UNIDAD 5: LA PARÁBOLA Y SU ECUACION CARTESIANA

UNIDAD 5. LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA.

Propósitos: Consolidar el manejo del método analítico a través del estudio de la ecuación de la parábola. Avanzar en el reconocimiento de formas, estructuras y procedimientos, al resolver diversos problemas que involucren yanto a la parábola como a otros lugares geométricos ya vistos.

INTRODUCCIÓN.

Cuando un plano paralelo a una de las generatrices de un cono intersecta a esta superficie, se forma una sección parabólica.

Las secciones o cortes transversales de la luz que emana de un faro delantero de un automóvil son parábolas con la fuente luminosa localizada en el foco. Toda la luz que proviene que proviene del foco se refleja hacia adelante, paralela al eje de simetría.

Los radares y las antenas de radio pueden tener secciones transversales que son parábolas. Las ondas de radio que llegan son concentradas en el foco.

Algunos cometas tienen órbitas parabólicas.

Los cables que cuelgan en los puentes de suspensión forman parábolas. Cuando un cable sostiene solo un peso, no forman parábolas, sino una curva llamada catenaria.

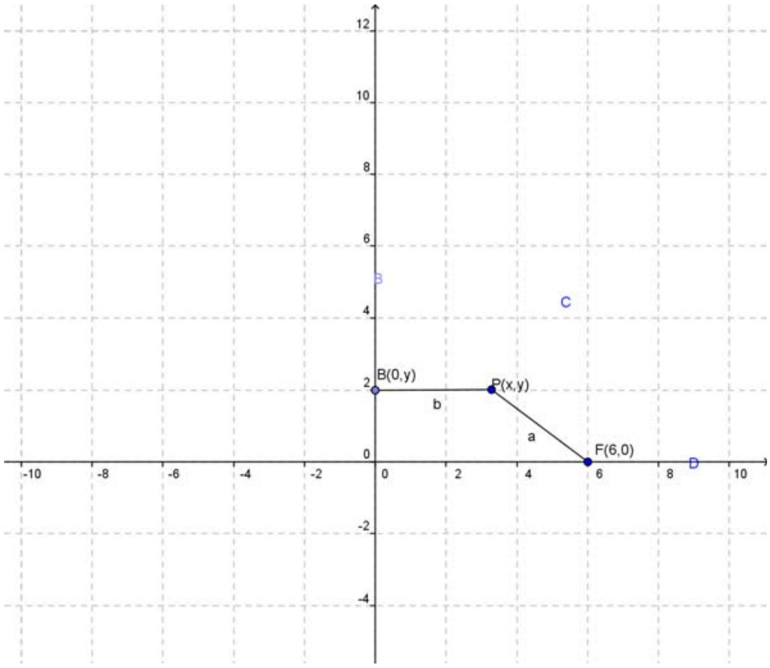
A continuación proponemos problemas cuyo planteo originan ecuaciones de parábolas.

1. Encuentre la ecuación de la trayectoria de un punto que se mueve en un plano de tal manera que equidista del punto F(6,0) y del eje Y.

   SOLUCIÓN.

   Consideremos un punto cualesquiera $P(x,y)$ en el plano y localizar el punto F(6,0). Equidista significa “distancias iguales”.

FIGURA.



Aplicando la propiedad del problema determinamos que:

$$d(P,F) = d(P,B)$$

Utilizando distancia entre dos puntos y sustituyendo coordenadas:

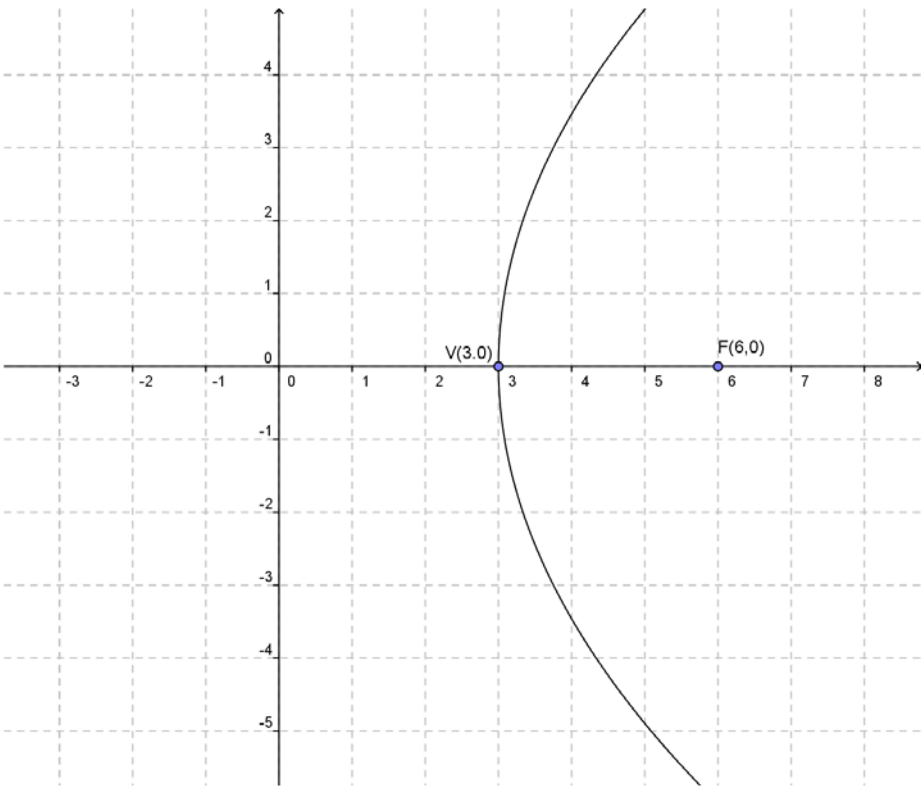
$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2} = \sqrt{y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando obtenemos:

$$y^2 - 12x + 36 = 0$$

Utilizando Geogebra representamos la gráfica



La gráfica representa a una parábola con eje de simetría horizontal con vértice fuera del origen $V(3,0)$ y foco $F(6,0)$.

La ecuación obtenida está representada en su forma general. ¿Cuál es la forma ordinaria de esta?

La ecuación obtenida también se puede expresar de la siguiente manera:

$$y^2 = 12x - 36$$

$$(y-0)^2 = 12(x-3)$$

La ecuación obtenida está expresada en su forma ordinaria.

En este caso la ecuación tiene la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Relacionando esta ecuación con la obtenida:

$h=3$, $k=0$ entonces, el vértice es:

$$V(h,k) = V(3,0)$$

$$4p = 12$$

$$p = 3$$

También podemos afirmar que la distancia del vértice es $VF = |p| = |3| = 3$

Si aplicamos la ecuación $x = -p + h$, determinamos la ecuación de la directriz:

$$x = -3 + 3$$
$$x = 0$$

En la gráfica la directriz es el eje Y.

El lado recto de la parábola es el segmento perpendicular al eje de simetría y que pasa por el foco.
La longitud del lado recto es:

$$L.R. = |4p| = |12|$$

Establecemos que los elementos de la parábola son: Vértice, foco, directriz y la longitud del lado recto.

Ahora asignemos un valor a x, por ejemplo $x = 5$ sustituimos en la ecuación

$$y^2 - 12x + 36 = 0$$

Obtenemos,

$$y^2 = 24$$

Resolviendo la ecuación:

$$y = \pm\sqrt{24}$$

Resultan dos raíces: $y_1 = \sqrt{24}$ y $y_2 = -\sqrt{24}$

Hemos determinamos dos puntos: $P(5,\sqrt{24})$ **y** $Q(5,-\sqrt{24})$ **que son puntos de la parábola.**

Ahora consideremos en la figura del problema los puntos: $P(5,\sqrt{24})$, $F(6,0)$ y $B(0,\sqrt{24})$. Demuestre que $d(P,F) = d(P,B)$.

Aplicando distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(5-6)^2 + (\sqrt{24}-0)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + (\sqrt{24}-\sqrt{24})^2}$$

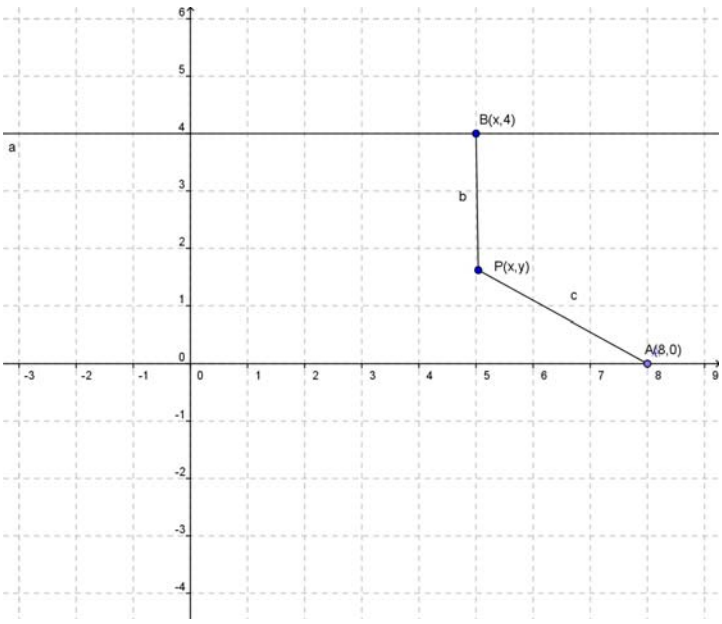
$$\sqrt{1+24} = \sqrt{25}$$

$$\therefore 5 = 5$$

Se cumple la propiedad geométrica del problema. De la misma manera se cumple utilizando los puntos $Q(5,-\sqrt{24})$, $F(6,0)$ y $B(0,\sqrt{24})$.

En general cualquier punto de la parábola hace válida esta propiedad.

2. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidista del punto $A(8,0)$ y la recta $y=4$.
FIGURA



Por la propiedad geométrica del problema expresamos que

$$d(P,A)=d(P,B)$$

Sustituyendo en la Fórmula de distancia:

$$\sqrt{(x-8)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-4)^2}$$

Desarrollando:

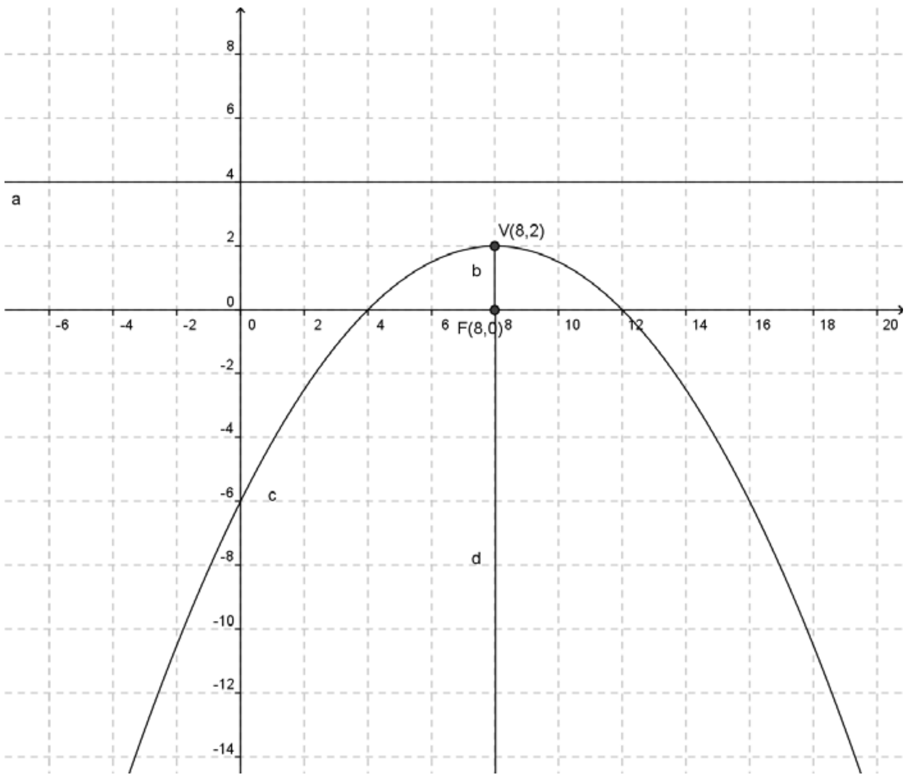
$$\sqrt{x^2-16x+64+y^2}=\sqrt{y^2-8y+16}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando:

$$x^2-16x+8y+48=0$$

En este caso determinamos la ecuación de una parábola con eje de simetría vertical con vértice fuera del origen. La ecuación está expresada en su forma general. ¿Cómo se representa la ecuación general de la parábola vertical?

GRÁFICA



La parábola es vertical y abre hacia abajo. Reduciremos su ecuación a su forma ordinaria.

$$x^2 - 16x = -8y - 48$$

Completando cuadrados:

$$x^2 - 16x + 64 = -8y - 48 + 64$$

$$x^2 - 16x + 64 = -8y + 16$$

$$\therefore (x-8)^2 = -8(y-2)$$

La ecuación está expresada en su forma ordinaria. La cual se representa de la siguiente manera:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

En la que (h,k) son las coordenadas del vértice o sea

$$V(h,k) = V(8,2).$$

$$4p = -8$$
$$p = -2$$
$$p = d(V,F) = |-2|$$

Si $h = 8$, $k = 2$ y $p = -2$ las coordenadas del foco son:

$$F(h, k+p) = F(8, 2-2)$$

$$F(8,0)$$

La longitud del lado recto es $L.R. = |4p|$, en este caso:

$$L.R. = |-8| = 8$$

La ecuación de la directriz se obtiene aplicando:

$$y = -p + k$$

Sustituyendo:

$$y = -(-2) + (2)$$

$$\therefore y = 4$$

Que es la ecuación dada en el problema. Es la directriz.

Ahora consideremos la ecuación obtenida $x^2 - 16x + 8y + 48 = 0$. Y también que $x = 14$. Al sustituir en la ecuación tenemos:

$$196 - 224 + 8y + 48 = 0$$
$$8y = -20$$
$$y = -\frac{5}{2}$$

Hemos determinado un punto de la parábola $P(14, -\frac{5}{2})$

Regresando a la figura de este problema si $P(14,-\frac{5}{2})$, $A(8,0)$ y $B(14,4)$. Demostrar que $d(P,A)=d(P,B)$.

Utilizando distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(14-8)^2+(-\frac{5}{2}-0)^2}=\sqrt{(14-14)^2+(-\frac{5}{2}-4)^2}$$

$$\therefore \frac{169}{4}=\frac{169}{4}$$

Se cumple que las distancias son iguales. Se cumple la propiedad del problema. En general se cumplirá que cualquier punto la parábola equidista del foco y de la directriz.

Con esta información podemos resumir que al aplicar la propiedad geométrica del enunciado: “distancia del punto a la recta” obtuvimos la ecuación de una parábola. ¿Cómo se define a la parábola?

Definición. El lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que equidista de un punto fijo (foco) y una recta fija (directriz) es una parábola.

Ejercicio 1. Encuentre las coordenadas de los puntos de intersección de esta parábola con los ejes coordenados.

Ejercicio 2. Reduzca la ecuación $(y-k)^2=4p(x-h)$ a su forma general.

Ejercicio 3. Reduzca la ecuación $(x-h)^2=4p(y-k)$ a su forma general.

Ejercicio 4. Encuentre la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia al eje Y es igual a su distancia al punto $A(0,5)$. Trace la gráfica.

Ejercicio 5. Encuentre la ecuación de la trayectoria del punto que se mueve en el plano tales que la distancia a la recta $x-3=0$ es igual a la distancia al punto $A(4,-2)$.

Ahora consideremos la ecuación de la parábola horizontal en su forma ordinaria:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

Si el vértice de la parábola está en el origen, es decir, $V(h,k)=V(0,0)$, entonces la ecuación se reduce a:

$$y^2 = 4px$$

Las coordenadas del foco $F(h+p,k)$, se reduce a:

$$F(p,0)$$

La ecuación de la directriz $x=-p+h$, se reduce a:

$$x=-p$$

La longitud del lado recto sigue siendo: $L.L.R=|4p|$

Ahora si consideramos que es una parábola vertical con vértice en el origen, realizando lo anterior la ecuación se reduce a:

$$x^2 = 4py$$

El foco de la parábola es:

$$F(0,p)$$

La ecuación de la directriz es:

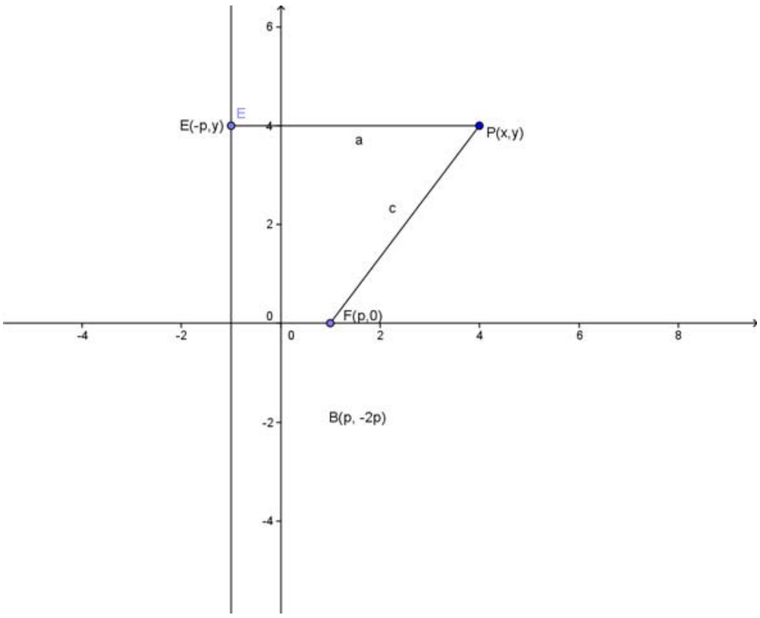
$$y=-p$$

La longitud del lado recto es $L.L.R=|4p|$

Ahora, encuentre la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidista del punto $F(p,0)$ y la recta $x=-p$.

SOLUCIÓN:

FIGURA.



De acuerdo a la propiedad del enunciado:

$$d(P,F) = d(P,E)$$

Sustituyendo:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

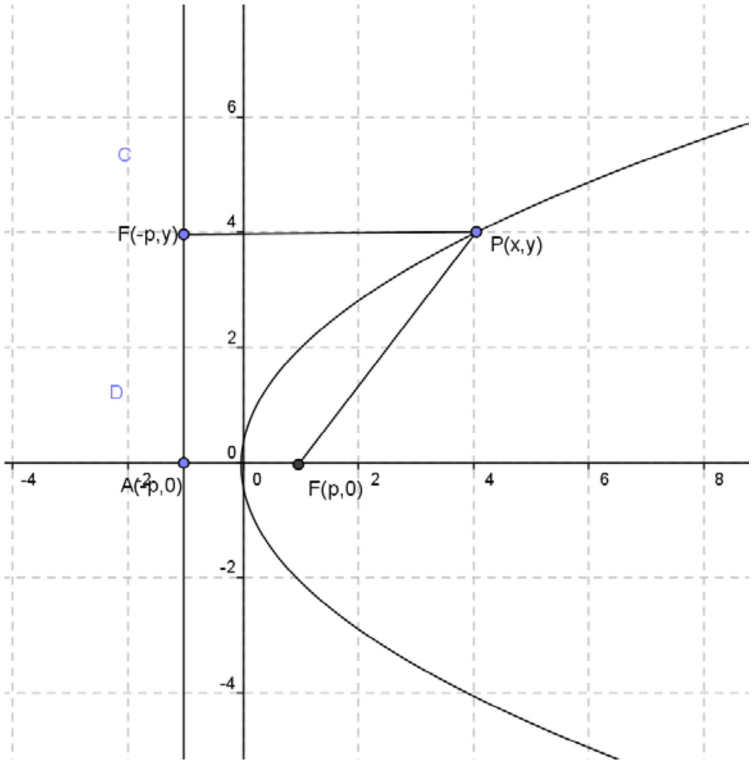
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Simplificando obtenemos la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen:

$$y^2 = 4px$$

Podemos observar que es la misma ecuación reducida de forma ordinaria considerando $V(h,k) = V(0,0)$.

GRÁFICA



De esta misma manera se deduce la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen considerando: $P(x,y)$, $F(0,p)$ y $y=-p$. Se deja como **ejercicio al alumno.**

Haciendo un resumen de lo tratado acerca de la parábola podemos establecer que:

1. Parábola es lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que **equidista** de un punto fijo llamado **foco** y una recta fija llamada **directriz.**

2. Cualquier punto de la parábola esta a igual distancia del foco y de la directriz.

3. Para toda parábola la distancia del vértice al foco es la medida p

4. El vértice de la parábola equidista del foco y la directriz.

5. El segmento perpendicular al eje de la parábola que pasa por el foco se llama **lado recto** y su longitud es $|4p|$.

6. La ecuación del eje de la parábola vertical con vértice fuera del origen es $x=h$.

7. La ecuación del eje de la parábola horizontal con vértice fuera del origen es $y = k$.

LA PARÁBOLA:.ECUACIÓN Y ELEMENTOS.

	Vértice	**Ecuación**	**Foco**	**Directriz**	**L.L.R.**
Horizontal	$V(h,k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$F(h+p,k)$	$x = -p + h$	$\lvert 4p \rvert$
Horizontal	$V(0,0)$	$y^2 = 4px$	$F(p,0)$	$x = -p$	$\lvert 4p \rvert$
Vertical	$V(h,k)$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$F(h,k+p)$	$y = -p + k$	$\lvert 4p \rvert$
Vertical	$V(0,0)$	$x^2 = 4py$	$F(0,p)$	$y = -p$	$\lvert 4p \rvert$

Ejemplos ilustrativos. Determine el vértice, el foco y la longitud del lado recto. Trace la gráfica.

1. $y^2 - 14y + 4x + 45 = 0$

Reduciremos la ecuación dada en su forma general a su forma ordinaria.

$$y^2 - 14y = -4x - 45$$

Completando cuadrados obtenemos.

$$(y-7)^2 = -4(x-1)$$

La ecuación tiene la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Por lo tanto,

$$V(h,k) = V(1,7)$$

$$4p = -4$$

$$p = -1$$

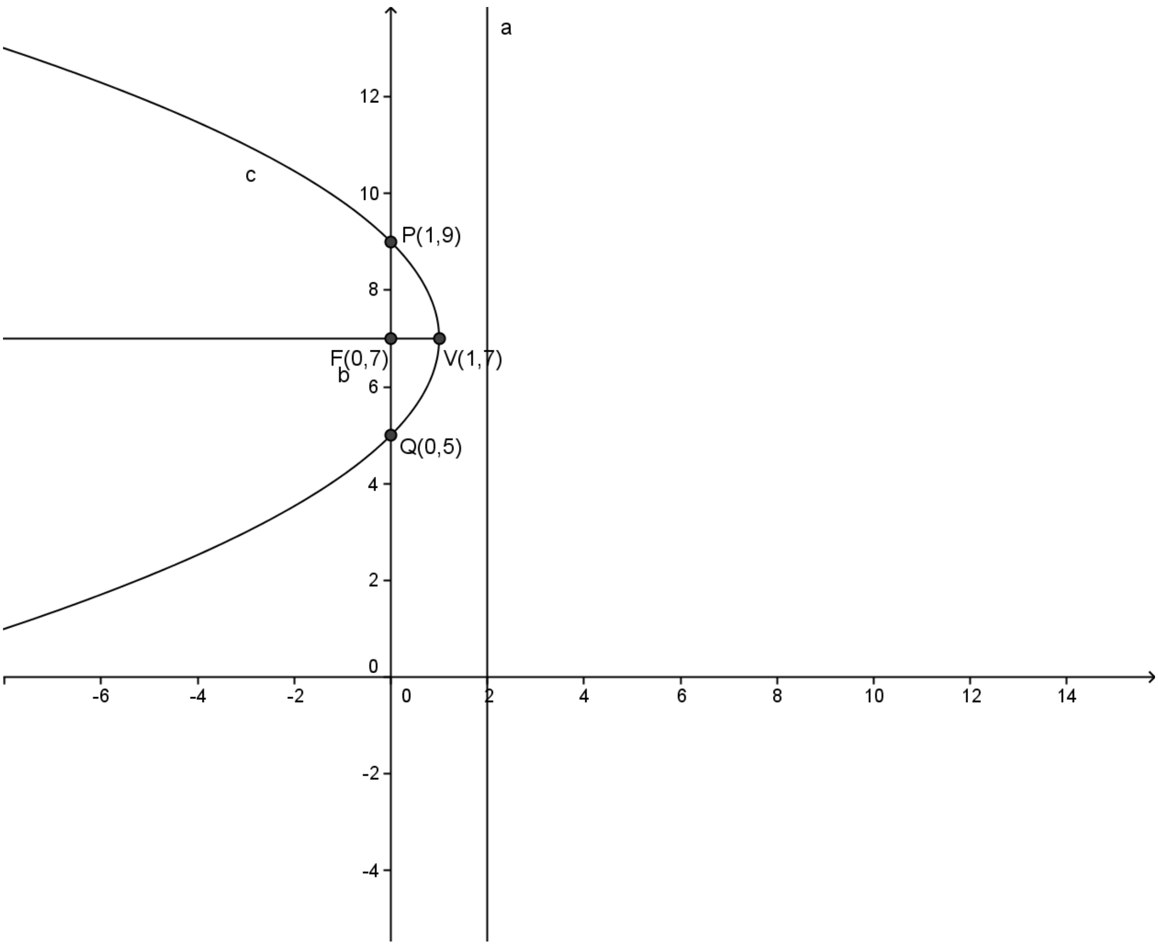
Tenemos que, $h = 1$, $k = 7$ y $p = -1$ utilizando estos valores para determinar foco, directriz y longitud de lado recto.:

$$F(h+p,k)=F(1+(-1),7)\ \therefore F(0,7)$$

$$x=-p+h \quad x=-1+(-1) \quad x=-(-1)+1 \quad \therefore x=2$$

$$L.L.R=|4p|=|-4|=4$$

GRÁFICA



2. $x^2+20y=10$

$x^2=-20y+10$

Completando cuadrado y factorizando:

$$(x-0)^2=-20(y-\frac{1}{2})$$

La ecuación tiene la forma ordinaria: $(x-h)^2=4p(y-k)$

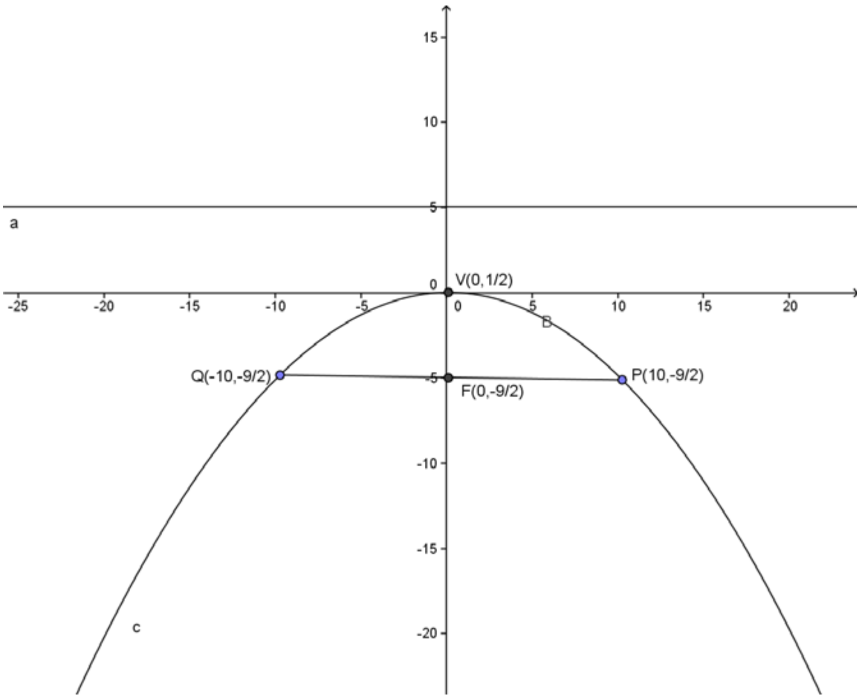
De lo anterior, el vértice es $V(h,k)=V(0,\frac{1}{2})$ y $p=-5$

El foco es: $F(0,-\frac{9}{2})$

Ecuación de la directriz es: $y=\frac{11}{2}$

La longitud del lado recto es $L.L.R=\left|-20\right|=20$

GRÁFICA



3. $x^2=3y$

La ecuación tiene la forma $x^2=4py$**, entonces** $4p=3$

$$p=\frac{3}{4}$$

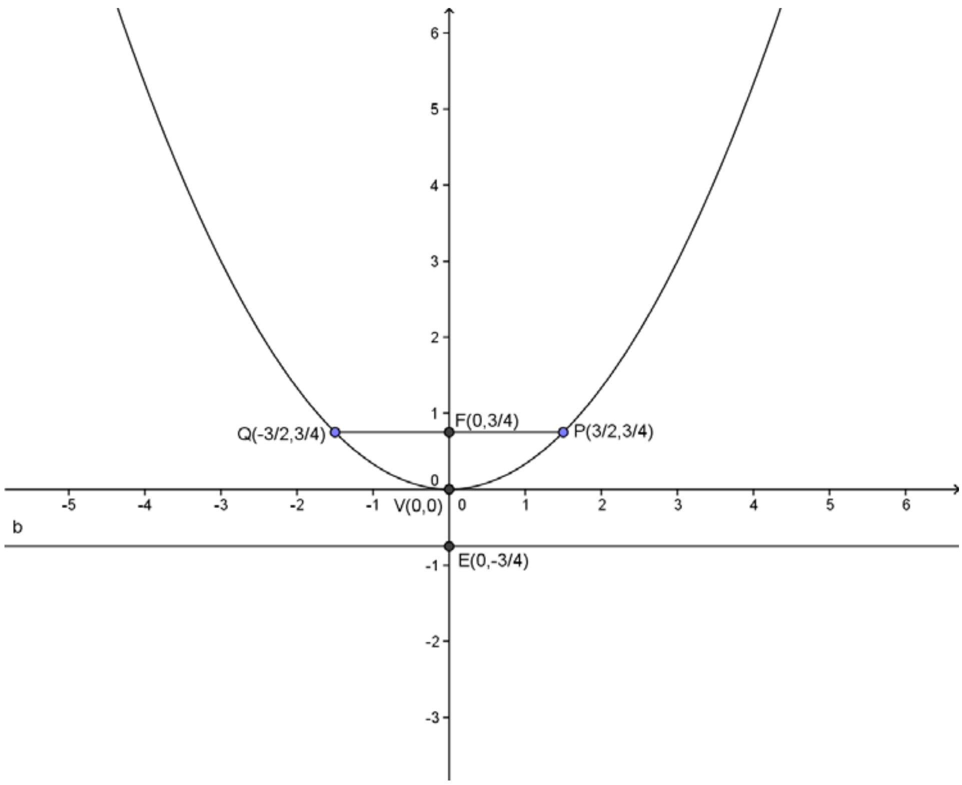
Como la ecuación representa a una parábola vertical con vértice en el origen, entonces $V(0,0)$ y:

$$F(0,p)=F(0,\frac{3}{4})$$

La ecuación de la directriz es: $y=-\frac{3}{4}$

$$L.L.R=|3|=3$$

GRÁFICA



4. Encuentre la ecuación de la parábola horizontal con $V(0,0)$ y que pasa por el punto P(7,-3).

SOLUCIÓN

Utilizar la ecuación__________________

Como la parábola pasa por P(7,-3), entonces:

___

Obtenemos $p = \frac{9}{28}$

Por lo tanto   la ecuación de la parábola es:

____(R).

5. Determine la ecuación de la parábola con eje vertical que pasa por los puntos P(3,-1), Q(1, -7), R(-2,14).

   SOLUCIÓN.

   Utilice la ecuación general que representa a esta ecuación, ¿Cuál es?

___

   Aplique la propiedad de “pertenencia de un punto a una curva”. Realice para cada punto. Se determinan ecuaciones lineales de 3x3. ¿Cuáles son?

Resolver el sistema obtenido “triangulando el sistema”

Obtienes como resultado D=____, E=_____ y F=_____.

Sustituyendo en la ecuación general aplicada, determinamos la ecuación:

Ejercicio 6. Determine el vértice, el foco, y la directriz de la parábola dada su ecuación. Trace la gráfica, indicando esto 3 elementos.

1. $8y = x^2$
2. $2y^2 = -3x$
3. $(x+2)^2 = -8(y-1)$
4. $(y-2)^2 = -\frac{1}{4}(x-3)$
5. $y = x^2 - 4x + 2$
6. $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

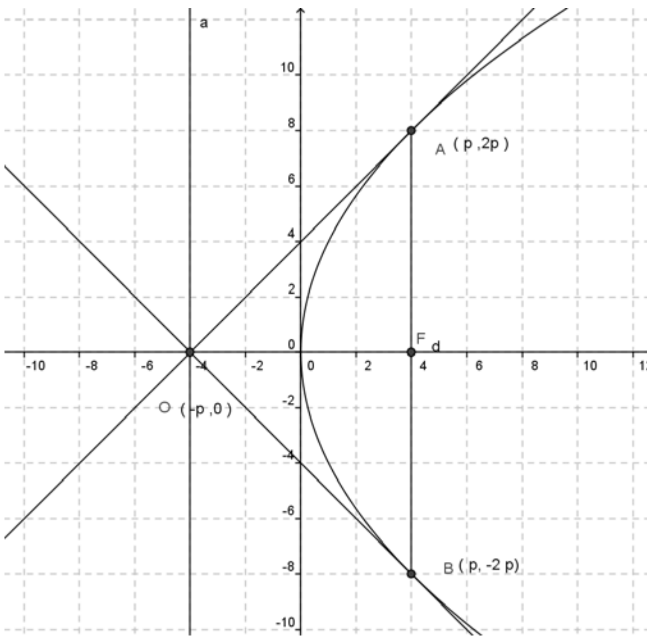
Ejercicio 7. Encuentre la ecuación de la parábola con eje vertical que pase por los puntos P(2,5), Q(-2,-3), R(1,6).

Ejercicio 8. Encuentre la ecuación de la parábola que tenga eje horizontal que pase por los puntos P(-1,1), Q(11,-2), R(5,-1).

A continuación presentamos problemas en los que se utilizará la ecuación de la parábola.

1. En la figura que aparece, el segmento AB es perpendicular al eje de simetría de la parábola y pasa por F, el foco. Las rectas OA y OB son tangentes a la parábola

en P y P', y se intersectan en el mismo punto en que el eje de simetría se intersecta con la directriz. Demuestre que $\angle AOF = 45º$.



Demostración.

Por demostrar: $\angle AOF = 45º$

Como la cuerda AB es perpendicular al eje de simetría de la parábola y pasa por el foco de la misma. Representa al lado recto, entonces

$$AB = 4p$$

$$FA = FB = 2p$$

Por ser la recta perpendicular en el punto O la directriz,

$$FO = 2p$$

$$FA = FO$$

Por lo tanto el triángulo PFO es triángulo rectángulo isósceles

$$\therefore \angle AOF = 45º$$

La demostración ha sido realizada en base a la Geometría Euclidiana

Ahora si consideramos que en la figura los puntos $A(p,2p)$ y $O(-p,0)$ la pendiente de la recta PO es:

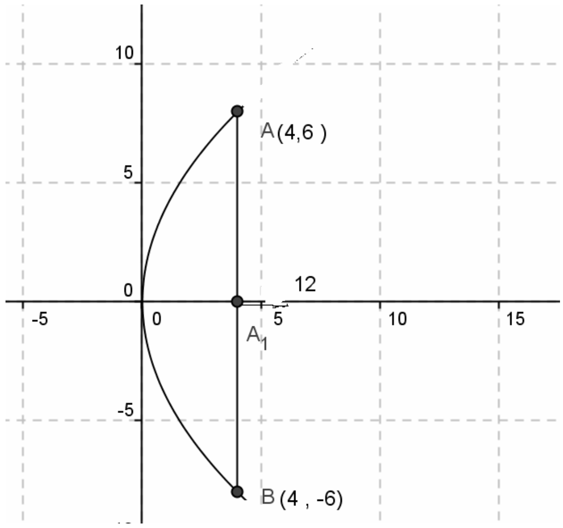
$$m = \frac{2p - 0}{p + p}$$

$$\therefore m = 1$$

Si la pendiente de la recta es 1, entonces el ángulo de inclinación es de 45º, es decir, $\angle AOF = 45^{\circ}$

2.El diámetro de un foco reflector es de 12 cm y su profundidad 4 cm. Localice el foco.

SOLUCIÓN.



En la figura, $AB = 12$ y $OA_1 = 4$ y los puntos: $A(4,6)$, $B(4,-6)$ y $A_1(4,0)$.

Aplicando la ecuación de la parábola horizontal con $V(0,0)$.

$$y^2 = 4px$$

La curva pasa por el punto $A(4,6)$, entonces

$$36 = 16p$$

$$\therefore p = \frac{9}{4}$$

Como el foco de esta parábola se representa con $F(p,0)$

Entonces el foco está en $F(\frac{9}{4},0)$.

La ecuación de esta parábola es $y^2 = 9x$, ¿Por qué?

Compruebe que al sustituir las coordenadas del punto B la ecuación se satisface.

3. La altura de un segmento parabólico es 8 cm y la longitud de su base es 14 cm. Una recta que atraviesa el segmento perpendicular a su eje mide 7 cm. ¿A qué distancia está la recta del vértice del segmento?

   SOLUCIÓN.

   1º) Dibuje la figura en el plano cartesiano.

   2º) Deseamos calcular la distancia del vértice a la recta que atraviesa el segmento parabólico.

   3º) Conocemos la altura del segmento parabólico y la longitud de su base

   4º) De acuerdo a los datos podemos considerar que los puntos $A(0,8)$, $B(7,0)$ y $C(-7,0)$ son puntos del segmento parabólico, ¿Por qué?

   5º) La parábola es vertical y abre hacia abajo, ¿Qué ecuación utilizamos? y se conoce las coordenadas del vértice, ¿Cuáles Son?

   6º) Sustituir las coordenadas del vértice en la ecuación a utilizar determinamos una ecuación.

   7º) Al realizar lo anterior nos falta conocer el valor de p.

   8º) Basta sustituir las coordenadas del punto B o C en la ecuación anterior y calculamos p. Determinamos la ecuación que representa al segmento parabólico.

   9º) El segmento parabólico contiene a los puntos $P(\frac{7}{2},y)$ y $Q(-\frac{7}{2},y)$.

   ¿Quiénes son estos puntos?

   10º) Sustituya las coordenadas de P o de Q en la ecuación obtenida para calcular y. Determinamos la distancia del centro de la base a la recta que atraviesa al segmento parabólico.

   11º) Reste el valor obtenido de y a 8. Determinamos la distancia del vértice a la recta que atraviesa el segmento parabólico. Resolvimos el problema.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Una parábola tiene 16 cm de anchura a una distancia de 6 cm del vértice. ¿Qué anchura tiene a la altura del foco?
   R.

2. El espejo de un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide finito, 8 pulg de diámetro; su profundidad es 1 pulg. ¿A qué distancia del centro del espejo convergerá la luz procedente de una estrella lejana?

3. Un reflector sonoro se usa en eventos deportivos al exterior, y tiene la forma de un paraboloide con su foco a 5 pulg de su vértice. Calcule el diámetro que debe tener si su profundidad debe ser 2 pies.

   R.

4. Del orificio de un tanque situado en la superficie de la tierra, sale un chorro de agua en forma de una parábola definida por la ecuación $x^2 = -6y$, si el orificio se toma por origen y el eje OY está dirigido en sentido vertical hacia arriba. ¿A qué distancia del borde del tanque cae el chorro a tierra, si el orificio se halla a una altura de 1.5 m? Dibuje la figura.

5. Los cables de un puente se encuentran a 15 m por encima del pavimento en las torres del puente y a 3 m por encima de la misma al centro del puente. El pavimento sobre el puente tiene longitud de 60 m. A lo largo se encuentran espaciados cables verticales cada 6m. Calcule la longitud de los cables verticales que están a12 m del centro. Construya la figura. R.

6. Si un pelota se arroja verticalmente y hacia arriba desde el suelo con velocidad inicial de $v_0 \frac{m}{seg}$, su distancia sobre el suelo al cabo de t seg estará dada aproximadamente por la fórmula
   $y = v_0 t - 16t^2$

7. Dibuje esta “gráfica tiempo-distancia” para el caso de que $v_0 = 8\frac{m}{s}$ .Muestre que la gráfica es una parábola. ¿Cree usted que el vértice, la directriz y el foco tienen algún significado particular en este problema?

8. Completando cuadrados, exprese la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ en la forma ordinaria; determine las coordenadas del vértice de la parábola y el valor de p en función de a, b y c, y muestre que la distancia dirigida del vértice al foco es $\frac{1}{4a}$.