SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES DE 2×2

Sugerencias para quien imparte el curso:

Es importante que la interacción con los alumnos dentro del salón de clases sea lo más activa posible, para no caer en un esquema expositivo por parte del profesor o profesora, se debe crear en la clase una atmósfera donde los estudiantes se sientan a gusto para proponer y probar conjeturas e ideas, en tanto que las representaciones gráficas se deben utilizar como un instrumento útil para el análisis y así llegar a la comprensión de los conceptos expuestos que a su vez se convierten en recursos importantes para ser utilizados en nuevas situaciones. Se espera que con el uso del apoyo del registro visual se logre un progreso significativo en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones no lineales y se eviten las dificultades que pueden generarse al trabajar exclusivamente en el registro algebraico. No se debe pensar que con solo ver la gráfica el alumno puede lograr un aprendizaje conceptual, sino que éstas deben estar vinculadas a actividades planeadas de antemano y que estén orientadas a la adquisición del concepto.

Propósitos:

1. Reforzar el concepto de sistema de ecuaciones no lineal, su grado y su dimensión.
2. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales de 2×2 formados de una ecuación de primer grado y de una de segundo grado, y otros compuestos de dos ecuaciones de segundo grado.
3. Deducir la ecuación para la circunferencia con centro en el origen del sistema de coordenadas cartesianas.
4. Reconstruir el procedimiento para desarrollar el cuadrado de un binomio.
5. Retomar el concepto de ecuación de segundo grado con una incógnita y la relación que existe entre el valor de su discriminante y la naturaleza de sus raíces.

EL PROBLEMA DEL PUNTO EN MOVIMIENTO

Un punto P se mueve con cierta velocidad a lo largo de la gráfica de la ecuación $2x + y = 2$ y se parará momentáneamente solamente en aquellos puntos que se encuentren a cinco unidades del origen del plano cartesiano.

Encontrar exactamente en qué posiciones del plano cartesiano el punto hará su breve parada.

Como en las secciones anteriores, primero dar tiempo para permitir que los alumnos entiendan bien el problema, intenten resolverlo o propongan sugerencias para encontrar su solución.

Se recomienda que primero se planee una resolución gráfica.

Preguntar:

1. ¿Qué tipo de ecuación es la que aparece en el enunciado del problema?
2. ¿Qué figura geométrica debe ser graficada?

De ser necesario remitirlos a al concepto clave **14**, pedir el trazo de la gráfica de la ecuación $2x+y=2$ en el plano cartesiano y que se compare con la que aparece en la figura 1.

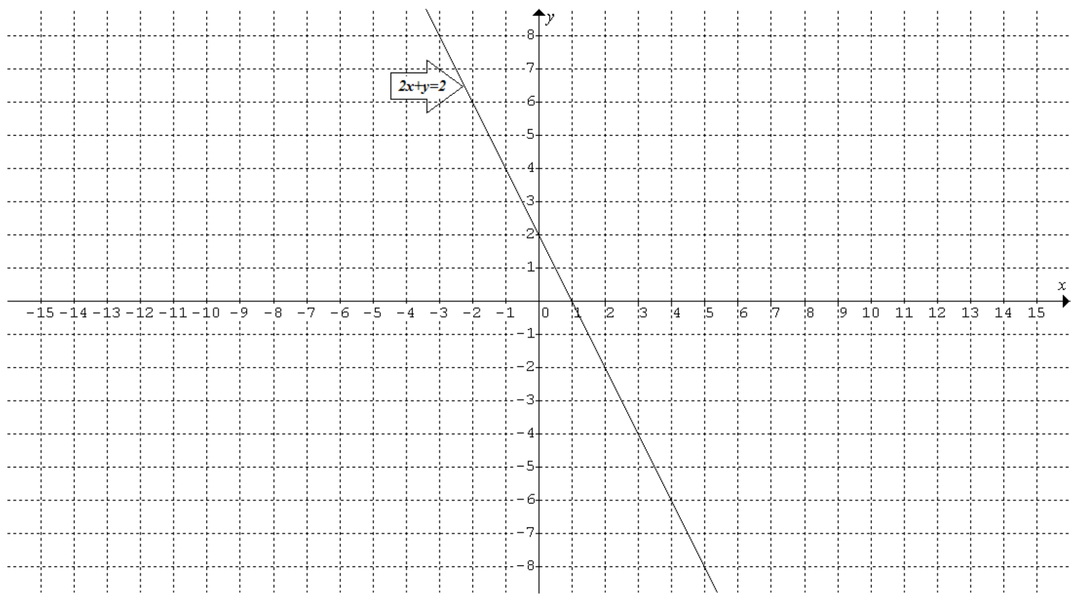


Figura 1

Plantear la siguiente interrogante:

Todos los puntos de la recta satisfacen a la ecuación $2x+y=2$, pero, ¿cuántos y cuáles de ellos se encontrarán a cinco unidades del origen?

Para encontrar respuesta a la duda anterior, solicitar que encuentren las coordenadas de puntos que se encuentren a cinco unidades del origen del plano cartesiano. Se espera que los puntos encontrados más obvios sean los que se muestran en la figura 2.

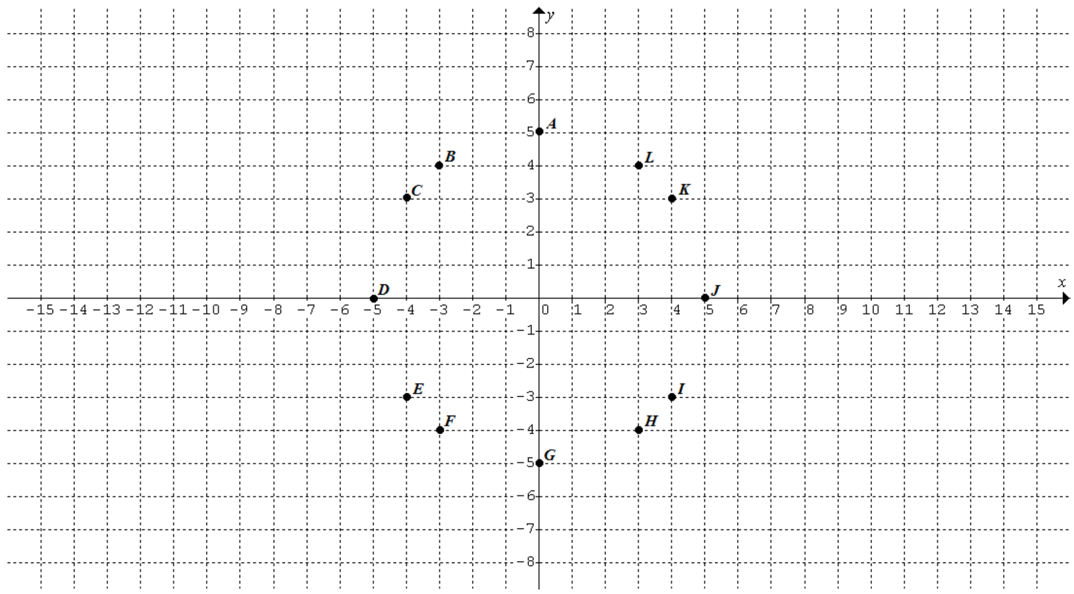


Figura 2

Preguntar:

3. ¿Alguno de estos puntos pertenece a la recta de la figura 1?

De esta manera se encontrará un punto que cumple con lo pedido en el enunciado del problema, el punto $H(3,-4)$.

Preguntar para establecer conjeturas:

4. ¿El punto H es el único punto que pertenece a la recta y que está a cinco unidades del origen o habrá más?
5. ¿Los puntos mostrados en la figura 2 son todos los que están a cinco unidades del origen o hay más?
6. ¿Existirá alguna figura geométrica que represente a todos los puntos que se encuentran a cinco unidades del origen del plano cartesiano? ¿Cuál?

Luego de escuchar respuestas dejar abierta la que se dé a la pregunta **4**, en tanto que con respecto a las preguntas **5** y **6**, es muy probable que la respuesta sea que hay más y que se afirme que son todos los que pertenecen a la circunferencia que tiene su centro en el origen del plano cartesiano con un radio de cinco unidades.

Solicitar que se trace tal circunferencia en el mismo plano donde se graficó la recta y preguntar:

7. ¿Cuántos puntos cumplen con lo pedido en el problema?

Los alumnos podrán constatar de la gráfica que solo hay dos puntos, y son aquellos que son comunes a la recta y a la circunferencia, uno de ellos es el punto $H(3,-4)$, pero, ¿qué coordenadas tendrá el otro?

Puesto que no es fácil determinar a partir del modelo gráfico las coordenadas exactas del otro punto donde se intersectan la recta y la circunferencia, será necesario destacar la necesidad recurrir al álgebra.

Para poder realizar algún procedimiento algebraico, además de la ecuación para la línea recta que se conoce desde el inicio, se debe tener alguna para la circunferencia, así que la situación a resolver en este momento está planteada en la cuestión ¿cómo se podría obtener un modelo algebraico para la circunferencia?

Quien imparte el curso no deberá exhibir el modelo ya terminado, sino que tendrá que orientar su construcción, dando todas las sugerencias que considere pertinentes y estableciendo un diálogo con los alumnos basado en preguntas, como se ha venido haciendo hasta ahora.

Por ejemplo, haciendo uso de los instrumentos adecuados proponer la siguiente construcción geométrica:

- Trazar en el plano cartesiano la circunferencia con centro en el origen y con un radio de cinco unidades.
- Marcar al azar cualquier punto sobre la circunferencia que esté en cualquier cuadrante, preferentemente en el primero por facilidad en la deducción. Resaltar que como el punto fue seleccionado al azar, sus coordenadas se considerarán variables y el punto se llamará $P(x,y)$.
- Trazar un segmento de recta desde el origen hasta el punto P.
- Desde el punto P trazar un segmento de recta vertical hasta el eje de abscisas y llamar Q al punto en dicho eje.
- Llamar O al punto correspondiente al origen del plano cartesiano.
- Resaltar el triángulo OQP.

El resultado de la construcción se muestra en la figura 3.

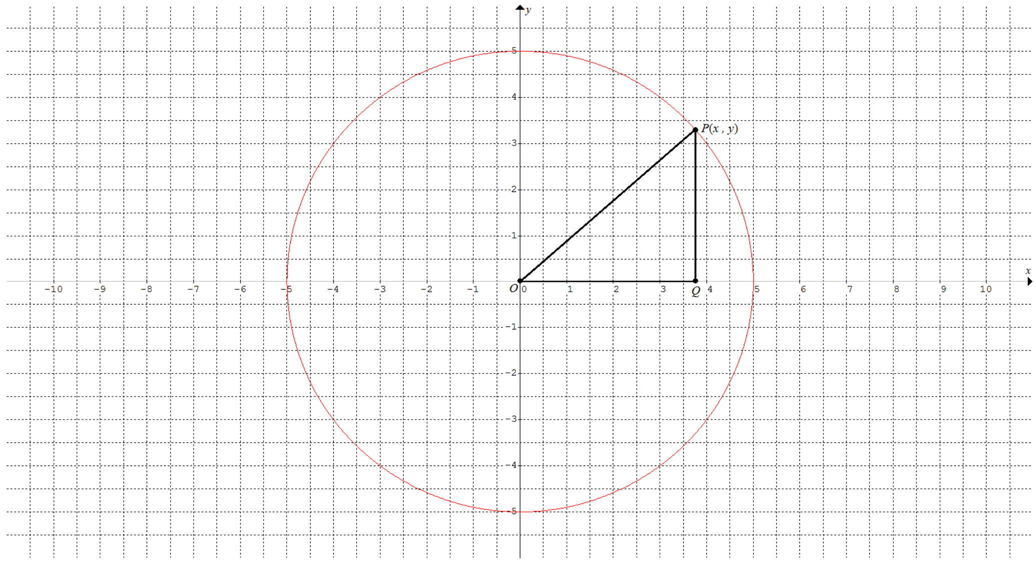


Figura 3

Una vez concluida la construcción geométrica, preguntar:

8. ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo construido?

9. ¿Cómo se le llama al lado que se opone al ángulo recto en un triángulo rectángulo?

10. ¿Qué nombre reciben los lados que forman el ángulo interior recto en un triángulo rectángulo?

11. En el triángulo construido, ¿cuál lado es la hipotenusa y cuánto mide?

12. ¿Cuál de las coordenadas variables del punto P determinará la longitud del cateto horizontal?

13. ¿Cuál coordenada de punto P establecerá la longitud del cateto vertical?

14. ¿Cómo se relacionan las tres longitudes $\overline{OQ}$, $\overline{QP}$ y $\overline{OP}$ correspondientes a los lados del triángulo construido?

Las respuestas correctas a esta serie de preguntas permitirán establecer el modelo algebraico o ecuación de la circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y con un radio de cinco unidades, ésta es $x^2 + y^2 = 5^2$ ó bien $x^2 + y^2 = 25$.

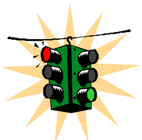
Vale la pena aclarar desde este momento, ya que será recurrente en el estudio de los lugares geométricos, que la elección al azar del punto P en la circunferencia con coordenadas variables x y y es un artificio matemático que le permitirá afirmar que la ecuación obtenida $x^2 + y^2 = 5^2$ la deben satisfacer las *coordenadas de cualquier punto que pertenezca a la circunferencia y que cualquier punto cuyas coordenadas no la satisfagan, no será un punto de ella.*

Por ejemplo, el punto $C(-4,3)$ pertenece a la circunferencia, ya que sus coordenadas sí satisfacen a la ecuación, porque $(-4)^2+3^2=16+9=25=5^2$, mientras que el punto $R(2,4.5)$ no es un punto de la circunferencia, dado que no satisface a la ecuación, ya que $2^2+4.5^2=4+20.25=24.25\neq 5^2$.

Antes de continuar con el problema, preguntar:

15. Si el centro de la circunferencia fuera el origen del plano cartesiano y la longitud de su radio estuviera representada de manera general con la letra minúscula r, ¿cuál sería la ecuación que la representa?

La respuesta a esta pregunta es para introducir el concepto clave que sigue:



Conceptos clave:

21. Ecuación cartesiana de la circunferencia con centro en el origen.

a) La ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen en el plano cartesiano y un radio de longitud r es $x^2+y^2=r^2$.

b) La gráfica de la ecuación $x^2+y^2=r^2$ es una circunferencia que tiene centro en el origen del plano cartesiano y un radio de longitud r.

Continuando con la búsqueda algebraica de la solución del problema de inicio, se sabe hasta este momento que la recta tiene ecuación $2x+y=2$ y que la circunferencia tiene ecuación $x^2+y^2=25$, pero ¿cómo saber cuáles son las coordenadas de los dos puntos que tienen en común?

En otras palabras, ¿cómo encontrar todas las parejas de valores (x,y) que satisfagan a las dos ecuaciones $2x+y=2$ y $x^2+y^2=25$?

De la discusión grupal deberá surgir la propuesta de resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$2x+y=2 \quad \text{.......... ecuación 1}$$
$$x^2+y^2=25 \quad \text{.......... ecuación 2}$$

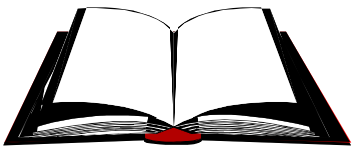
Preguntar:

16. ¿Qué tipo de ecuación es la ecuación 1?
17. ¿Qué tipo de ecuación es la ecuación 2?
18. ¿Qué tipo de sistema es el formado por estas dos ecuaciones?
19. ¿Cuál es la dimensión y cuál es el grado de dicho sistema?
20. Según su gráfica, indicar si el sistema es compatible o incompatible. En caso de ser compatible, ¿cuántas soluciones tiene?

Dar un tiempo para que los alumnos intenten resolver algebraicamente el sistema, incitándolos a recurrir al método de sustitución usado para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Tal vez sea necesario recordar que en tal método se aplica la estrategia matemática de convertir una situación nueva compleja a otra más simple ya conocida, reduciendo el número de ecuaciones y el número de incógnitas a través de una sustitución.

A continuación establecer en conjunto con los alumnos el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones no lineal de 2×2, formado por una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado.



MÉTODO DE SUSTITUCIÓN PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEAL DE 2×2 FORMADO POR UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO Y UNA DE SEGUNDO GRADO.

Como ejemplo resolver el sistema de ecuaciones no lineal de 2×2 que modela algebraicamente al problema del punto en movimiento:

$$2x + y = 2 \quad \text{.......... ecuación 1}$$
$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{.......... ecuación 2}$$

Como ya se mencionó se aplicará el método de sustitución, quien imparte el curso indicará las acciones a realizar y vigilará que los alumnos obtengan los resultados correctos.

Paso 1. Despejar de la ecuación de primer grado alguna de las incógnitas.

Por ejemplo, despejar la incógnita y de la ecuación 1.

Paso 2. Sustituir el resultado del paso 1 en la ecuación de segundo grado.

Revisar que en este caso, se haya sustituido correctamente $y = 2 - 2x$ en la ecuación 2 para obtener la ecuación con una incógnita $x^2 + (2-2x)^2 = 25$.

Paso 3. Simplificar y resolver la ecuación obtenida en el paso 2.

Para simplificar la ecuación obtenida en el paso 2, se deberá desarrollar el binomio al cuadrado $(2-2x)^2$, pero cuidado, porque uno de los errores más frecuentes es que no se realice de manera correcta.

Para resolver esta dificultad se podrían presentar los cuadrados que aparecen en las figuras 4 y 5, para que los alumnos reconstruyan su aprendizaje. El cuadrado de la figura 4 tiene por lado $a+b$ y área $(a+b)^2$, mientras que el de la figura 5 tiene por lado a y área a^2. Observar que ambos cuadrados se han descompuesto en dos cuadrados y dos rectángulos, así que la actividad que deberán realizar los alumnos es que expresen el área de cada cuadrado como las suma de las áreas de las partes formadas y de ahí establecer el concepto clave **22**. De ser necesario proponer algunos ejercicios donde se aplique el concepto clave para luego volver al problema.

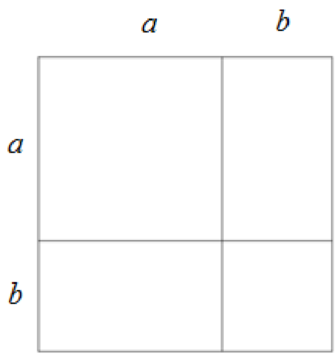


Figura 4

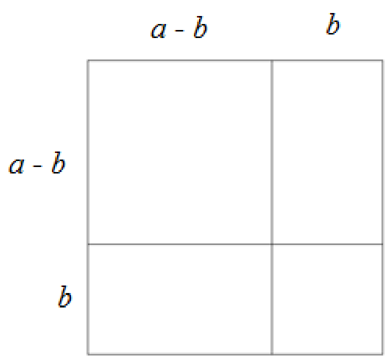
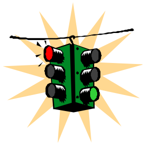


Figura 5

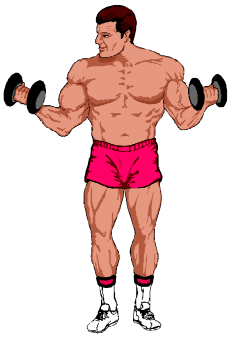
$(a+b)^2 =$

$a^2 =$



Concepto clave:

22. El cuadrado de un binomio.
a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



Ejercicio 1

Desarrolla cada uno de los binomios al cuadrado siguientes:

a) $(x+4)^2$

b) $(2x-1)^2$

c) $(5-3y)^2$

d) $(3x+2y)^2$

Regresando al problema se tiene que el resultado de la simplificación pedida es:

$$5x^2 - 8x - 21 = 0 \text{ .... ecuación 3}$$

Preguntar:

21. ¿Qué tipo de ecuación es la que se obtuvo al final de la simplificación?

Antes de proceder a resolver la ecuación 3, solicitar que se encuentre el valor de su discriminante para determinar el número de raíces de la ecuación y su naturaleza.

A pesar de ser conceptos que se analizaron y se relacionaron en el curso anterior, es posible que existan alumnos que no los hayan asimilado y en consecuencia convertirse en un obstáculo para avanzar en el estudio de los sistemas de ecuaciones no lineales. Por tal razón se sugiere que se establezcan como conceptos clave sin que haya de por medio alguna justificación.

Conceptos clave:

23. Discriminante y raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

a) El **discriminante** de la ecuación es el valor de $b^2 - 4ac$.

b) Si el valor del discriminante es un número **positivo**, entonces la ecuación tiene **dos raíces diferentes** que son números reales.

c) Si el valor del discriminante es **cero**, la ecuación tiene sólo **una raíz real** (la raíz es doble).

d) Si el valor del discriminante es un número **negativo**, la ecuación **no tiene raíces reales** (son dos números complejos o imaginarios, conjugados).

e) Las **raíces** o soluciones de la ecuación pueden encontrarse aritméticamente con la aplicación de la fórmula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Luego que los alumnos hayan calculado el valor para el discriminante igual a 484, deberán concluir según el concepto clave **23** inciso **b**, que la ecuación 3 debe tener dos raíces reales diferentes, y desde este momento se puede afirmar que el sistema es compatible y que tiene dos soluciones, como ya se había derivado de la gráfica.

Pedir que se encuentren los valores de tales raíces aplicando la fórmula general, más adelante si así lo considera sensato quien imparte el curso, podrán utilizar la opción correspondiente de la calculadora.

Las raíces son: $x_1 = 3$ y $x_2 = -\dfrac{7}{5}$

Indicar que estos valores son las abscisas de los puntos buscados.

Paso 4. Sustituir los valores de las raíces obtenidas en el paso 3, en el resultado del despeje realizado en el paso 1.

Es decir que para encontrar las ordenadas correspondientes, hay que sustituir cada valor de x en la ecuación que resultó del despeje de la ecuación de primer grado en el paso 1, en este caso en la ecuación $y = 2 - 2x$.

Para $x=3$	Para $x=-\frac{7}{5}$
$y=2-(2)(3)$ $y=2-6$ $y=-4$	$y=2-(2)\left(-\frac{7}{5}\right)$ $y=2+\frac{14}{5}$ $y=\frac{24}{5}$

Las dos soluciones al sistema de ecuaciones son:

Solución 1: $x=3$ y $y=-4$

Solución 2: $x=-\frac{7}{5}$ y $y=\frac{24}{5}$

Antes de dar la respuesta al problema del problema, los alumnos deberán verificar que las soluciones obtenidas son las correctas, comprobando que las dos soluciones satisfacen a las dos ecuaciones del sistema original.

Después de la comprobar que las soluciones son las correctas, concluir que el punto P se detendrá momentáneamente, exactamente en los puntos $(3,-4)$ y $\left(-\frac{7}{5},\frac{24}{5}\right)$.

EL PROBLEMA DEL TERRENO

Al papá de Juan le ofrecen un terreno del cual le informan que el costo por metro cuadrado es de $\$250.00$, además le hacen saber que tiene forma rectangular, que su perímetro es de 112 metros y que la longitud de su diagonal es de 40 metros. Si cuenta con un ahorro de $\$150,000.00$ y no desea endeudarse pidiendo prestado, ¿podrá comprar el terreno?

Dejar un tiempo para que los alumnos hagan un análisis de la situación planteada, hasta que concluyan que para saber si el papá de Juan puede o no puede comprar el terreno, se deberá calcular cuánto cuesta y que su precio *dependerá del área que éste tenga. Quien imparte el curso deberá coordinar la construcción del modelo matemático que permita resolver el problema.*

Preguntar:

22. ¿Qué forma tiene el terreno?
23. ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?

De la respuesta a la pregunta anterior será fácil establecer que hay dos incógnitas en el problema, la longitud del ancho y la longitud del largo del terreno.

Si se representa a la longitud del ancho del terreno con la letra minúscula x y a la longitud de su largo con la letra minúscula y, pedir como apoyo visual que se dibuje el terreno y su diagonal tal como se muestra en la figura 6.

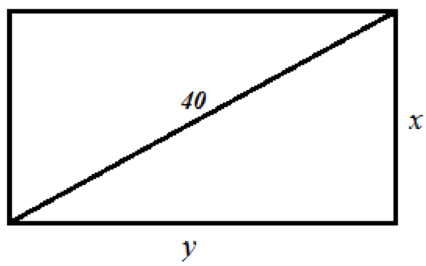


Figura 6

Preguntar, en la figura 6:

24. ¿Cómo se expresaría algebraicamente que su perímetro es igual 112 metros?
25. ¿Existirá alguna expresión matemática que relacione a las incógnitas x y y con la longitud de la diagonal? ¿Cuál?

Resaltar que para responder las preguntas **24** y **25** se ha utilizado la información relevante del problema, lo cual ha llevado a obtener dos ecuaciones, una de primer grado y una de segundo grado, con dos incógnitas, que en conjunto conformarán el sistema de ecuaciones no lineal de 2×2 siguiente:

$$2x + 2y = 112 \text{ .... ecuación 1}$$
$$x^2 + y^2 = 1600 \text{ .... ecuación 2}$$

Con el propósito de fortalecer el uso del método de sustitución para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones, sugerir los pasos siguientes:

Paso 1. Despejar la incógnita y de la ecuación de primer grado. Si es posible, simplificar.

Paso 2. Sustituir en la ecuación de segundo grado el resultado del despeje realizado en el paso 1.

Paso 3. Simplificar e igualar con cero a la ecuación obtenida en el paso 2. Identificándola como ecuación 3.

Antes de resolver la ecuación 3, encontrar el valor de su discriminante y completar lo siguiente:

Como el valor de su discriminante es igual a ________, la ecuación tendrá _____ raíces reales y el sistema de ecuaciones tendrá _____ soluciones.

Ahora sí, pedir que se resuelva la ecuación 3, solicitar a algunos alumnos las raíces obtenidas y anotarlas en el pizarrón.

Paso 4. Sustituir en la ecuación que se obtuvo en el despeje realizado en el paso 1, el valor de cada raíz real encontrada en el paso 3, para determinar para cada uno de ellos, el valor correspondiente para la otra incógnita y tener finalmente las soluciones del sistema:

Solución 1: $x = 32$ y $y = 24$

Solución 2: $x = 24$ y $y = 32$

Paso 5. Comprobar que las soluciones son correctas y finalmente responder a la pregunta planteada en el problema del terreno.

Preguntar:

26. Si se hubiera decidido resolver el problema del terreno gráficamente, ¿qué figuras geométricas se habrían trazado y qué hubiera sucedido con dichas figuras?

Hasta el momento, los dos sistemas de ecuaciones no lineales que se han resuelto han sido geométricamente una línea recta y una circunferencia con dos puntos en común, es decir que la recta ha sido secante a la circunferencia, pero ¿esto sucederá siempre?

Preguntar:

27. Dada una línea recta y una circunferencia en el mismo plano, ¿siempre tendrán dos puntos en común?

Luego de escuchar respuestas, mostrar que podrían ser ajenas como se muestra en la figura 7, o que la recta sea tangente a la circunferencia, como se muestra en la figura 8.

De lo anterior se concluye que un sistema de ecuaciones no lineal formado geométricamente por una circunferencia y una línea recta será:

a) **Compatible**, cuando las figuras no sean ajenas y tendrá una o dos soluciones, dependiendo que respectivamente, la recta sea tangente o secante a la circunferencia.
b) **Incompatible**, cuando las figuras sean ajenas.

Preguntar:

28. ¿Podría ser dependiente algún sistema de ecuaciones de esta clase?

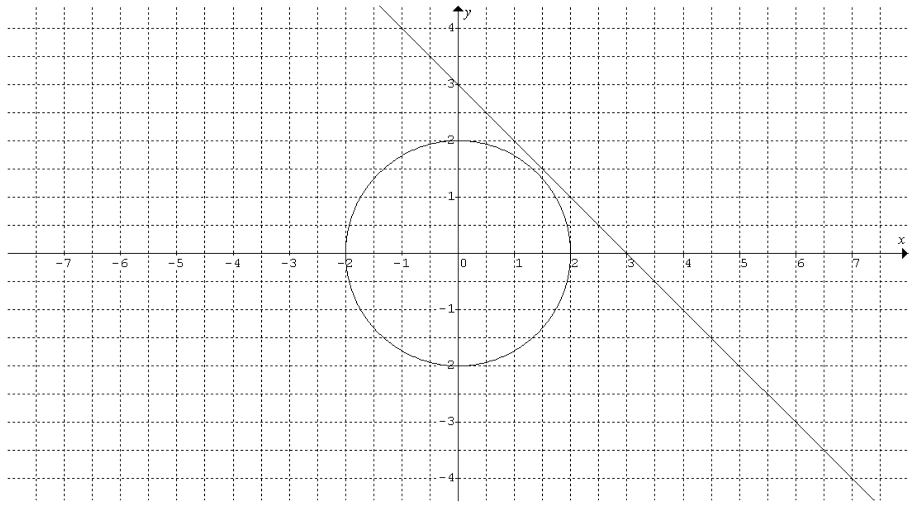


Figura 7

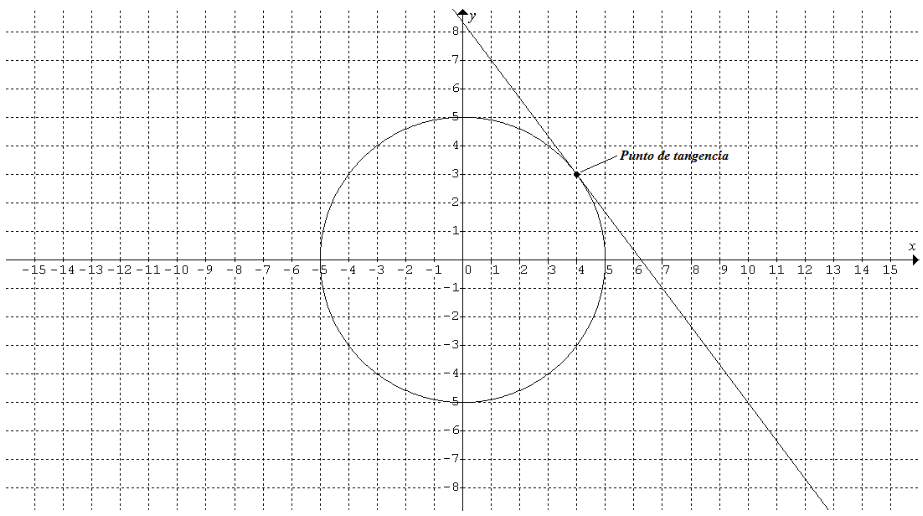


Figura 8

Después de haber presentado las figuras 7 y 8, hacer un análisis de lo que sucede algebraicamente en cada caso, como se describe a continuación.

Preguntar:

29. En el sistema graficado en la figura 7, la ecuación de la recta es $x + y = 3$, pero ¿cuál es la ecuación de la circunferencia?

En resumen, en la figura 7 está graficado el sistema de ecuaciones no lineal:

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ .... ecuación 1}$$
$$x + y = 3 \text{ .... ecuación 2}$$

Realizar lo siguiente:

Paso 1. Despejar la incógnita y de la ecuación de primer grado.

Paso 2. Sustituir el despeje del paso 1 en la ecuación de segundo grado.

Paso 3. Simplificar la ecuación obtenida en el paso 2. Llamarla ecuación 3.

$$2x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ .... ecuación 3}$$

Antes de resolver la ecuación 3, calcular su discriminante.

$$\text{discriminante} = -4$$

Como el valor del discriminante es negativo, la ecuación 3 no tiene raíces reales y en conclusión el sistema de ecuaciones es incompatible.

Por otro lado, en la figura 8 está graficado el sistema de ecuaciones no lineal:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ .... ecuación 1}$$
$$4x + 3y = 25 \text{ .... ecuación 2}$$

Paso 1. Despejar la incógnita y de la ecuación de primer grado.

$$y = \frac{25 - 4x}{3}$$

Paso 2. Sustituir el despeje del paso 1 en la ecuación de segundo grado.

$$x^2 + \left(\frac{25 - 4x}{3} \right)^2 = 4$$

Paso 3. Simplificar la ecuación obtenida en el paso 2, llamándola ecuación 3.

$$x^2+\left(\frac{625-200x+16x^2}{9}\right)=25$$

$$x^2+\frac{625-200x+16x^2}{9}-25=0$$

$$9x^2+625-200x+16x^2-225=0$$

$$25x^2-200x+400=0$$

$$x^2-8x+16=0 \text{ .... ecuación 3}$$

Antes de resolver la ecuación 3, calcular su discriminante.

discriminante $=0$

Dado que valor del discriminante es cero, la ecuación 3 solo tendrá una raíz real y en conclusión el sistema de ecuaciones es compatible y tiene solamente una solución.

Paso 4. Resolver la ecuación 3 para obtener a partir de su raíz real, la solución del sistema y verificar que está formada precisamente por las coordenadas del punto de tangencia de la recta con la circunferencia, que en la gráfica de la figura 9 se puede apreciar que es el punto $T(4,3)$.

EL PROBLEMA DE LOS NÚMEROS

Si el par de números x y y con $x>y$ son tales que:

a) La suma del doble del número mayor con el número menor es igual a -4.
b) Al agregar tres unidades al número menor se obtiene el cuadrado del número mayor.

¿Será verdad que el valor de x es igual al valor de x^y?

Preguntar:

30. ¿Cuáles son las ecuaciones que representan las condiciones de los incisos a y b, que deben cumplir los números del problema?

31. ¿Cómo encontrar dichos números?

Después de una breve discusión se deberá llegar al acuerdo de que los números buscados, deben satisfacer a las dos ecuaciones dadas en la respuesta de la pregunta **30**, en otras palabras, por la solución del sistema de ecuaciones no lineal de 2×2:

$$2x+y=-4 \text{ .... ecuación 1}$$
$$y+3=x^2 \text{ .... ecuación 2}$$

Como el sistema está conformado por una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado, proponer que se resuelva con el método de sustitución, de ser necesario sugerir pasos a efectuar.

Paso 1. Despejar la incógnita y de la ecuación de primer grado.

Paso 2. Sustituir el despeje del paso 1 en la ecuación de segundo grado.

Paso 3. Simplificar la ecuación obtenida en el paso 2 y llamarla ecuación 3.

$$x^2+2x+1=0 \text{ ...... ecuación 3}$$

Antes de resolver la ecuación 3, conviene calcular el valor de su discriminante.

$$\text{discriminante}=0$$

Preguntar:

32. Según el valor del discriminante, ¿qué se puede afirmar del sistema de ecuaciones?

Ahora sí, solicitar que se resuelva la ecuación 3 y verificar que se obtiene el valor $x=-1$.

Preguntar:

33. ¿Cuál será el valor para la incógnita y?

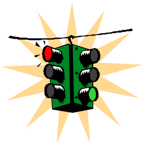
Pedir la comprobación de que la solución obtenida es correcta y la respuesta al problema de los números.

Se sugiere que a continuación se realice un análisis gráfico del problema.

De la ecuación $2x+y=-4$ ya no deberá existir duda alguna de que es una línea recta, pero la ecuación $y+3=x^2$, ¿qué figura geométrica será? Permitir que los alumnos hagan conjeturas con respecto a su gráfica.

Como el sistema de ecuaciones tiene solamente una solución, se puede afirmar, según lo expuesto en la sección anterior, que la recta $2x+y=-4$ debe de ser tangente a la figura geométrica correspondiente a la ecuación $y+3=x^2$.

Aunque en el curso de Matemáticas II ya se estudió éste tipo de relación, con la intención de evitar dificultades que entorpezcan el desarrollo de la propuesta, se plantea introducir el siguiente concepto clave:



Concepto clave:

24. La función cuadrática

a) Algebraicamente tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes con $a \neq 0$.

b) Geométricamente es una **parábola vertical** que es cóncava hacia arriba o es cóncava hacia abajo, dependiendo que $a > 0$ ó que $a < 0$, respectivamente.

c) Un punto importante es su vértice, cuya abscisa está dada por el valor de $x = -\frac{b}{2a}$. El valor de la ordenada y es la imagen del valor x de la abscisa.

Después de señalar que la ecuación 2 se puede escribir como $y = x^2 - 3$, los alumnos deberán aplicar este concepto clave a la ecuación 2 del sistema de ecuaciones para concluir lo siguiente:

a) La relación descrita en tal ecuación corresponde a una función cuadrática, pues tiene la forma descrita en el inciso **a** del concepto clave **24**, en este caso con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -3$.

b) Por el inciso **b** del mismo concepto clave, su gráfica debe ser una parábola vertical cóncava hacia arriba, porque el valor de a es positivo.

c) Por el inciso **c**, las coordenadas de su vértice son los valores:

$$x = -\frac{0}{(2)(1)} = -\frac{0}{2} = 0 \text{ y } y = 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3.$$

Para representar gráficamente el sistema de ecuaciones, indicar que para graficar la parábola tomen en cuenta los valores de la tabla siguiente, que primero deberán completar. Resaltar que se ha colocado al centro de ella a las coordenadas del vértice, y que a partir de él se han propuesto valores para la variable x, tres menores y tres mayores que el de la abscisa del vértice.

La gráfica del sistema se muestra en la figura 9, donde se puede ver que en efecto la recta es tangente a la parábola y que el punto de tangencia está dado por la solución que se obtuvo algebraicamente.

x	$y = x^2 - 3$	Punto
-3		A
-2		B
-1		C
0	-3	V
1		D
2		E
3		F

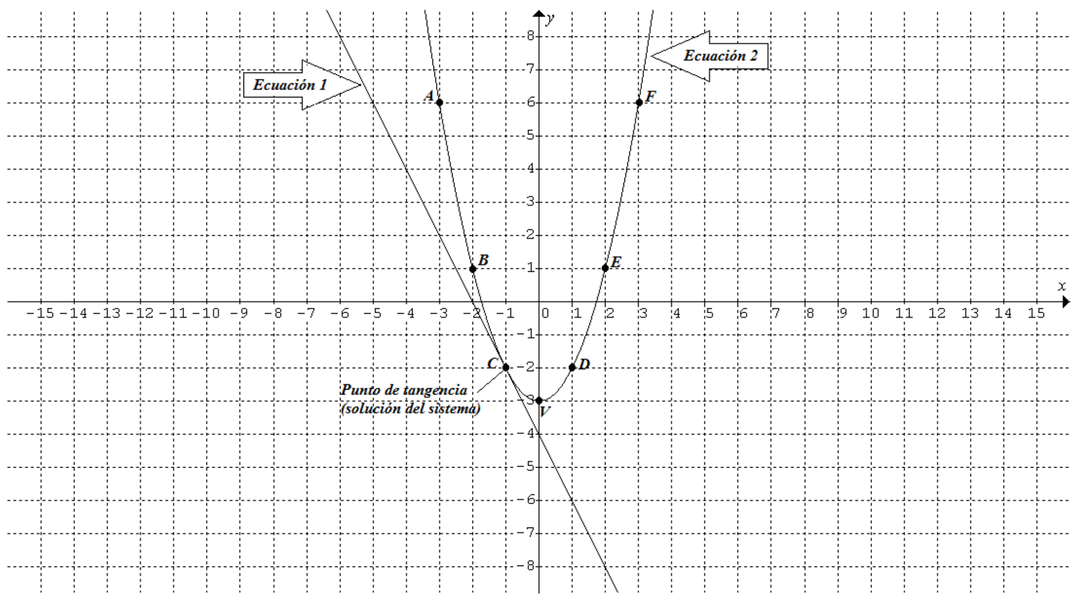


Figura 9

De manera semejante al caso de una recta con una circunferencia, si el sistema de ecuaciones no lineal de 2×2 está formado de una recta y una parábola, puede ocurrir lo siguiente:

a) Si no son ajenas, entonces el sistema es compatible y tendrá una o dos soluciones, según que la recta sea tangente o secante a la parábola, respectivamente.
b) Si son ajenas, entonces el sistema es incompatible.

Éstos hechos geométricos se relacionan con el registro algebraico de la manera siguiente:

a) El sistema será compatible y tendrá una o dos soluciones, dependiendo que el discriminante de la ecuación de segundo grado obtenida en el paso 3 del procedimiento algebraico expuesto sea igual a cero o positivo, respectivamente.
b) El sistema será incompatible, si el discriminante de la ecuación referida en el párrafo anterior sea negativo.

Preguntar:

34. ¿Por qué este tipo de sistemas jamás podrían ser dependientes?

Ejemplo

El sistema de ecuaciones no lineal que aparece a continuación ¿es compatible o incompatible? Responder utilizando el método gráfico y el método algebraico.

$$y-(x-5)^2=-2 \text{ .... ecuación 1}$$
$$3x+2y=1 \text{ .... ecuación 2}$$

Método gráfico:

La ecuación 2 es una línea recta, así que para graficarla completar, por ejemplo la tabla que sigue:

x	$y=\frac{1-3x}{2}$	Punto
-5		A
1		B
5		C

Preguntar:

35. La ecuación 1, ¿será una parábola?

Para responder desarrollar el binomio al cuadrado, despejar la incógnita y, y comparar con el concepto clave **24**.

Al hacer la comparación los alumnos verán que la relación dada en la ecuación 1, sí corresponde a una función cuadrática con $a = 1$, $b = -10$ y $c = 23$, por lo tanto su gráfica debe de ser una parábola vertical cóncava hacia arriba con vértice en el punto de coordenadas $x = 5$ y $y = -2$.

Para graficarla, completar la tabla siguiente:

x	$y = x^2 - 10x + 23$	Punto
2		D
3		E
4		F
5	-2	V
6		G
7		H
8		I

Preguntar:

36. ¿Qué sucedió con las figuras geométricas dibujadas, son o no son ajenas?

37. De la respuesta anterior, ¿qué se concluye respecto al sistema de ecuaciones?

Método algebraico:

Paso 1. Despejar la incógnita y de la ecuación 2, que es la de primer grado.

$$y = \frac{1-3x}{2}$$

Paso 2. Sustituir el despeje anterior en la ecuación 1, que es la de segundo grado.

$$\frac{1-3x}{2} - (x-5)^2 = -2$$

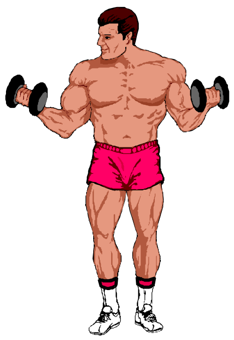
Paso 3. Simplificar la ecuación del paso 2, llamarla ecuación 3 y calcular el valor de su discriminante.

$$2x^2 - 17x + 45 = 0 \text{ .... ecuación 3}$$

$$\text{discriminante} = (-17)^2 - (4)(2)(45) = -71$$

Preguntar:

38. El valor del discriminante, ¿qué dice acerca de las raíces de la ecuación 3 y en consecuencia del sistema de ecuaciones?



Ejercicio 2

Decidir algebraicamente si la recta $4x + y = 2$ es tangente, secante o ajena a la parábola $4x + y = x^2 + 1$. Si es tangente, encuentra las coordenadas del punto de tangencia, o si es secante, encuentra las coordenadas de los puntos donde se intersectan.

Hasta el momento el sistema de ecuaciones no lineal ha estado formado por una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado, a continuación analizar qué se puede hacer, si las ecuaciones del sistema son ambas de segundo grado.

EL PROBLEMA DE LAS PARÁBOLAS

En la figura 10 están graficadas las parábolas de ecuaciones $2x^2 + 4x + y = 1$ y $x^2 - 2x - y = 1$, encontrar las coordenadas exactas de los puntos A y B donde se intersectan.

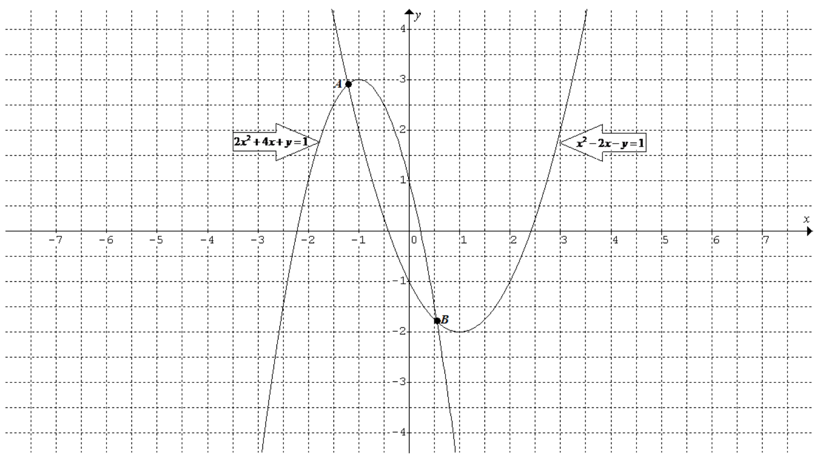


Figura 10

Señalar que aunque se podría dar de la gráfica una aproximación de las coordenadas de los puntos donde las parábolas se intersectan, interesa averiguar exactamente su posición, así que preguntar:

39. ¿Qué hacer para encontrar la posición exacta de los puntos A y B en la gráfica?

Es altamente posible que los alumnos respondan que resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las parábolas trazadas, que es el siguiente sistema de ecuaciones no lineal:

$$2x^2 + 4x + y = 1 \text{ .... ecuación 1}$$
$$x^2 - 2x - y = 1 \text{ .... ecuación 2}$$

Preguntar:

40. ¿Cómo se podría reducir el número de ecuaciones y a la vez eliminar la variable y?

La respuesta esperada es que sea aplicando el método de suma o resta.

Por ejemplo, realizando las operaciones $(1)(\text{ecuación 1}) + (1)(\text{ecuación 2})$, el resultado es la ecuación $3x^2 + 2x + 0 = 2$, equivalente a la ecuación siguiente:

$$3x^2 + 2x - 2 = 0 \text{ .... ecuación 3}$$

Pedir que se calcule el valor de su discriminante.

Como es positivo, la ecuación tiene dos raíces reales diferentes que son exactamente los valores: $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ y $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$

Estos valores son las abscisas exactas de los puntos A y B.

Preguntar:

41. ¿Cuál es el valor de la abscisa del punto A y cuál del punto B?

Indicar que para encontrar las ordenadas correspondientes, se deberá sustituir cada valor x en la ecuación que resulte de despejar de alguna de las ecuaciones del sistema a la variable y. Por ejemplo despejándola de la ecuación 2, se obtiene que $y = x^2 - 2x - 1$.

Los alumnos encontraran los valores exactos de las ordenadas de los puntos y quien imparte el curso vigilará que se obtienen los valores correctos, que se muestran en la tabla siguiente:

Para $x=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$	Para $x=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$
$y=\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)^2-(2)\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)-1$ $y=\dfrac{8-2\sqrt{7}}{9}-\dfrac{-2+2\sqrt{7}}{3}-1$ $y=\dfrac{14-8\sqrt{7}}{9}-1$ $y=\dfrac{5-8\sqrt{7}}{9}$	$y=\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)^2-(2)\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)-1$ $y=\dfrac{8+2\sqrt{7}}{9}-\dfrac{-2-2\sqrt{7}}{3}-1$ $y=\dfrac{14+8\sqrt{7}}{9}-1$ $y=\dfrac{5+8\sqrt{7}}{9}$

En consecuencia, las soluciones exactas al sistema de ecuaciones son:

Solución 1: $x=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ y $y=\dfrac{5-8\sqrt{7}}{9}$

Solución 2: $x=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$ y $y=\dfrac{5+8\sqrt{7}}{9}$

Antes de dar la respuesta al problema, se deberá verificar que las soluciones obtenidas son correctas.

a) Para la solución 1:

Sustituyendo y simplificando en la ecuación 1:

$$(2)\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)^2+(4)\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)+\frac{5-8\sqrt{7}}{9}=1$$

$$\frac{16-4\sqrt{7}}{9}+\frac{-4+4\sqrt{7}}{3}+\frac{5-8\sqrt{7}}{9}=1$$

$$\frac{4+8\sqrt{7}}{9}+\frac{5-8\sqrt{7}}{9}=1$$

$$1=1$$

Conclusión 1: La solución1 satisface a la ecuación 1.

Sustituyendo y simplificando en la ecuación 2:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)^2-(2)\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)-\frac{5-8\sqrt{7}}{9}=1$$

$$\frac{8-2\sqrt{7}}{9}-\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}-\frac{5-8\sqrt{7}}{9}=1$$
$$\frac{14-8\sqrt{7}}{9}-\frac{5-8\sqrt{7}}{9}=1$$
$$1=1$$

Conclusión 2: La solución 1 satisface a la ecuación 2.

b) Para la solución 2:

Sustituyendo y simplificando en la ecuación 1:

$$(2)\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)^2+(4)\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)+\frac{5+8\sqrt{7}}{9}=1$$
$$\frac{16+4\sqrt{7}}{9}+\frac{-4-4\sqrt{7}}{3}+\frac{5+8\sqrt{7}}{9}=1$$
$$\frac{4-8\sqrt{7}}{9}+\frac{5+8\sqrt{7}}{9}=1$$
$$1=1$$

Conclusión 3: La solución 2 satisface a la ecuación 1.

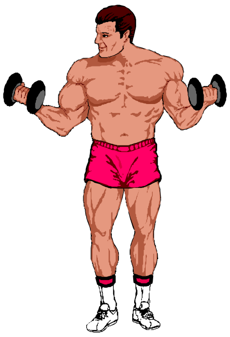
Sustituyendo y simplificando en la ecuación 2:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)^2-(2)\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)-\frac{5+8\sqrt{7}}{9}=1$$
$$\frac{8+2\sqrt{7}}{9}-\frac{-2-2\sqrt{7}}{3}-\frac{5+8\sqrt{7}}{9}=1$$
$$\frac{14+8\sqrt{7}}{9}-\frac{5+8\sqrt{7}}{9}=1$$
$$1=1$$

Conclusión 4: La solución 2 satisface a la ecuación 2.

Las conclusiones 1, 2, 3 y 4 anteriores demuestran que el par de soluciones encontradas son las correctas, ya que satisfacen a las dos ecuaciones del sistema, así que las coordenadas exactas de los puntos donde se intersectan las parábolas del problema son:

$$A\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3},\frac{5+8\sqrt{7}}{9}\right) \text{ y } B\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3},\frac{5-8\sqrt{7}}{9}\right).$$



Ejercicio 3

En la resolución del sistema de ecuaciones no lineal del problema de las parábolas, para reducir el número de ecuaciones y eliminar la incógnita y, se utilizó el método de suma o resta, pero pudimos haber utilizado el método de sustitución o el método de igualación y haber obtenido la misma ecuación 3, $3x^2+2x-2=0$. Checar que es verdadera la afirmación anterior, según lo indicado en cada inciso.

a) Con el método de sustitución, despejar la incógnita y de la ecuación 1, sustituir el despeje en la ecuación 2 y simplificar.
b) Con el método de igualación, despejar la incógnita y de ambas ecuaciones, igualar los despejes y simplificar.

EL PROBLEMA DE LA ELECCIÓN DEL MÉTODO

Encontrar las soluciones exactas del siguiente sistema de ecuaciones no lineal.

$x^2+y^2=4$ .... ecuación 1

$-x^2+2y=-5$ .... ecuación 2

a) Con el método gráfico:

Preguntar:

42. ¿Qué figura geométrica le corresponde a la ecuación 1?
43. ¿Qué figura geométrica le corresponde a la ecuación 2?

Los alumnos trazaran la gráfica del sistema, y se darán cuenta que aunque se ve que el sistema tiene dos soluciones, es difícil encontrar las posición exacta de los puntos de intersección de la circunferencia con la parábola, como se muestra en la figura 11. Por lo tanto, el método gráfico no es conveniente para resolver el sistema.

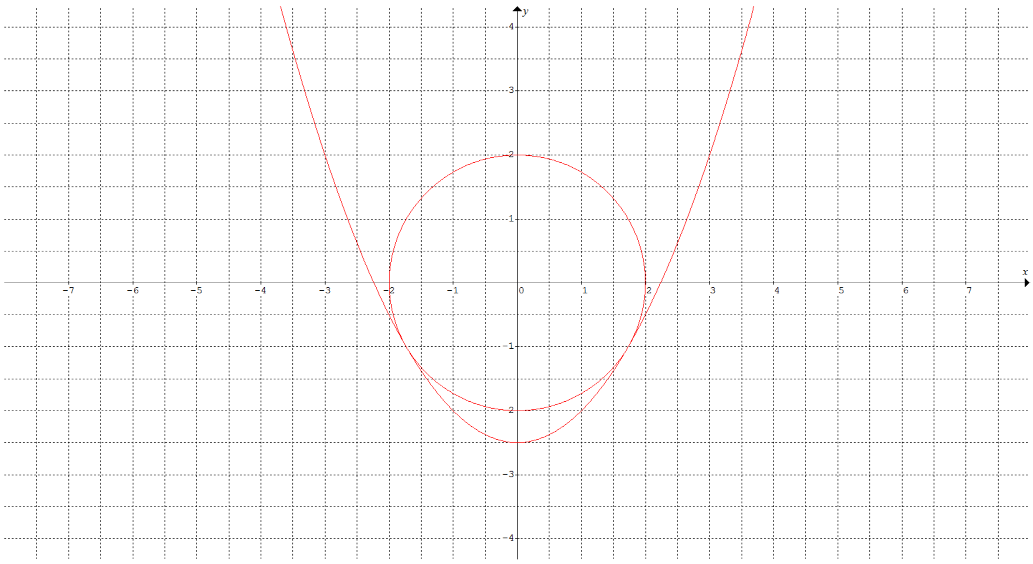


Figura 11

Para en el caso de los métodos algebraicos, quien imparte el curso deberá orientar cómo utilizar cada uno de ellos, proponiendo pasos a seguir, permitiendo que los alumnos los lleven a cabo y resolviendo en la marcha las dificultades que se puedan presentar.

b) Con el método de suma o resta.

Con el propósito eliminar el cuadrado de la incógnita x y reducir el sistema a una sola ecuación, realizar las operaciones $(1)(\text{ecuación }1)+(1)(\text{ecuación }2)$.

Preguntar:

44. ¿Cuál es la ecuación que se obtiene de las operaciones anteriores?

45. Según el valor de su discriminante, ¿cuántas raíces reales tiene?

46. ¿Cuál es su valor?

Ahora sustituir el valor $y=-1$, en la ecuación 1 y resolver la ecuación que resulte.

Preguntar:

47. ¿Cuál es la ecuación que resulta de la sustitución?

$$x^2+(-1)^2=4$$
$$x^2+1=4$$
$$x^2=3$$
$$x=\pm\sqrt{3}$$

Proponer que se realice la sustitución de $y=-1$ en la ecuación 2 y resolver la ecuación resultante, para verificar que se obtienen los mismos valores para la incógnita x.

Conclusión: El sistema de ecuaciones tiene dos soluciones y son:

Solución 1: $x=\sqrt{3}$ y $y=-1$

Solución 2: $x=-\sqrt{3}$ y $y=-1$

c) Con el método de sustitución.

Es importante resaltar que la incógnita x está elevada al cuadrado en ambas ecuaciones, mientras que la incógnita y está elevada al cuadrado solamente en una de las ecuaciones, por esta razón conviene despejar a x^2 de alguna de las ecuaciones, por ejemplo de la ecuación 1, que se identificará como ecuación 3, y luego sustituirla en la ecuación 2.

De la ecuación 1: $x^2=4-y^2$ .... ecuación 3

Sustituyendo en la ecuación 2: $-\left(4-y^2\right)+2y=5$

Simplificando:

$$\begin{aligned} -4+y^2+2y&=-5 \\ -4+y^2+2y+5&=0 \\ y^2+2y+1&=0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación es la misma que se obtuvo con el método de suma o resta y se sabe que tiene solamente la raíz real $y=-1$.

Por último sustituir el valor $y=-1$ en la ecuación 3 y resolver la ecuación que resulte.

$$\begin{aligned} x^2&=4-(-1)^2 \\ x^2&=4-1 \\ x^2&=3 \\ x&=\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Conclusión: El sistema de ecuaciones tiene dos soluciones y son:

Solución 1: $x=\sqrt{3}$ y $y=-1$

Solución 2: $x=-\sqrt{3}$ y $y=-1$

d) Con el método de igualación.

Por la misma razón dada en el método de sustitución, despejar a x^2 de ambas ecuaciones.

De la ecuación 1: $x^2 = 4 - y^2$ .... ecuación 3

De la ecuación 2: $x^2 = 5 + 2y$ .... ecuación 4

Igualando las ecuaciones 3 y 4, y simplificando:

$$4 - y^2 = 5 + 2y$$
$$4 - y^2 - 5 - 2y = 0$$
$$-y^2 - 2y - 1 = 0$$
$$y^2 + 2y + 1 = 0$$

Misma ecuación que con los métodos anteriores, de la cual $y = -1$

Por último sustituimos el valor $y = -1$ en la ecuación 3 ó en la ecuación 4, por ejemplo hagámoslo en la ecuación 4.

$$x^2 = 5 + (2)(-1)$$
$$x^2 = 5 - 2$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Conclusión: El sistema de ecuaciones tiene dos soluciones y son:

Solución 1: $x = \sqrt{3}$ y $y = -1$

Solución 2: $x = -\sqrt{3}$ y $y = -1$

Resaltar que no siempre se llega a la misma ecuación, y que el éxito o fracaso en la resolución del sistema depende de la elección realizada.

Ilustrar la anterior afirmación, por ejemplo con lo siguiente:

Si en el método de sustitución se hubiera decidido despejar la incógnita y de la ecuación 2 y luego sustituir el despeje en la ecuación 1, sucedería lo siguiente:

De la ecuación 2: $y = \dfrac{-5 + x^2}{2}$

Sustituir en la ecuación 1: $x^2 + \left(\dfrac{-5 + x^2}{2}\right)^2 = 4$

Simplificar:

$$x^2 + \frac{25 - 10x^2 + x^4}{4} = 4$$

$$4x^2 + 25 - 10x^2 + x^4 = 16$$

$$4x^2 + 25 - 10x^2 + x^4 - 16 = 0$$

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$$

Se ha conseguido una ecuación de ¡**cuarto grado**! que se debería de resolver, pero de momento se estaría "atado de manos" para continuar con la resolución del sistema, ya que hasta el momento no se cuentan con los conocimientos necesarios para hacerlo, y es hasta la primera unidad de Matemáticas IV donde se estudian los procesos para resolver ecuaciones algebraicas de grado superior a dos.

Queda a decisión de quien imparte el curso resolver la ecuación con el artificio matemático "cambio de variable", que es adecuado utilizar cuando la ecuación es de la forma $ax^4 + cx^2 + e = 0$, con la intensión de mostrar a los alumnos que la solución del sistema es la misma.

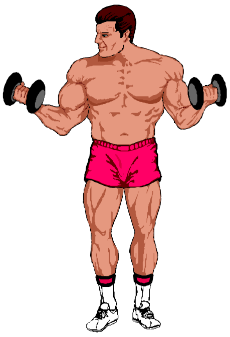
Al hacer el cambio de variable $z = x^2$ se obtiene la ecuación de segundo grado $z^2 - 6z + 9 = 0$ la cual tiene solamente una raíz real que es $z = 3$.

Como se ha considerado que $z = x^2$, entonces $x = \pm\sqrt{z}$.

Retornando a la variable original se tiene que como $z = 3$, entonces $x = \pm\sqrt{3}$.

Por lo tanto, las raíces de la ecuación $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ son precisamente $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$. Y la solución al sistema sigue siendo la misma.

Con lo anterior concluir que si la elección hecha conduce a un problema más difícil de resolver, se deberá de optar por alguna otra. También es conveniente aclarar que las figuras geométricas correspondientes a las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas que se han expuesto, no son todas, pues hay más como podrán constatarlo en las dos últimas unidades del curso.



Ejercicio 4

En las figuras 12 y 13 están, respectivamente, las gráficas de los sistemas de ecuaciones no lineales:

$$\begin{array}{ll} y^2 = 8x \text{ ...... ecuación 1} \\ 2x - y = 8 \text{ ...... ecuación 2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ll} x^2 - 4y = 0 \text{ ...... ecuación 1} \\ x^2 + y^2 = 32 \text{ ...... ecuación 2} \end{array}$$

Demostrar algebraicamente que las soluciones son las que se aprecian en las gráficas.

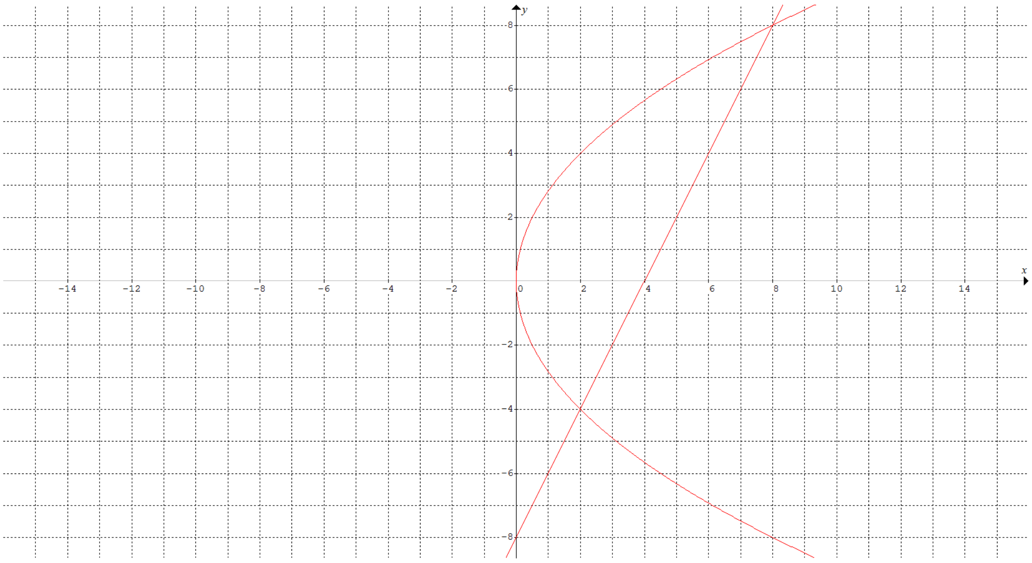


Figura 12

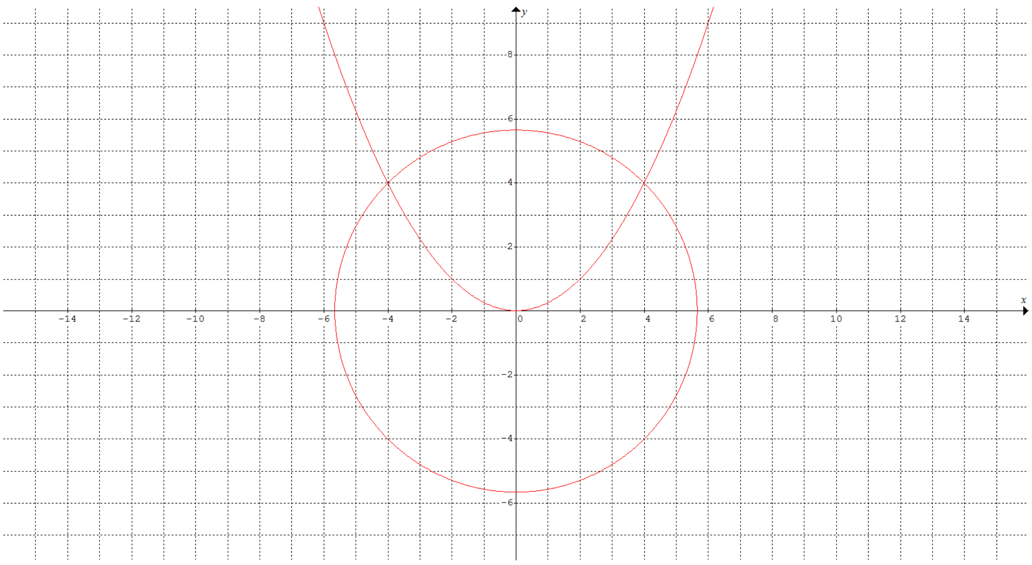


Figura 13

Ejercicio 5

En la figura 14 están las gráficas de las ecuaciones $y = x^2 - 2x + 1$ y $x + \sqrt{y} = 5$. Encontrar las coordenadas del punto A.

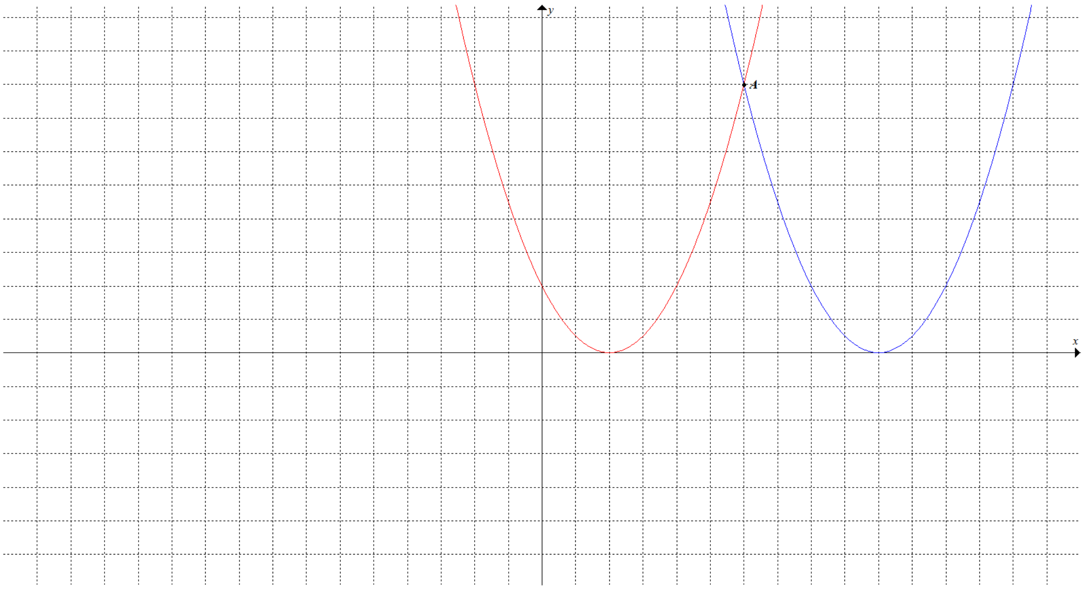


Figura 14

Por último, es adecuado comentar que como se habrá observado a lo largo de la propuesta, lo trascendental en todo el proceso de búsqueda a la solución de los problemas planteados al inicio de cada sección, es que el alumno participe activamente. No solamente fue importante llegar a una solución, sino que también se promueve la habilidad para resolver de manera independiente problemas en general, por lo tanto en la estrategia de enseñanza y aprendizaje se da prioridad al desarrollo de procesos del pensamiento matemático, evitando la sola transferencia de contenidos, para lo cual resulta necesario planear las tareas, las actividades y las preguntas que posibiliten la resolución de los problemas y la construcción de nuevos conocimientos, que insistimos, debe destacar la participación activa de los estudiantes, apoyados por parte del profesor o profesora para ayudarlos a pensar y orientarlos hacia una solución.