# EL MÉTODO DE GAUSS EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE

***Sugerencias para quien imparte el curso:***

*Por ningún motivo se debe dar por hecho que todos los alumnos recuerdan perfectamente los métodos de resolución algebraica de un sistema de ecuaciones lineal de* $2 \times 2$*, así que es recomendable fortalecer dichos métodos, en particular el de suma o resta, esperando que se les haga más natural la transición de ese método al de Gauss. Es importante señalar que las secuencias propuestas describen cómo se pueden aplicar algunas experiencias de enseñanza y aprendizaje que han sido puestas en práctica con buenos resultados en el salón de clase, sin embargo deben ser aplicadas con sensatez, ser evaluadas y adaptadas a las condiciones de cada grupo.*

**Propósitos:**

1. Adaptar el método de suma o resta al método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones lineal de $2 \times 2$.
2. Introducir el concepto de sistemas de ecuaciones equivalentes.
3. Conocer el concepto de sistema de ecuaciones triangular.
4. Establecer criterios para convertir un sistema de ecuaciones lineal a otro que sea equivalente.

## RESOLUCIÓN ALGEBRAICA AL PROBLEMA DE LA CISTERNA

Verifica que los modelos obtenidos en la sección anterior para resolver el Problema del Depósito de Agua conducen a la misma solución.

Una vez que se dispone de un modelo matemático, para llegar a la solución del problema se pueden proponer las acciones expuestas en los numerales *VII* a *IX* de la presente sección.

*I. Encontrar la solución de la ecuación o del sistema de ecuaciones conseguido como modelo matemático.*

Dado que el Modelo Matemático 1 logrado es un sistema de ecuaciones lineal de $2\times2$, conviene recordar que hay diversos métodos para resolver este tipo de sistemas, entre ellos se encuentran los algebraicos.

Preguntar:

**1.** ¿Cuáles son los nombres de dichos métodos?

Resaltar que el nombre asignado a cada método se basa en la idea central de que en los métodos algebraicos de solución lo que se desea es reducir mediante alguna acción, que puede ser **una suma o una resta**, una **sustitución**, o una **igualación**, el número de ecuaciones y el número de incógnitas, con el fin de obtener un modelo más sencillo de resolver.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales de $2\times2$, los métodos mencionados en la respuesta de la pregunta **1** deberán conducir, de ser posible, a una ecuación de primer grado con una incógnita.

*Solicitar que los alumnos resuelvan el sistema de ecuaciones lineal obtenido en la sección anterior y pedir su exposición a algunos alumnos del grupo, considerando en particular a quien lo haya resuelto por el método de suma o resta, con la finalidad de que ellos mismos recuperen dicho procedimiento.*

Después de la actividad anterior es el momento de construir en conjunción con los alumnos el procedimiento a seguir para resolver un sistema de ecuaciones lineal de $2\times2$ con el método de Gauss, el cual como se verá, está basado en la aplicación del método de suma o resta y de algunos criterios de equivalencia, con la intención de obtener un sistema equivalente al original pero que sea más fácil de resolver.

Para lograr lo anterior se deberá aprovechar lo que el alumno haya resuelto en el pizarrón, por ejemplo lo más obvio es que haya realizado lo siguiente:

1. Multiplicó la ecuación 1 por $800$ para obtener la ecuación 3.

$$800x+800y=11400 \text{ ...... ecuación } 3$$

*Comentar que éste hecho refleja lo enunciado en la primera regla que se suele aplicar en el método de suma o resta:*

| |
|---|
| **Regla 1.** Se permite multiplicar o dividir entre un número distinto de cero, a cualquiera de las ecuaciones del sistema. |

*Mostrar que la ecuación 3 es semejante a la ecuación 1, en el sentido de que cualquier par de valores $(x, y)$ que satisfacen a la ecuación 1, también satisfacen a la ecuación 3, en otras palabras tales ecuaciones con equivalentes.*

No está de más, y así prevenir posibles dificultades que suelen darse, recordar que multiplicar o dividir una ecuación por algún número distinto de cero, significa multiplicar o dividir, según sea el caso, por dicho número a todos los términos de los dos miembros de la ecuación, ya que no es difícil encontrar que algunos alumnos multipliquen o dividan solamente a los términos del primer miembro de la ecuación o peor aún, solamente al término que contiene a la incógnita que se quiere eliminar.

2. Realizó la operación ecuación $3 -$ ecuación $2$, para obtener la ecuación 4, con lo cual logró obtener una ecuación con una sola incógnita.

$$300y = 3600 \text{ ...... ecuación } 4$$

*Explicar que en este paso, el alumno ha aplicado la segunda regla que en el método de suma o resta se sugiere utilizar:*

**Regla 2.** Es válido sumar o restar a una ecuación o a su equivalente del sistema, la otra ecuación o su equivalente del mismo sistema.

También con el fin de evitar posibles dificultades, conviene destacar que para sumar o restar dos ecuaciones, se deben sumar o restar respectivamente los términos que sean semejantes y que se encuentren en los mismos miembros de las ecuaciones, y que es de esperarse que el resultado también sea una ecuación, aunque podría ser que no sea así, como se verá más adelante.

*Resaltar que el par de pasos hasta aquí realizados por el alumno muestran la estrategia a seguir cuando se aplica el método de suma o resta, y que consiste en efectuar operaciones de tal suerte que los coeficientes de la primera incógnita sean iguales o que difieran a lo más en su signo, para posteriormente mediante una suma o una resta de ecuaciones se obtenga una ecuación con una incógnita.*

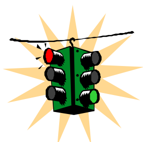
Como un resumen de los dos pasos realizados, sugerir que se construya un nuevo sistema de ecuaciones lineal de $2 \times 2$ con las ecuaciones 1 y 4, y pedir que se compare con el sistema original.

| Sistema original | Nuevo sistema |
|---|---|
| $x + y = 14.25$ ...... ecuación 1<br>$800x + 500y = 7800$ ...... ecuación 2 | $x + y = 14.25$ ...... ecuación 1<br>$300y = 3600$ ...... ecuación 2 |

Preguntar:

**2.** ¿Qué tienen en común y en que difieren éstos sistemas?

Entre las diferencias sobresaltar la distribución escalonada de las incógnitas en el nuevo sistema y establecer el concepto clave correspondiente.



**Concepto clave:**

**6. Sistema de ecuaciones triangular**

Un sistema de ecuaciones es triangular cuando tiene una estructura escalonada, son sistemas en los que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

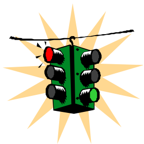
| Sistema original | Sistema triangular |
|---|---|
| $x + \quad y = 14.25$ ...... ecuación 1<br>$800x + 500y = 7800$ ...... ecuación 2 | $x \quad + \quad y = 14.25$ ...... ecuación 1<br>$300y = 3600$ ...... ecuación 2 |

Otra diferencia a destacar es que el sistema triangular es muy sencillo de resolver, pues de la ecuación 2, al despejar la incógnita $y$ se obtiene su valor $y = 12$, que al sustituirlo en la ecuación 1 y despejando la incógnita $x$ se tiene que $x = 2.25$.

Preguntar:

**3.** ¿Tendrá alguna relación la solución del sistema triangular con el sistema original?

La pregunta anterior es para que después de sustituir la solución del sistema triangular en cada una de las ecuaciones del sistema original y ver que éstas se satisfacen, concluir que entre las características que tienen en común es su solución, lo que permitirá incluir el siguiente concepto clave.

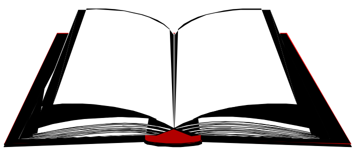


**Concepto clave:**

**7. Sistemas de ecuaciones equivalentes.**

Dos o más sistemas de ecuaciones son equivalentes si y sólo si los valores para las incógnitas satisfacen a todas las ecuaciones de todos los sistemas, es decir que todos los sistemas tengan la misma solución.

Como se advierte, la meta será lograr un sistema triangular, basándose en una idea muy simple que consiste en transformar el sistema original en otro que sea triangular y equivalente, así que en el caso particular de un sistema lineal de $2\times 2$, hay que transformarlo en uno que sea equivalente pero con la condición de que la primera ecuación contenga a las dos incógnitas y la segunda a sólo una de ellas, la transformación se irá dando conforme se apliquen ciertos criterios de equivalencia entre sistemas de ecuaciones, procedimiento que da lugar al método de Gauss y que se establece a continuación.

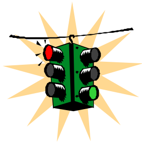


**PROCEDIMIENTO ALGEBRAICO PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEAL DE $2\times 2$, CON EL MÉTODO DE GAUSS**

Como ya se mencionó, el método de Gauss está basado en la aplicación del método de suma o resta y de algunos criterios de equivalencia, con el propósito de conseguir sistemas triangulares, a partir del sistema original.

**Sistema original** $\begin{cases} x+y=14.25 \text{ ..... ecuación } 1 \\ 800x+500y=7800 \text{ ..... ecuación } 2 \end{cases}$

La **regla 1** que trata sobre la equivalencia de ecuaciones, y que fue enunciada anteriormente para ser aplicada en el método de suma o resta, se deberá traducir en el primer criterio de equivalencia entre sistemas de ecuaciones y de esa manera introducir el siguiente concepto clave.



**Concepto clave:**

**8. Primer criterio de equivalencia entre sistemas de ecuaciones.**

Si se multiplica o se divide cualquier ecuación del sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.

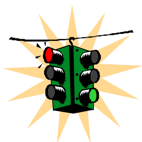
Por ejemplo, si se divide entre $100$ a la ecuación 2 del sistema original, se obtiene el sistema equivalente siguiente:

$$x + y = 14.25 \text{ ..... ecuación } 1$$
$$8x + 5y = 78 \text{ ......... ecuación } 2$$

Ahora, si se multiplica la ecuación 1 del sistema anterior por $8$, se obtiene el sistema equivalente:

$$8x + 8y = 114 \text{ ..... ecuación } 1$$
$$8x + 5y = 78 \text{ ..... ecuación } 2$$

De manera semejante, la **regla 2** sobre la posibilidad de sumar o restar las ecuaciones del sistema cuando se aplica el método de suma o resta, servirá de base para implementar el siguiente concepto clave:



**Concepto clave:**

**9. Segundo criterio de equivalencia entre sistemas de ecuaciones.**

Si en un sistema se reemplaza una ecuación por otra que sea resultado de la suma o de la resta de dos ecuaciones del mismo sistema, el resultado es otro sistema equivalente.

Preguntar:

**2.** Si en el sistema anterior se quiere eliminar al término que contiene a la primera incógnita de alguna de las dos ecuaciones, ¿qué operación habrá de realizarse con las ecuaciones 1 y 2?

De la respuesta a esta pregunta nacerá la sugerencia que según el segundo criterio de equivalencia, se puede sustituir la ecuación 2 por el resultado de que a la ecuación 1 se le reste la ecuación 2, obteniéndose el sistema triangular equivalente que sigue:

$$8x + 8y = 114 \text{ ..... ecuación } 1$$
$$3y = 36 \text{ ..... ecuación } 2$$

Preguntar:

**3.** Si se divide la primera ecuación entre $8$ y la segunda entre $3$, ¿cuál será el sistema equivalente resultante?

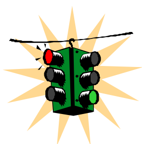
En resumen, el sistema original se ha convertido a otro que es equivalente a él, pero que es más fácil de resolver.

Si se han realizado las operaciones correctamente se puede afirmar que los sistemas de ecuaciones siguientes son equivalentes:

| Sistema original | Sistema triangular |
|---|---|
| $x + y = 14.25$ ...... ecuación 1<br>$800x + 500y = 7800$ ...... ecuación 2 | $x + y = 14.25$ ...... ecuación 1<br>$y = 12$ ............ ecuación 2 |

Hacer ver con otro ejemplo, que la decisión sobre cuál criterio de equivalencia aplicar no es único, pues esto dependerá en gran medida de la visión y experiencia de quien lo esté aplicando, y de los criterios de equivalencia entre ecuaciones que se hayan establecido.

Una combinación de los dos primeros criterios de equivalencia entre sistemas de ecuaciones dará lugar al criterio que sigue.



**Concepto clave:**

**10. Tercer criterio de equivalencia entre sistemas de ecuaciones.**

Si en un sistema se sustituye alguna ecuación por otra que resulte de sumar o restar dos ecuaciones del sistema, previamente multiplicadas o divididas por números distintos de cero, el resultado es otro sistema equivalente al primero.

Por ejemplo, se pudo haber aplicado solamente el tercer criterio y decidir por ejemplo, reemplazar la ecuación 2 por el resultado de la operación $(800)(\text{ecuación } 1) - (1)(\text{ecuación } 2)$, obteniéndose de manera inmediata el sistema triangular equivalente siguiente:

$$x + y = 41.25 \text{ ...... ecuación } 1$$
$$300y = 3600 \text{ ........ ecuación } 2$$

Una vez que se ha logrado un sistema triangular, la solución del sistema original estará dado por las siguientes acciones:

a) Despejar la incógnita de la segunda ecuación.
b) Sustituir el valor de la incógnita obtenido anteriormente en la primera ecuación y despejar la otra incógnita.

Si consideramos el primer sistema triangular obtenido con el método de Gauss se tendrá que:

a) De la ecuación 2, el valor para la incógnita $y$ es $y=12$, la cual ya estaba despejada.
b) Sustituir el valor $y=12$ en la ecuación 1, dará lugar a la ecuación $x+12=14.25$, de donde al restar $12$ se tiene el valor de la otra incógnita, este es $x=2.25$.

Por lo tanto, la solución del sistema original es $x=2.25$ y $y=12$.

Lo siguiente será:

*II. Comprobar que la solución encontrada satisface a todas las ecuaciones del sistema original, es decir a todas las condiciones del problema.*

Preguntar:

**4.** ¿Cómo se podrá comprobar que la solución satisface al sistema de ecuaciones original?

Seguramente ya lo han hecho en otros cursos y es muy probable que recuerden que la comprobación consiste en verificar que los valores para las incógnitas obtenidos **satisfacen** a las dos ecuaciones que conforman el sistema original.

No está de más insistir en que los valores para las incógnitas obtenidos **satisfacen** a alguna de las ecuaciones del sistema, si al sustituirlos en ella y simplificar se obtiene una igualdad numérica verdadera.

En el problema:

$$\textbf{Sistema original} \begin{cases} x+y=14.25 & \text{...... ecuación } 1 \\ 800x+500y=7800 & \text{...... ecuación } 2 \end{cases}$$

Preguntar:

**5.** ¿Los valores $x=2.25$ y $y=12$ satisfacen a la ecuación 1 del sistema original?

**6.** ¿Los valores $x = 2.25$ y $y = 12$ satisfacen a la ecuación 2 del sistema original?

Las respuestas se resumen en la tabla siguiente:

| | |
|---|---|
| Sustituyendo los valores en la ecuación 1, se preguntaría: $¿2.25 + 12 = 14.25?$ | Sustituyendo los valores en la ecuación 2, se preguntaría: $¿(800)(2.25) + (500)(12) = 7800?$ |
| Simplificando: $14.25 = 14.25$ Esta igualdad verdadera, permitirá responder sí a la pregunta anterior. | Simplificando: $1800 + 6000 = 7800$ $7800 = 7800$ Esta igualdad verdadera, permitirá responder sí a la pregunta anterior. |
| En conclusión: Los valores satisfacen a la ecuación 1 | En conclusión: Los valores satisfacen a la ecuación 2 |

Como los valores $x = 2.25$ y $y = 12$ satisfacen a ambas ecuaciones del sistema original, aseguramos que dichos valores conforman la solución de dicho sistema.

No es extraño que al efectuar la comprobación anterior, algunos alumnos la realicen utilizando solamente una ecuación, por lo que habrá de insistirse que para tener la certeza que se ha obtenido la solución correcta, los valores obtenidos deben de satisfacer necesariamente a ambas ecuaciones.

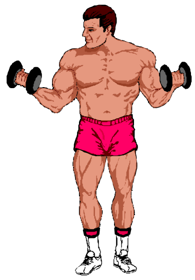
*III. Formular con oraciones completas la argumentación necesaria sobre las respuestas a las preguntas del problema.*

Para lograrlo realizar la siguiente secuencia de preguntas:

**7.** ¿Cuánto mide el área de la base de la cisterna?
**8.** ¿Cuál es la longitud del lado de la base de la cisterna?
**9.** ¿Cuánto mide el área total de las paredes laterales de la cisterna?
**10.** ¿Cuál es el valor del área de cada pared lateral de la cisterna?
**11.** ¿Cuál es la longitud del ancho de cada pared lateral de la cisterna?
**12.** ¿Cuánto mide el largo de cada pared lateral de la cisterna?
**13.** ¿De cuántos metros cúbicos es el volumen de la cisterna?
**14.** ¿Cuántos litros de agua caben en un metro cúbico?
**15.** ¿De cuántos litros de agua es la capacidad total de la cisterna?
**16.** ¿Hasta cuántos litros se podrán almacenar en la cisterna?

En la sección anterior se mostró que el modelo matemático para resolver el problema de la cisterna no es único, así que el problema se puede solucionar al resolver cualquiera de los modelos obtenidos, por lo que el propósito del siguiente ejercicio es doble, primero verificar que lo afirmado acerca de los modelos construidos es cierto, en seguida confirmar que se conoce el procedimiento para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita y garantizar que los alumnos saben cómo resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita.

*Es importante que quien imparte el curso cree en el salón de clases un ambiente donde el alumno tenga oportunidades para exponer los conocimientos y habilidades que traen de los cursos anteriores para aprender y comprender los nuevos conceptos.*



**Ejercicio 1.**

a) Recordando que la variable $x$ representa al número de metros cuadrados de la base de la cisterna, muestra que se llega a la misma solución del problema al resolver la ecuación de primer grado con una incógnita $800x + 500(14.25 - x) = 7800$.

b) Recordando que la variable $x$ representa a la longitud del lado de la cisterna, prueba que se obtiene la misma solución del problema cundo se resuelve la ecuación de segundo grado con una incógnita $800x^2 + 500(14.25 - x^2) = 7800$.

*Quien imparte el curso, si así lo considera pertinente, puede orientar la solución del sistema de ecuaciones no lineal obtenido en la sección anterior, por el método de suma o resta o por el que considere más conveniente, con el propósito de mostrar que invariablemente se llega a la misma solución del problema de la cisterna.*

Modelo matemático para el Problema de la Cisterna, donde la variable $x$ representa a la longitud del lado del fondo de la cisterna y la variable $y$ a su profundidad:

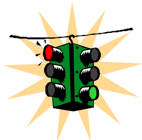
$$x^2 + 4xy = 14.25 \text{ ..... ecuación } 1$$

$$800x^2 + 2000xy = 7800 \text{ ..... ecuación } 2$$

*Para cerrar la sección y fortalecer la algoritmia, se sugiere, proponer como estrategia de enseñanza, sistemas de ecuaciones lineales de $2 \times 2$, **que tengan solución única**, para que los alumnos las encuentren aplicando el método de Gauss.*

*Quien imparte el curso puede tomar de cualquier libro de álgebra sistemas de ecuaciones o proponer los propios, que requieran de ir dando consejos e* *introducir más criterios de equivalencia para que los alumnos puedan aplicar el método de manera más rápida, como por ejemplo:*

**Consejo 1.** Procurar que todos los términos que contienen a las incógnitas estén en los primeros miembros de las ecuaciones y que todos los términos independientes en los segundos miembros, a través de aplicar el criterio enunciado en el concepto clave 11.

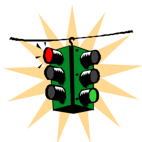


**Concepto clave:**

**11. Cuarto criterio de equivalencia entre sistemas de ecuaciones.**

Si se le suman o restan a ambos miembros de alguna de las ecuaciones un número o una expresión algebraica, el sistema resultante es equivalente.

**Consejo 2.** Observar que las incógnitas aparezcan en el mismo orden en todas las ecuaciones, de no ser así aplicar el concepto clave 12.

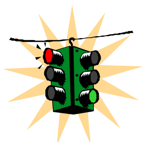


**Concepto clave:**

**12. Quinto criterio de equivalencia entre sistemas de ecuaciones.**

Si en un sistema se cambia el orden de las incógnitas, el sistema es equivalente.

**Consejo 3.** Si alguna ecuación del sistema tiene coeficiente uno en la primera incógnita y las restantes no, anotarla como primera ecuación del sistema y el sistema será equivalente.



**Concepto clave:**

**13. Sexto criterio de equivalencia entre sistemas de ecuaciones.**

Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones, resulta otro sistema equivalente.

**Consejo 4.** Siempre que sea posible simplificar la o las ecuaciones del sistema o si en alguna de las ecuaciones los coeficientes de los términos que contienen a las incógnitas o el término independiente están expresados como una fracción o de forma decimal, siempre será viable convertirlos a números enteros, todo lo anterior aplicando el primer criterio de equivalencia.