

EL CONCEPTO DE SISTEMAS DE ECUACIONES, SU DIMENSIÓN Y SU GRADO



Sugerencias para quien imparte el curso:

Se espera que con la propuesta didáctica presentada en conjunción con los aprendizajes previos que tienen los alumnos, éstos logren una comprensión aceptable del concepto de sistema de ecuaciones, de la proposición se podrá concluir que no basta con escribir definiciones en el pizarrón y exhibir algunos ejemplos para que el concepto quede totalmente asimilado, sino que el profesor o profesora debe planear una estrategia de enseñanza y aprendizaje que permita al estudiante el desarrollo de habilidades y que garanticen su comprensión. Lo anterior bajo la premisa de que la enseñanza de los sistemas de ecuaciones es porque permiten resolver problemas y no porque sea un tema atractivo desde el punto de vista matemático.

Propósitos:

1. Ratificar el concepto de sistema de ecuaciones lineal.
2. Introducir el concepto de sistema de ecuaciones no lineal



EL PROBLEMA DE LA CISTERNA

Se construyó en una casa de la Ciudad de México una cisterna en forma de prisma cuadrangular recto para almacenar agua, se desconocen sus dimensiones pero el dueño de la casa recuerda que la construcción del fondo le costó \$800.00 el metro cuadrado y la construcción de las paredes laterales tuvo un costo de \$500.00 por cada metro cuadrado. También recuerda que el área total construida fue de 14.25 metros cuadrados y que el costo total de la construcción fue de \$7,800.00, Si la cisterna solo se puede llenar hasta el 95% de su capacidad total, ¿cuál es el número máximo de litros de agua que se pueden almacenar en ella?

Luego de proponer el problema, permitir que los alumnos intenten resolverlo trabajando en parejas, dando el tiempo que se considere conveniente, para después motivar una discusión grupal con las diferentes proposiciones que hayan salido en la búsqueda de la solución por ellos mismos, y con el fin de ir tomando acuerdos que sirvan de base para futuras situaciones problemáticas, el Profesor o Profesora del grupo deberá ir dando sugerencias como las que se exponen en los numerales I a VI de esta sección y en los numerales VII a IX de la siguiente sección, durante todo el proceso de la resolución del problema.

En esta primera sección solamente se abordará la construcción de un modelo matemático que permita resolver la situación expuesta en el problema planteado de inicio.

- I. *Leer con mucho cuidado el problema hasta tener la seguridad de que se ha comprendido totalmente.*
- II. *Para lograr una mejor comprensión, siempre que sea posible dibujar alguna figura que modele la situación,.*

Después de dar esta segunda sugerencia, se espera que los alumnos dibujen una imagen como se muestra en la figura 1.

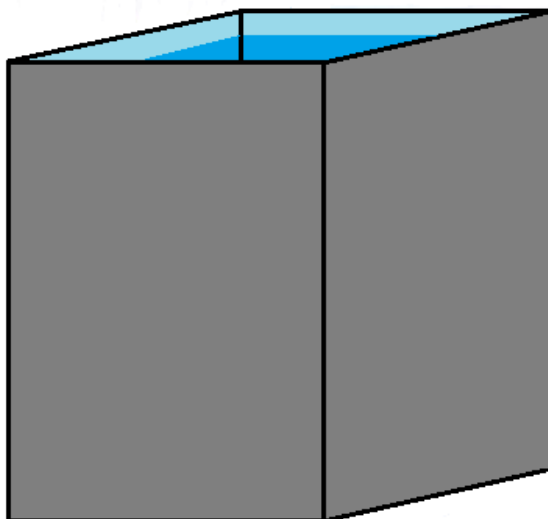


Figura 1

- III. *Determinar las cantidades conocidas y desconocidas.*

Preguntar por dichas cantidades en el problema.

1. *¿Cuáles son las cantidades conocidas?*
2. *¿Cuáles son las cantidades desconocidas?*

En todo el desarrollo de la propuesta se plantea establecer un diálogo entre quien imparte el curso y los alumnos, sobre la base de una serie de preguntas que guían el camino hacia la solución del problema o al establecimiento de algún concepto clave, por lo que es importante verificar que las respuestas que se vayan dando sean las correctas, o bien orientar para arribar a ellas.

Es de esperarse que no exista dificultad alguna respecto a las cantidades conocidas, sin embargo en cuanto a las cantidades desconocidas podrían surgir una serie de respuestas como las siguientes:

- a) El máximo de litros de agua que se pueden almacenar en la cisterna.

- b) La capacidad de la cisterna.
- c) El volumen de la cisterna.
- d) La longitud del lado del fondo de la cisterna y su profundidad.
- e) El área del fondo de la cisterna y el área total de las paredes laterales de la cisterna.

De momento se trabajará con la respuesta del inciso e.

IV. Representar con el símbolo de alguna variable a cada una de las cantidades desconocidas en el problema.

Es importante resaltar que cada variable representará a un número, por lo que su declaración deberá revelar este hecho y puesto que en el problema las cantidades desconocidas son áreas y están dadas en metros cuadrados, éstas deberán estar definidas como el número de metros cuadrados.

Así se podría definir a la variable x como el número de metros cuadrados del fondo de la cisterna y a la variable y como el total de metros cuadrados en sus paredes laterales.

V. Cuando hay más de una cantidad desconocida, en ocasiones se podrá representar una de ellas con alguna variable y cualquier otra expresarla en términos de esa misma variable.

Por ejemplo, preguntar:

- 3. Si se define la variable x como el número de metros cuadrados del fondo de la cisterna, ¿cómo se expresaría el total de metros cuadrados en sus paredes laterales, utilizando esa misma variable? Recordar que el área total construida fue de 14.25 metros.

Hacer notar que las variables que han sido definidas, son variables cuyo valor no se conoce a priori, pero que eventualmente será determinado, es decir que son **incógnitas**.

VI. Identificar todas las relaciones que conduzcan a una ecuación.

Se sugiere preguntar:

- 4. ¿Qué es una ecuación?
- 5. ¿Cuáles relaciones del problema nos permitirán obtener una ecuación?

Se espera que la respuesta a la pregunta 5 sea:

- a) “El área total construida **es igual a** 14.25 metros”
- b) “El costo total de la construcción **es igual a** \$7,800.00”

Si la variable x representa el número de metros cuadrados del fondo de la cisterna y la variable y es el total de metros cuadrados en sus paredes laterales,

entonces el área total construida quedará representada con la expresión algebraica $x + y$, y como fue en total un área de 14.25 metros cuadrados, se tendrá en consecuencia la ecuación $x + y = 14.25$ como la representación algebraica del área total construida.

Preguntar:

6. Si se construyeron x metros cuadrados en el fondo de la cisterna y cada metro cuadrado tuvo un costo de \$800.00, ¿cómo se representaría el costo de construcción del fondo de la cisterna?
7. Si se construyeron y metros cuadrados en las paredes laterales de la cisterna y cada metro cuadrado costó \$500.00, ¿qué expresión algebraica indicará el costo de construcción de las paredes laterales de la cisterna?
8. ¿Cuál será la ecuación que dirá que el costo total de la construcción de la cisterna fue de \$7,800.00?

El par de ecuaciones obtenidas tomadas en conjunto, modelan de manera matemática a la situación que se quiere resolver en el problema de la cisterna.

Modelo Matemático 1 para el Problema de la Cisterna:

$$x + y = 14.25 \dots\dots \text{ecuación 1}$$

$$800x + 500y = 7800 \dots\dots \text{ecuación 2}$$

Preguntar:

9. ¿Qué tipo de ecuaciones son?

Se le ha llamado Modelo matemático 1, porque como se verá no es el único modelo que se puede plantear para resolver el problema.

Por ejemplo, si se hubiera considerado a la variable x como los metros cuadrados construidos en el fondo de la cisterna, y al total de metros cuadrados en las paredes con la expresión obtenida como respuesta a la pregunta 3, ésta es $14.25 - x$, donde ya se utilizó la primera igualdad mostrada como respuesta a la pregunta 5, la segunda igualdad de dicha respuesta dará lugar al modelo buscado.

Preguntar:

10. Si se construyeron x metros cuadrados en el fondo de la cisterna y cada metro cuadrado tuvo un costo de \$800.00, ¿cómo se representaría el costo de construcción del fondo de la cisterna?
11. Si se construyeron $14.25 - x$ metros cuadrados en las paredes laterales de la cisterna y cada metro cuadrado costó \$500.00, ¿qué expresión algebraica indicará el costo de construcción de las paredes laterales de la cisterna?

12. ¿Cuál será la ecuación que dirá que el costo total de la construcción de la cisterna fue de \$7,800.00 ?

Ésta última ecuación, también modela de manera matemática a la situación que se quiere resolver en el problema de la cisterna.

Modelo Matemático 2 para el Problema de la Cisterna:

$$800x + 500(14.25 - x) = 7800$$

Preguntar:

13. ¿Qué tipo de ecuación es?

La secuencia didáctica sugiere a quien imparte el curso plantear una tercera situación en la que se consideren como cantidades desconocidas, por ejemplo a la longitud del lado del fondo de la cisterna y a la de su profundidad.

Preguntar:

14. Si la variable x representa a la longitud del lado del fondo de la cisterna, ¿cómo se representaría al área construida en el fondo de la cisterna?

15. Si la variable y representa lo que mide la profundidad de la cisterna, ¿Cuál expresión algebraica representará al área construida en las paredes laterales de la cisterna?

16. Si se construyeron x^2 de metros cuadrados en el fondo de la cisterna y cada metro cuadrado costó \$800.00, ¿cómo se representaría el costo de construcción del fondo de la cisterna?

17. Si se construyeron en total $4xy$ metros cuadrados en las paredes laterales de la cisterna y cada metro cuadrado tuvo un costo de \$500.00, ¿cuál expresión algebraica indicará el costo de la construcción de las paredes laterales de la cisterna?

18. ¿Cuál ecuación mostrará el total de metros cuadrados construidos en la cisterna?

19. ¿Con cuál ecuación se indicará el costo total de la construcción de la cisterna?

Considerando en conjunto las respuestas a las preguntas 18 y 19 se tendrá el siguiente modelo algebraico.

Modelo Matemático 3 para el Problema de la Cisterna:

$$x^2 + 4xy = 14.25 \dots \text{ecuación 1}$$

$$800x^2 + 2000xy = 7800 \dots \text{ecuación 2}$$

Preguntar:

20. ¿Qué tipo de ecuaciones son?

Inclusive quien imparte el curso podría llevar el contexto del problema a la ecuación mostrada a continuación.

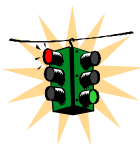
Modelo Matemático 4 para el Problema de la Cisterna:

$$800x^2 + 500(14.25 - x^2) = 7800$$

Preguntar:

21. ¿Qué tipo de ecuación es?

La idea de obtener distintos modelos matemáticos para un mismo problema es para que quien imparte el curso en conjunción con sus alumnos puedan entablar una discusión que permita distinguir las diferencias entre cada uno de ellos, así como resaltar sus semejanzas y poder introducir el siguiente conjunto de conceptos clave.



Conceptos clave:

Sistema de ecuaciones, su dimensión y grado

1. Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto formado por dos o más ecuaciones.
2. La **dimensión de un sistema de ecuaciones** está dada por el número de ecuaciones y el número de incógnitas que intervienen en él, por ejemplo un sistema de ecuaciones formado por dos ecuaciones y dos incógnitas es un sistema de ecuaciones de dimensión 2×2 , un sistema de ecuaciones donde hay dos ecuaciones y tres incógnitas es de dimensión 2×3 , un sistema de ecuaciones con cuatro ecuaciones y tres incógnitas es un sistema de ecuaciones de dimensión 4×3 , etcétera. En general, un sistema de ecuaciones formado con m ecuaciones y n incógnitas es un sistema de ecuaciones de dimensión $m \times n$.
3. En particular, si $m = n$, el sistema de ecuaciones es de dimensión $n \times n$ y se dice que es **cuadrado**.
4. El **grado** de un sistema de ecuaciones es el de la ecuación de mayor grado.

Sistema de ecuaciones lineal y sistema de ecuaciones no lineal

5. El sistema de ecuaciones será **lineal** cuando todas las ecuaciones que lo forman sean de primer grado, y **no lineal** cuando el grado de al menos una de las ecuaciones sea mayor que uno.

Para cerrar la sección y con la finalidad de que el alumno asimile los conceptos clave ya registrados, se pueden proponer ejercicios como los que se muestran a continuación



Ejercicio 1

Para el sistema de ecuaciones que está formado por las ecuaciones que siguen, responde las preguntas: ¿De qué dimensión y grado es el sistema? ¿Es cuadrado? ¿Es lineal o no lineal?

$$2x - y + z = 8$$

$$x^2 + y = 5$$

Nota: De aquí en adelante, al describir la dimensión de algún sistema de ecuaciones, en lugar por ejemplo de la expresión “sistema de ecuaciones de dimensión 3×2 ”, simplemente se dirá “sistema de ecuaciones de 3×2 ”, en lugar de “sistema de ecuaciones de dimensión 2×2 ”, solamente se anotará “sistema de ecuaciones de 2×2 ”, etcétera.

Ejercicio 2

Responde las preguntas:



a) Un sistema de ecuaciones lineal de 2×2 , ¿de qué grado es? ¿cuántas ecuaciones contiene y de qué grado? Y ¿cuántas incógnitas intervienen?

b) Un sistema de ecuaciones no lineal de 2×3 de segundo grado, ¿cuántas ecuaciones contiene y de qué grado? Y ¿cuántas incógnitas intervienen?