$$4y = 10 - 6x \quad \text{.......... ecuación } 1$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{5}{2} - y \quad \text{.......... ecuación } 2$$

Pedir que se completen las tablas siguientes, localizar los puntos en el plano cartesiano, trazar las rectas y comparar su gráfica con la mostrada en la figura 4.

Ecuación 1

x	$y =$	Punto
-2		A
1		B
4		C

Ecuación 2

x	$y =$	Punto
-1		P
3		Q
5		R

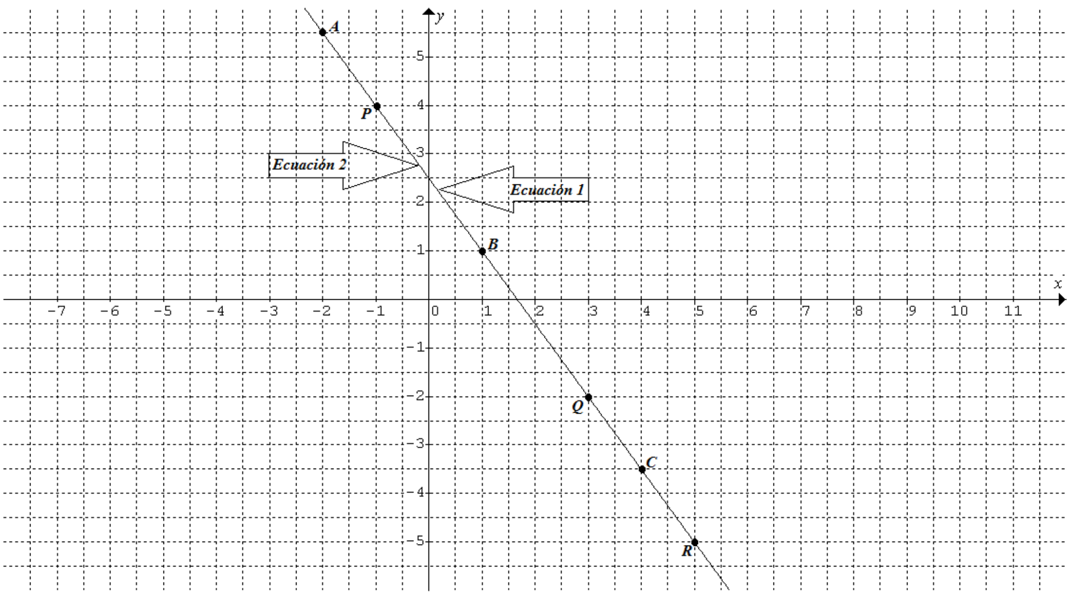


Figura 4

Los alumnos observarán que ***¡las rectas están encimadas!****, y es probable que no puedan decidir si el sistema es compatible o incompatible, así que será labor de quien imparte el curso señalar que el sistema es compatible porque la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineal de* 2×2 *corresponde a las coordenadas de los puntos que tengan en común las dos rectas.*

Preguntar:

16. ¿Cuántos puntos tienen en común las rectas graficadas?

De lo anterior se deberá concluir que un sistema de ecuaciones lineal de 2×2 compatible puede tener una **infinidad de soluciones**.

Ahora corresponde ver lo que sucede al resolverlo algebraicamente, otra vez utilizando el método de Gauss.

Sistema original:

$$4y = 10 - 6x \quad \text{.......... ecuación } 1$$
$$\frac{3x}{2} = \frac{5}{2} - y \quad \text{.......... ecuación } 2$$

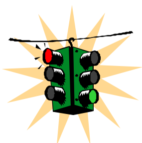
Sugerir pasos para resolverlo, los cuales pueden ser los siguientes:

1. Por el primer criterio, dividir entre dos a la ecuación 1, para simplificarla.
2. Por el tercer criterio, sumar $3x$ en la ecuación 1, para que todos los términos con incógnitas estén en el primer miembro de la ecuación.
3. Por el primer criterio, multiplicar por dos a la ecuación 2, para eliminar las fracciones.
4. Por el tercer criterio, sumar $2y$ en la ecuación 2, por la misma razón que en segundo paso.
5. Por el segundo criterio, remplazar la ecuación 2 por el resultado de que a la ecuación 1 se le reste la ecuación 2.

El resultado final será:

$$3x + 2y = 5 \quad \text{...... ecuación } 1$$
$$0 = 0 \quad \text{...... ¡igualdad verdadera!}$$

También este resultado se deberá generalizar y establecer como concepto clave.

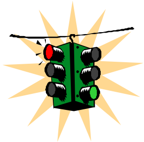


Concepto clave:

18. Criterio de dependencia para sistemas de ecuaciones lineales.

Si el sistema triangular contiene una expresión del tipo $0 = 0$, entonces el sistema de ecuaciones es **compatible y tiene una infinidad de soluciones**.

Es el momento de ampliar la clasificación de los sistemas de ecuaciones, mediante los conceptos clave siguientes:



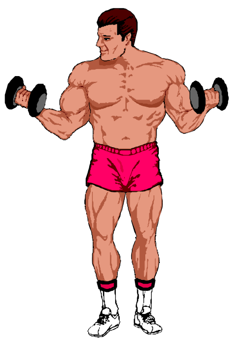
Conceptos clave:

Dependencia e independencia de sistemas de ecuaciones.

19. Un sistema de ecuaciones compatible es **dependiente** si y sólo si tiene una infinidad de soluciones.

20. Un sistema de ecuaciones compatible es **independiente** si y sólo si tiene solamente una solución.

Para cerrar la sección se pueden proponer ejercicios como el siguiente, con el fin de que los alumnos refuercen tanto el procedimiento algebraico mediante el método de Gauss como la clasificación hecha.



Ejercicio 3

Clasificar a cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes, procediendo algebraicamente con el método de Gauss. En caso de ser independiente obtener la solución.

a) Sistema 1.

$4x-3y=2$ ...... ecuación 1

$6y-8x=3$ ...... ecuación 2

b) Sistema 2.

$3x+y=1$ ...... ecuación 1

$2y-1=3x$ ...... ecuación 2

c) Sistema 3.

$x-2y=4$ ...... ecuación 1

$\dfrac{x-4}{2}-y=0$ ...... ecuación 2