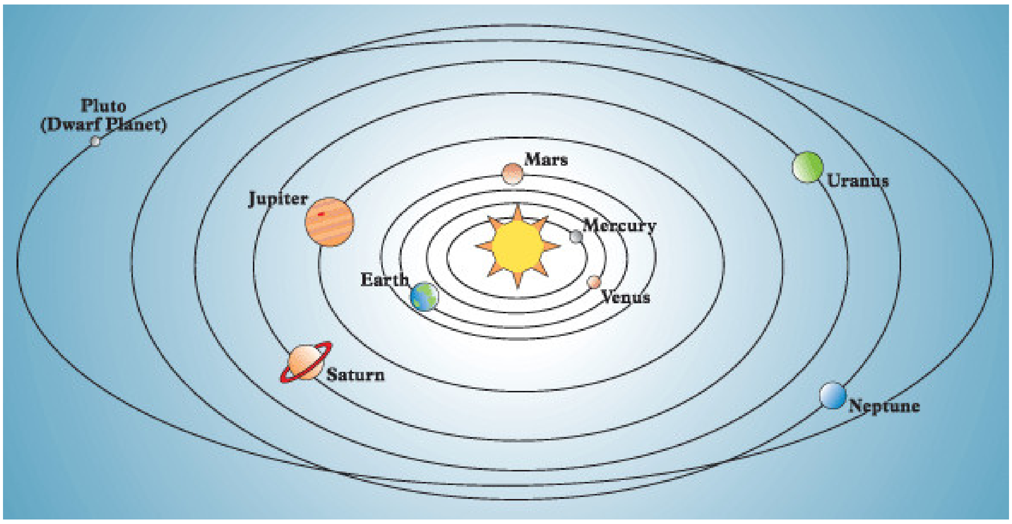
UNIDAD 4: ELIPSE CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS



UNIDAD 4. ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SU ECUACIONES CARTESIANAS.

PROPÓSITOS: Reafirmar el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse y la circunferencia y avanzar en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano.

INTRODUCCIÓN.

SECCIONES CÓNICAS

La ecuación general cuadrática en x y y se puede expresar en la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

La gráfica de una ecuación de segundo grado en las coordenadas x y y se llama sección cónica, o simplemente cónica. El nombre proviene de que la curva se puede determinar con la intersección de un plano con un cono circular recto.

Las secciones cónicas fueron investigadas por matemáticos griegos mucho antes que fueran introducidos los métodos analíticos. Es pertinente mencionar que fue Apolonio de Perga quien estudió y desarrollo una rama de Geometría superior, que se ocupa de las curvas y de las figuras llamadas secciones cónicas, su obra y sus métodos fueron después la base moderna de la Geometría Analítica.

Se descubrieron varias propiedades de las cónicas. E n la actualidad, el interés en las secciones cónicas ha aumentado por sus diversas aplicaciones teóricas y prácticas.

La elipse es una curva cerrada y es una cónica porque su ecuación como lo trataremos en esta Unidad es de segundo grado en x y y.

La elipse recibe un sinnúmero de aplicaciones científicas. Mencionando algunas de ellas, se emplean engranes elípticos en ciertos tipos de maquinaria para producir una leve fuerza de choque y lento retorno; también, en algunas ocasiones, arcos de forma semielíptica en la construcción de puentes de piedras y concreto. Las órbitas que desarrollan los satélites artificiales y los planetas alrededor del sol son elipses, donde uno de sus focos se halla en el centro del cuerpo central (la tierra, para los satélites artificiales, y el sol, para los planetas).

(La órbita de la tierra tiene una excentricidad de aproximadamente $\frac{1}{60}$). La proyección no paralelo de una circunferencia sobre un plano no paralelo al plano de la circunferencia es una elipse (es posible que desee intentar la demostración).

Los satélites terrestres viajan en torno a nuestro planeta en órbitas elípticas.

En algunos museos, la galería de los susurros es una atracción interesante. Si dos personas se colocan en los focos, pueden susurrar y escucharse claramente una a la otra, mientras que las personas situadas en otros lugares no los pueden oír. ¿Cómo se explica esto?

Presentamos algunos problemas que para su solución es necesario conocer la ecuación de la elipse o bien al plantearlos y resolverlos originan ecuaciones de elipse.

- La órbita que describe la tierra alrededor del sol es una elipse, donde el centro del sol coincide con uno de los focos. El semieje de mayor de la elipse es de aproximadamente 92.9 millones de millas, y su excentricidad de $\frac{1}{60}$. Determine las distancias máxima y mínima que puede haber entre el sol y la tierra.

- La órbita de la luna es una elipse con la tierra en un foco. La longitud del eje mayor es de 478000 millas, y la excentricidad $e = 0.0549$. Determine las distancias mínima y máxima de la tierra a la luna.

- El arco de un paso subterráneo es una semielipse de 20 m de ancho y 6 m de altura. Hallar la altura del arco a 6 m del punto medio.

- El perímetro de un triángulo mide 30 y los puntos A(0,5), B(0,-5) son dos de los vértices. Hallar la gráfica del tercer vértice.

- Hallar la ecuación de la trayectoria de un punto $P(x,y)$ que se mueve de tal manera que su distancia a $Q(5,0)$, es igual a la mitad de su distancia a la recta $x=20$.

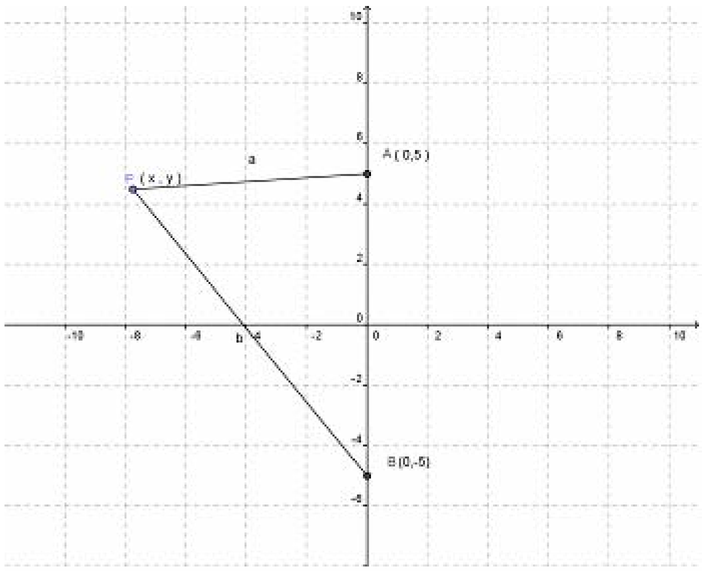
A continuación presentamos un problema que para plantearlo es necesario utilizar los conceptos de **perímetro de un triángulo y distancia entre dos puntos** para solucionarlos.

1. El perímetro de un triángulo mide 30 y los puntos A(0,5) B(0,-5) son dos de los vértices. Hallar la gráfica del tercer vértice.

   SOLUCIÓN.

   Localizamos en el plano los puntos $A(0,5), B(0,-5)$ y consideramos un punto $P(x,y)$ cualesquiera de tal manera que se cumpla:

$$d(P,A)+d(P,B)+d(A,B)=30$$



Pero $d(A,B)=10$, y, aplicando la fórmula de distancia obtenemos

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+5)^2}=20$$

Desarrollando:

$$\sqrt{x^2+(y+5)^2}=20-\sqrt{x^2+(y-5)^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+10y+25}=20-\sqrt{x^2+y^2-10y+25}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando:

$$20y - 400 = -20\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25}$$

Elevando otra vez elevando al cuadrado y simplificando, obtenemos:

$$4x^2 + 3y^2 = 300$$

La ecuación obtenida representa a una elipse vertical con centro en el origen. ¿Cuál es su forma algebraica?

Algunas conclusiones:

a) Podemos interpretar que cualquier punto de la curva que representa esta ecuación cumple la propiedad inicial.

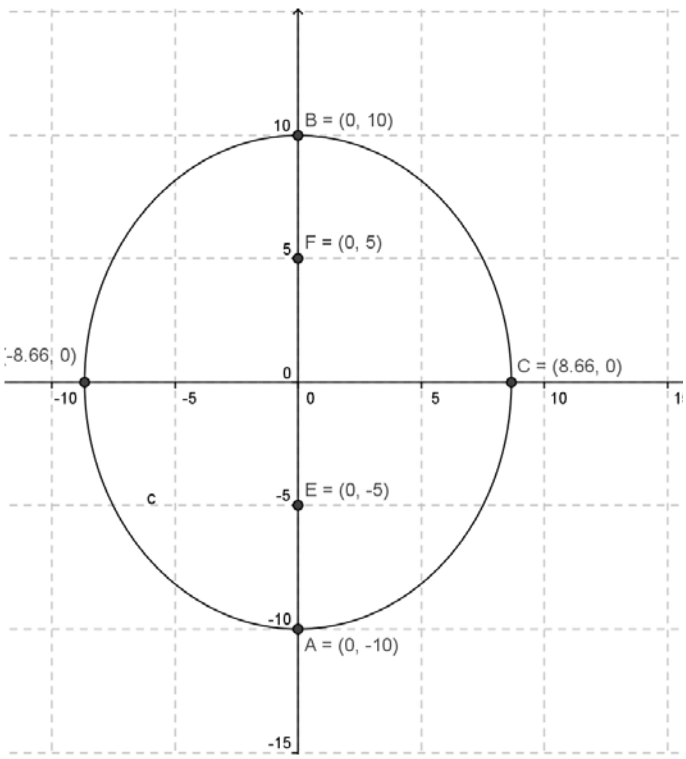
b) En lugar de obtener un tercer vértice obtenemos un conjunto de puntos, es decir, un conjunto de triángulos cuyo perímetro es 30.

La ecuación obtenida se puede representar en la forma siguiente:

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$$

¿Qué se realizó para obtener esta ecuación? ¿Cómo se representa esta ecuación?

Aplicando el Software Geogebra la gráfica queda representada así:



A partir de la gráfica, realice lo siguiente:

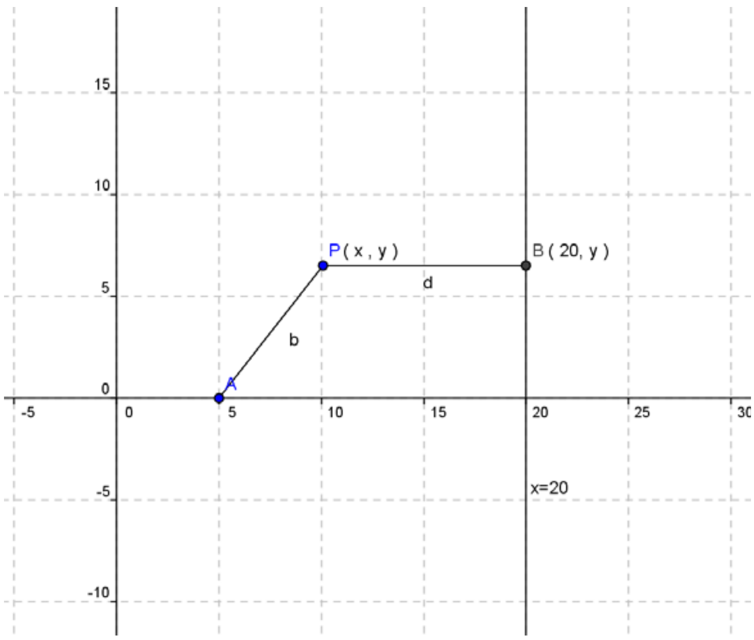
a) CE+CF+EF=
b) Si $x = 5$, ¿Cuál es valor de y?
c) Utilizando las coordenadas del punto obtenidas en el inciso anterior y aplicando la fórmula de distancia, compruebe que se cumple la propiedad inicial.
d) ¿Cuáles son los vértices y los focos de la elipse?

Ahora presentamos otro problema:

2.Hallar la ecuación de la trayectoria de un punto $P(x, y)$ que se mueve de tal manera que su distancia a $Q(5,0)$, es igual a la mitad de su distancia a la recta $x = 20$.

SOLUCIÓN.

Localicemos el punto $Q(5,0)$ y trazar la recta $x = 20$ y también consideremos punto $P(x, y)$ cualesquiera en el plano, de tal manera que cumple la propiedad enunciada en el problema:



$$d(P,Q) = \frac{1}{2} d(P,B)$$

Aplicando fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-20)^2 + (y-y)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x-5)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-20)^2$$

Desarrollando y simplificando obtenemos la ecuación:

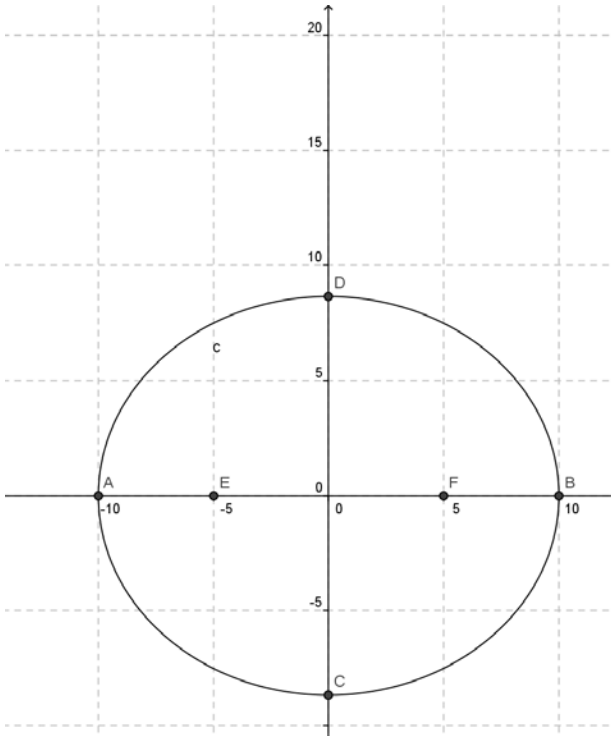
$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 75$$

Que representa a una elipse horizontal con centro en el origen.

También la podemos representar en la forma:

$$3x^2 + 4y^2 = 300$$

GRÁFICA DE LA ECUACIÓN OBTENIDA



Complete lo siguiente:

a) En la figura inicial del problema si $x = 10$, determine los valores de las ordenadas correspondientes del punto P.
b) Utilizando las coordenadas de los puntos P, Q y R, anteriores, compruebe la propiedad del problema.
c) Las coordenadas de los vértices de la elipse son:
d) Las coordenadas de los focos son:
e) Si $x = 5$, ¿Cuáles son los valores de la ordenada correspondiente?
f) Compruebe que la suma de cualesquiera de los dos puntos obtenidos en el inciso c) a los focos es 20.
g) ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos del eje menor?, ¿Cuánto mide el eje menor?

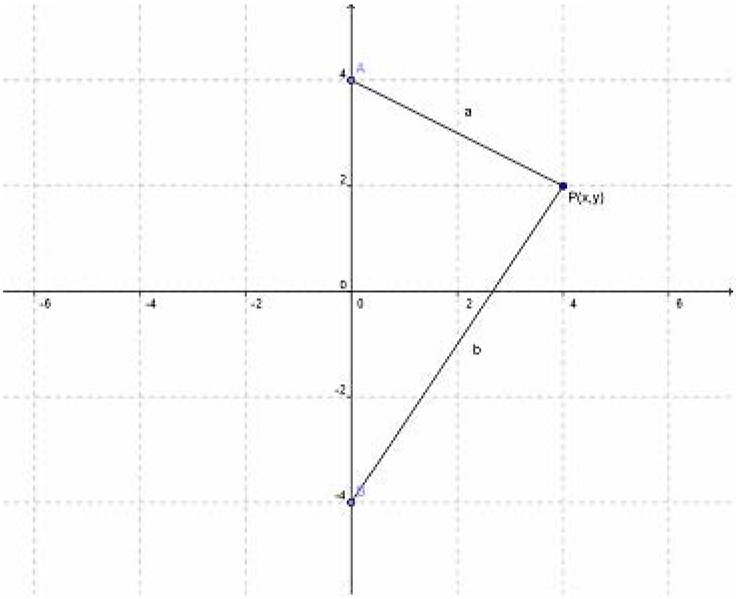
Ejemplos ilustrativos**.** Determine la ecuación y trace la gráfica.

1. Encuentre la ecuación de la trayectoria de un punto que se mueve tales que la suma de sus distancias a los puntos $A(0,4)$ y $B(0,-4)$.

SOLUCIÓN.

Consideremos un punto $P(x, y)$ cualesquiera y los puntos $A(0,4)$ y $B(0,-4)$ en el plano.

FIGURA



Tomando en cuenta la propiedad del enunciado del problema establecemos que:

$$d(P, A) + d(P, B) = 10$$

Aplicando fórmula de distancia:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+4)^2} = 10$$

Desarrollando:

$$\sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$$

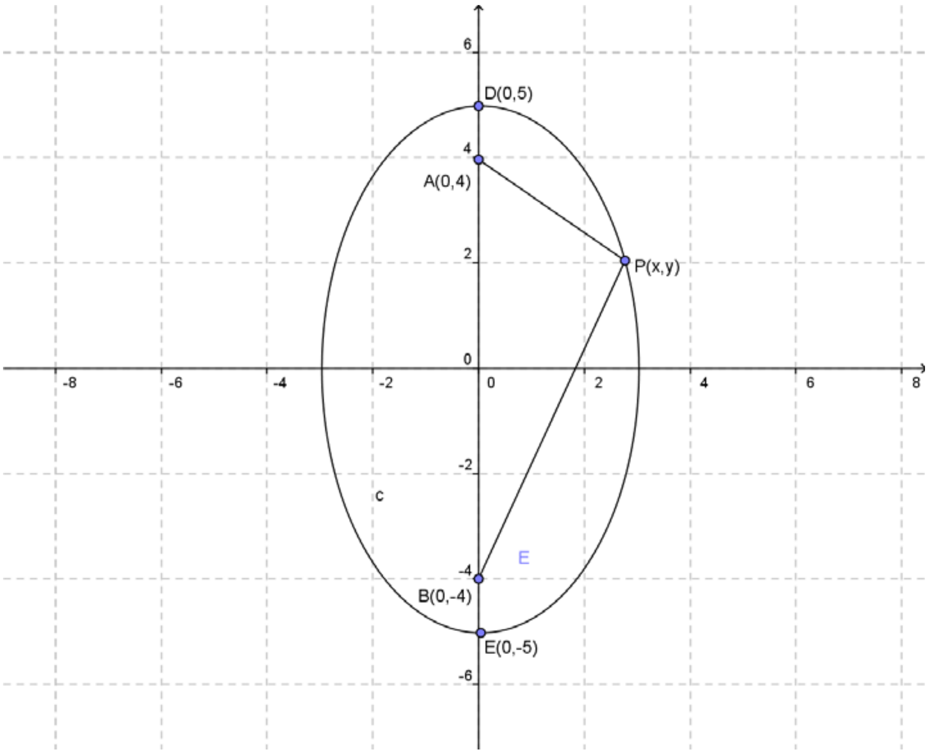
Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando obtenemos:

$$4y - 25 = -5\sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$\therefore 25x^2 + 9y^2 = 225$$

GRÁFICA



La ecuación obtenida representa a una elipse con eje mayor vertical y centro en el origen.

Y dividiendo entre 225, obtenemos la ecuación:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

La ecuación tiene la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (\ a > b\ )$$

De la que podemos determinar: $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, $a = 5$ y $b = 3$

Sabemos que en toda elipse se cumple la propiedad:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Por lo que $c^2 = 16$ y $c = 4$.

Podemos deducir que los focos de la elipse son los puntos A y B del enunciado del problema y de la gráfica correspondiente. Los cuales los podemos expresar con los puntos: $F_1(0,4)$ y $F_2(0,-4)$.

Podemos observar que la longitud del eje mayor es 10, o sea $2a = 10$ y que la longitud del eje menor es 6, o sea $2b = 10$ y la distancia entre foco y foco es 8, o sea $2c = 8$

Entonces las coordenadas de los vértices son $D(0,5)$ y $E(0,-5)$ que podemos expresarlo como: $V_1(0,5)$ y $V_2(0,-5)$.

Ahora empleando la ecuación obtenida calcular x, si $y = 3.$ Sustituyendo en la ecuación:

$$25x^2 + 81 = 225$$

Resolviendo la ecuación determinamos:

$$x = \pm\frac{12}{5}$$

La ecuación tiene dos raíces $x_1 = \frac{12}{5}$ y $x_2 = -\frac{12}{5}$

Lo que indica que la curva contiene a los puntos $Q(\frac{12}{5},3)$ y $R(-\frac{12}{5},3)$

Ahora comprobemos que $d(Q,A) + d(Q,B) = 10$. Aplicando distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(\frac{12}{5} - 0)^2 + (3-4)^2} + \sqrt{(\frac{12}{5} - 0)^2 + (3+4)^2} = 10$$

Simplificando:

$$\sqrt{\frac{169}{25}}+\sqrt{\frac{1369}{25}}=10$$

$$\therefore \frac{13}{5}+\frac{37}{5}=10$$

Se cumple la propiedad geométrica del problema: “ la suma de sus distancias a los puntos A y B es 10”.

Ejercicio 1. Considere el punto $R(-\frac{12}{5},3)$ y realice lo anterior para comprobar la misma propiedad.

Ejercicio 2. Suponga que $x=2$, calcular y. Realice todo lo correspondiente a la comprobación anterior.

2. Encuentre la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(3,0)$ y $B(-3,0)$ es siempre 10.
   SOLUCIÓN.

   Considere que $P(x,y)$ es el punto en movimiento y, A y B, los puntos fijos.

- Aplique la propiedad $d(P,A)+d(P,B)=10$
- Sustituya las coordenadas para representarla algebraicamente.
- Desarrolle y simplifique.
- Determina la ecuación $16x^2+25y^2=400$
- Trace la gráfica que contenga los puntos dados.
- Podemos reducirla a la forma $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
- La ecuación tiene la forma:______________________
- **Representa a una elipse con eje mayor horizontal con centro en el origen.**

- Determine los elementos de esta elipse.
- Utilizando la ecuación obtenida y encuentre las coordenadas de dos puntos de la elipse cuando $x = -4$.
- Utilizando cualquiera de los puntos determinados compruebe la propiedad del problema.
- Si $x = 0$, ¿Cuáles son las coordenadas de los dos puntos correspondientes de la elipse? Compruebe la propiedad utilizando cualquiera de los dos puntos.

3. Encuentre la trayectoria de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(-2,3)$ y $B(6,3)$ es siempre 12.

SOLUCIÓN.

Considere que $P(x, y)$ es el punto en movimiento y, A y B, los puntos fijos.

Por la propiedad podemos establecer que: $d(P, A) + d(P, B) = 12$.

Sustituyendo:

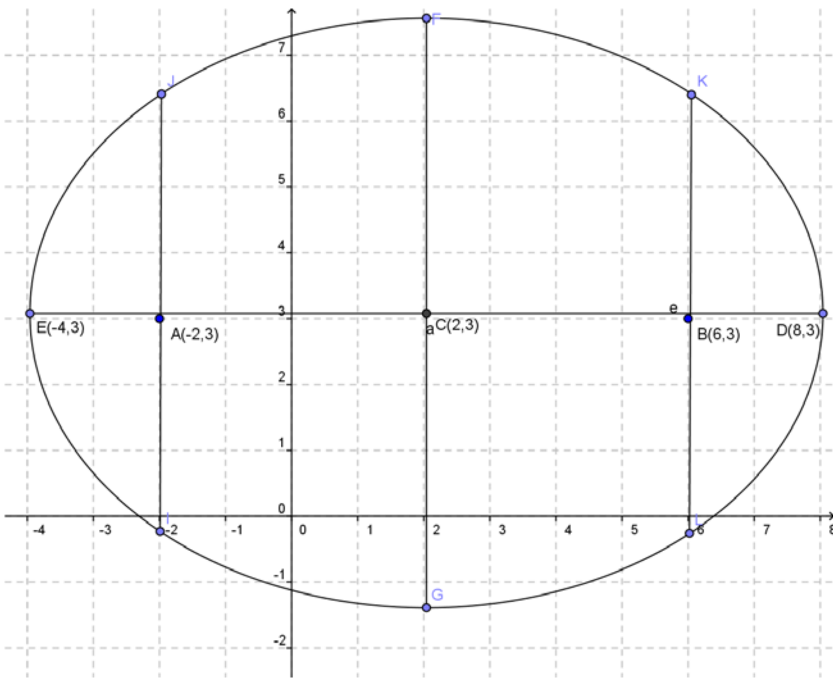
$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = 12$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = 12 - \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando obtenemos la ecuación:

$$5x^2 + 9y^2 - 20x - 6y - 79 = 0$$

GRÁFICA.



La gráfica representa a una elipse con eje mayor horizontal. **La ecuación obtenida está representada en su forma general.**

Obtendremos resultados al reducir esta a su forma ordinaria por completando cuadrados:

$$5x^2 - 20x + 9y^2 - 54y = 79$$

$$5(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = 79$$

$$5(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 180$$

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{20} = 1$$

Hemos reducido la ecuación de su forma general a su forma ordinaria. La cual está expresada:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$$

Centro $C(h,k) = C(2,3)$; $a = 6$; $b = \sqrt{20}$ y $c = 4$ ¿Por qué?

Si aplicamos que $F_1(h+c,k)=F_1(2+4,3)$, determinamos el foco: $F_1(6,3)$ punto representado por $B(6,3)$. Y también,

$F_1(h-c,k)=F_1(2-4,3)$, determinamos el foco: $F_2(-2,3)$ representado por el punto $A(-2,3)$.

Ahora si consideramos $V(h\pm a,k)=V(2\pm 6,3)$, determinamos los vértices:

$V_1(8,3)$ y $V_2(-4,3)$.

Otros elementos son:

Longitud del eje mayor: $2a=12$

Longitud del eje menor: $2b=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$

Excentricidad $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$

Longitud de cada lado recto L.L.R.= $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{20}{3}$

4. Reduzca la ecuación $9x^2+4y^2+36x+24y+72=0$ a su forma ordinaria y determine si representa a una elipse.

SOLUCIÓN.

$$9x^2+36x+4y^2+24y=-72$$

Factorizando:

$$9(x^2+4x)+4(y^2+6y)=-72$$

Se reduce a:

$$9(x^2+2)^2+4(y^2+3)^2=0$$

La ecuación representa a un punto que en el caso es $C(-2,-3)$.

5. Determine los elementos de la elipse cuya ecuación es $4x^2+y^2=2y$. Trace la Gráfica.

SOLUCIÓN.

Reduciremos la ecuación a su forma ordinaria:

$4x^2 + y^2 - 2y = 0$

Factorizando y completando cuadrado:

$$4(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1$$

La ecuación se reduce a:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

La ecuación tiene la forma ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Que representa a la ecuación de la elipse con eje mayor vertical

Entonces $a^2 = 1$ y $b^2 = \frac{1}{4}$, por lo tanto $a = 1$ y $b = \frac{1}{2}$; $c = \sqrt{\frac{3}{4}}$

Sus elementos son:

Centro $C(h,k) = C(0,1)$, $h = 0$ y $k = 1$.

Vértices:$V(h, k \pm a) = V(0, 1 \pm 1)$, entonces $V_1(0,2)$ y $V_2(0,0)$

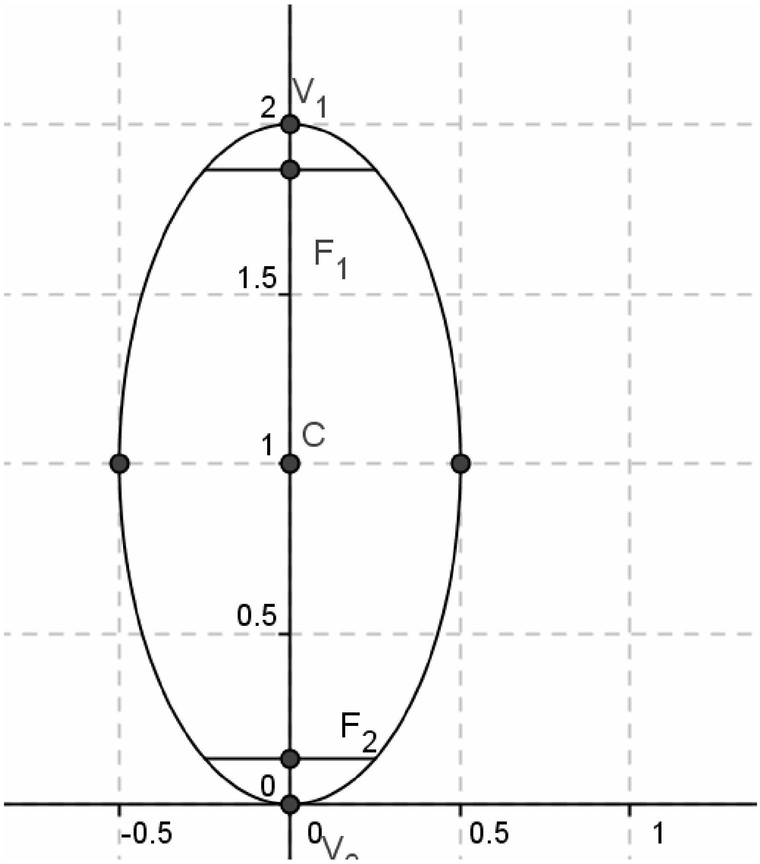
Focos: $F(h, k \pm c) = F(0, 1 \pm \sqrt{\frac{3}{4}})$, entonces $F_1(0, 1 + \sqrt{\frac{3}{4}})$ y $F_2(0, 1 - \sqrt{\frac{3}{4}})$

Longitud del eje mayor $2a = 2$

Longitud eje menor $2a = 1$

L.L.R=$\frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}$

Excentricidad $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad e = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Algunas conclusiones.

La elipse es un lugar geométrico que cumple una propiedad geométrica. Una elipse tiene dos ejes de simetría. El más grande es el eje mayor, y el más pequeño el eje menor. Los ejes de la elipse son perpendiculares entre sí en su punto medio que es el centro de la elipse. Los focos se encuentran en el eje mayor. La elipse intersecta los ejes mayor y menor en los vértices: Vértices del eje mayor y vértices del eje menor (extremos del eje menor).

Definición. Elipse es el lugar geométrico del punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es una constante ($2a$ **)**

La ecuación de la elipse y sus elementos.

Elipse con eje horizontal Centro: $C(h,k)$

Ecuación: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$

Vértices: $V(h\pm a,k)$

Focos: $F(h\pm c,k)$

L. Eje mayor: $2a$

L. Eje menor: $2b$

L.L.R.=$\dfrac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a} \quad (e<1)$

Elipse con eje vertical Centro: $C(h,k)$

Ecuación: $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1 \qquad (a>b)$

Vértices: $V(h,k\pm a)$

Focos: $F(h,k\pm c)$

L. Eje mayor: $2a$

L. Eje menor: $2b$

L.L.R.=$\dfrac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ **(**$e < 1$**)**

Elipse horizontal centro: $C(0,0)$

Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$

Vértices: $V(\pm a, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0)$

L. Eje mayor: $2a$

L. Eje menor: $2b$

L.L.R.=$\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} \quad (e < 1)$

Elipse vertical centro $C(0,0)$

Ecuación: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (a > b)$

Vértices: $V(0, \pm a)$

Focos: $F(0, \pm c)$

L. Eje mayor: $2a$

L. Eje menor: $2b$

L.L.R.=$\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} \quad (e < 1)$

La ecuación general de la elipse es $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$**, si** $A\neq B$ A y B **con el mismo signo, y** $C=0$**.**

Ejercicio 3. Encuentre la ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

1. Centro en A(6,-4), un vértice en B(10,-4), y $e=\dfrac{1}{2}$.

   R. $\dfrac{(x-6)^2}{16}+\dfrac{(y+4)^2}{12}=1$

2. Vértices en A(-5,-2) y B(7,-2) y un foco en D(5,-2).
   R:

3. Centro C(4,-4), un extremo del eje menor en B(0,-4) y un foco en D(4,0).

   R. $\dfrac{(x-6)^2}{16}+\dfrac{(y+4)^2}{12}=1$

4. Focos $F_1(-2,3)$, $F_2(6,3)$, y un vértice en V(8,3)

   R. $20x^2+36y^2-80x-216y=316$

5. Vértices en $V(\pm 8,0)$ y focos en $F(\pm 5,0)$**.**

   R. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1$

6. Vértices en $V(0,\pm 5)$ y longitud del eje menor 3.

   R. $\dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

7. Vértices en $V(0,\pm 6)$ y pasa por P(3,2).

   R. $\dfrac{8x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}=1$

8. $e=\dfrac{3}{4}$, vértices en $V(0,\pm 4)$

R. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

9. Que pasa por los puntos A(2,3) y B(6,1).

10. Centro en (-2,2), un vértice en (-2,6), extremo de un eje menor en (0,2).

R. $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

11. Centro en (5,4), la longitud del eje mayor es16, la longitud del eje menor es 6, el eje mayor es paralelo al eje X.

12. Vértices en (-1,6) y (-1,2), un foco e (3,7).

R. $16x^2+15y^2+32x+60y-164=0$

13. Hallar la ecuación de la curva de los puntos medios de las ordenadas de la circunferencia $x^2+y^2=36$.

14. Un segmento de longitud 12 se mueve de tal manera que sus extremos siempre tocan los ejes coordenados. Determine la ecuación de la curva del segmento que está a 4 unidades del extremo que se halla en contacto con el eje X.

R. $16x^2+64y^2=1024$

15. Un punto se mueve en el plano coordenado de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos A(5,2) y B(1,2) es igual a 16. Encuentre la ecuación de la trayectoria del punto móvil.

16. Determine la ecuación de la trayectoria de un punto $P(x,y)$ que se mueve de tal manera que su distancia a Q(5,0) es igual a dos tercios de la recta $x=-9$.

R. $20x^2+36y^2-720=0$

17. La cuerda trazada por cualquier foco de una elipse y perpendicular a su eje mayor recibe el nombre de lado recto de la elipse. Demuestre que su longitud es $\frac{2b^2}{a}$.

LA CIRCUNFERENCIA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

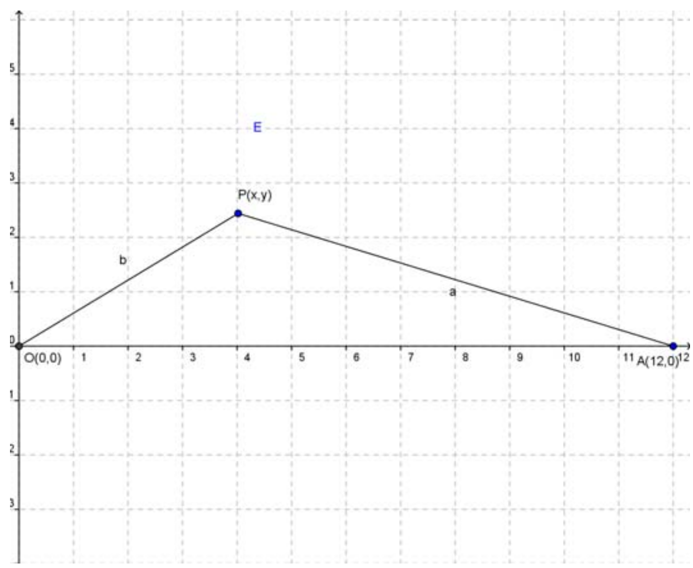
Cuando un plano secante es perpendicular al eje de un cono, la intersección con el cono es **un círculo,** a menos que el<plano secante pase por el vértice del cono. En este último caso la intersección es un punto. La curva que limita a un círculo es **la circunferencia.**

El estudio de esta curva la iniciaremos introduciendo problemas cuya solución originen ecuaciones de segundo grado en dos variables.

1. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto A(12,0) es siempre el doble de su distancia al origen. Encuentre la ecuación de su trayectoria, y trace su gráfica.

   Solución.

   Representemos los puntos en el plano cartesiano y representemos con una figura para mostrar la idea del problema.



El punto $P(x,y)$ representa al punto en movimiento, de acuerdo al enunciado del problema podemos expresar lo siguiente ecuación:

$$d(P,A)=2d(P,O)$$

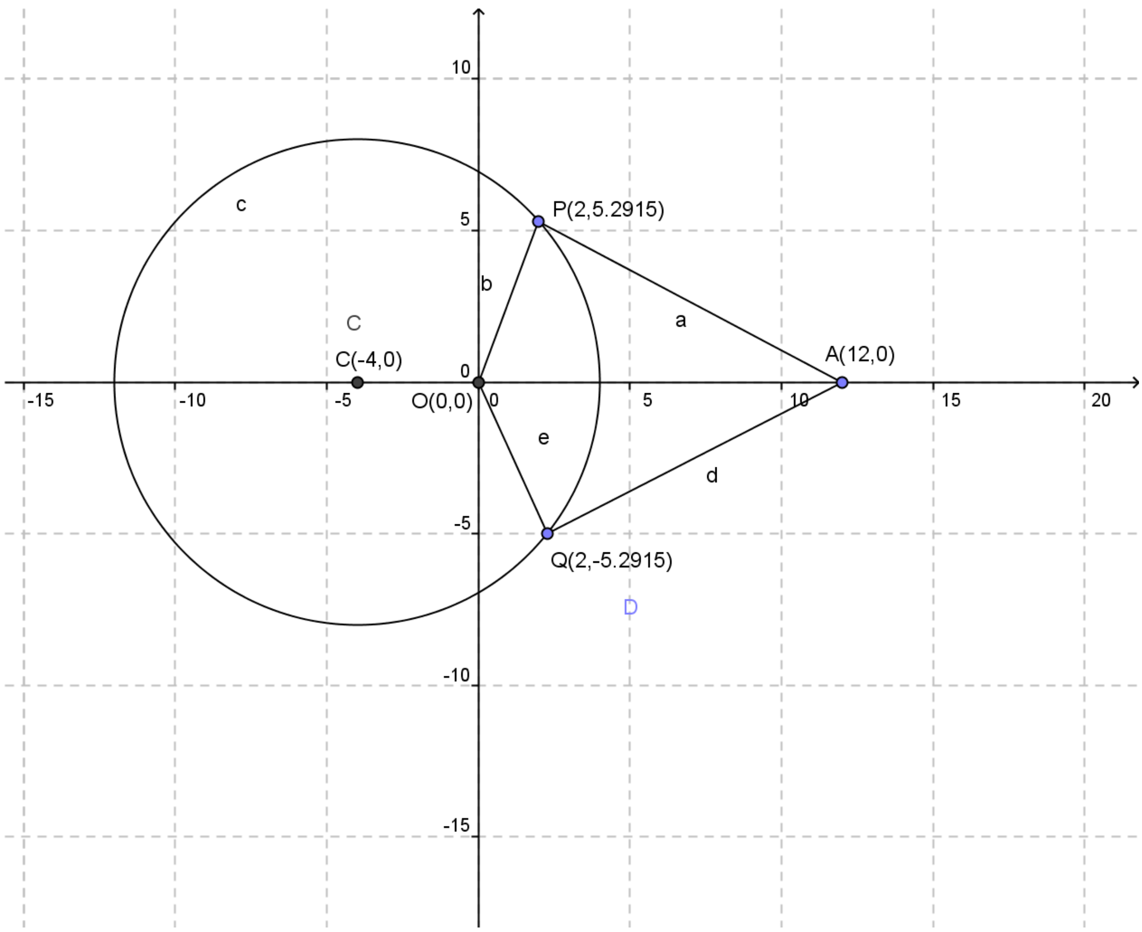
Aplicando la formula de distancia, tenemos:

$$\sqrt{(x-12)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando, obtenemos la ecuación:

$$x^2+y^2+8x-48=0$$

Empleando el Software Geogebra, representamos la gráfica:



La gráfica representa a una circunferencia.

Utilizando la ecuación obtenida supongamos que $x=2$, sustituyendo en la ecuación, obtenemos que $y=\pm\sqrt{28}$ o también $y=\pm 5.2915$, determinamos los puntos $P(5,\sqrt{28})$ y $Q(2,-\sqrt{28})$. Calculando las distancias siguientes:

$d(P,A)=\sqrt{128}$, es decir $d(P,A)=8\sqrt{2}$, y

$d(P,0)=\sqrt{32}$, es decir, $d(P,0)=4\sqrt{2}$

Podemos observar que se comprueba $d(P,A)=2d(P,O)$, lo que cumple la propiedad geométrica del enunciado del problema.

Si consideramos el punto $Q(2,-\sqrt{28})$ y realizamos lo anterior también se cumple la propiedad geométrica del problema. Compruebe.

Establecemos que cualquier punto de esta circunferencia comprueba la propiedad del problema.

Ahora calculemos las distancias $d(P,C)$ y $d(Q,C)$

$$x^2+y^2+8x-48=0$$

$$\therefore d(P,C)=8$$

$$d(Q,C)=\sqrt{(2+4)^2+(-\sqrt{28}-0)^2}$$

$$\therefore d(Q,C)=8$$

Podemos afirmar que la el radio de la circunferencia es $r=8$ y el centro del a misma es $C(-4,0)$.

La ecuación obtenida $x^2+y^2+8x-48=0$, está representada **en su forma general**. Completando cuadrados determinamos la ecuación:

$$(x+4)^2+(y-0)^2=64$$

Sabemos que la ecuación está representada en su forma ordinaria.

Ejercicio1. Si $x=-8$, calcule y, determine los puntos y realice la comprobación anterior.

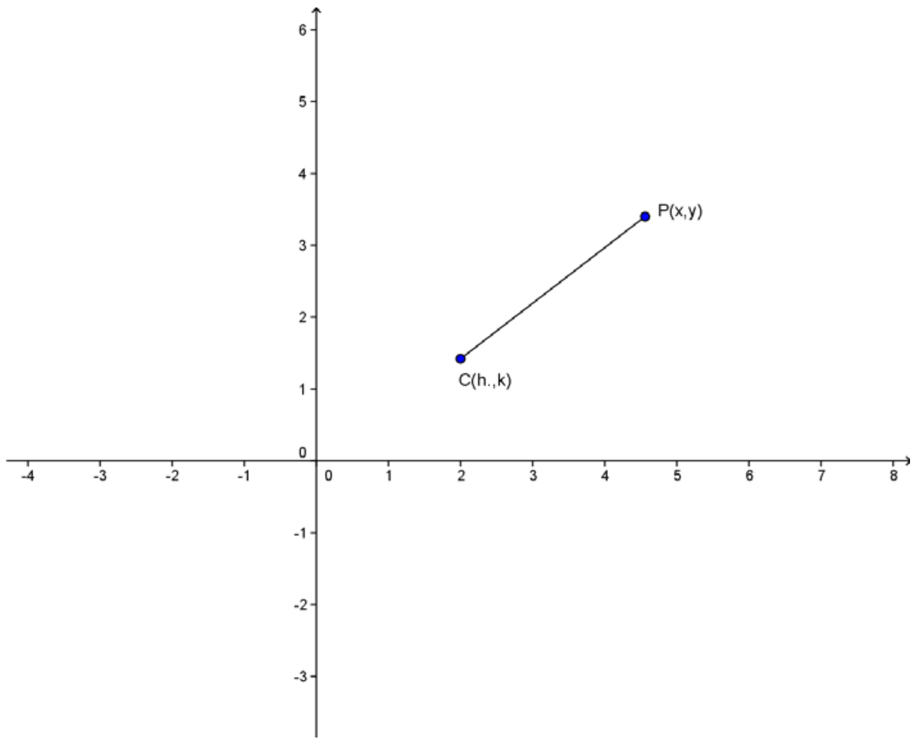
Ejercicio 2. Determine la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al Figurapunto P(-3,0) es el doble de la distancia al punto Q(6,6),realice las comprobaciones pertinentes y trace la gráfica.

R. $x^2 + y^2 - 18x - 16y + 93 = 0$

Continuando con la ecuación cartesiana de la circunferencia.

2. Encuentre la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve en un plano de tal manera que su distancia al punto $C(h,k)$, es siempre r .

FIGURA



De acuerdo con la propiedad geométrica del enunciado establecemos que:

$$d(P,C) = r$$

Sustituyendo las coordenadas,

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Que representa la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria.

Las coordenadas del centro $C(h,k)$ **y radio** r .

Considerando, que el centro está en el origen la ecuación se reduce a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Desarrollando la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Obtenemos:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Si consideramos que $-2h = D$, $-2k = E$ y $h^2 + k^2 - r^2 = F$ y sustituyendo

Determinamos la ecuación de la circunferencia en su forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

D, E, R representan a números reales.

Caso inverso. Reduzca la ecuación ordinaria a su forma general.

Completando cuadrados determinamos la ecuación:

$$(x+\frac{D}{2})^2 + (y+\frac{E}{2})^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Que representa a la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria.

Si relacionamos esta ecuación con la forma anterior, podemos establecer lo siguiente:

$$h = -\frac{D}{2}, \qquad k = -\frac{E}{2} \qquad \text{y} \qquad r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Por lo tanto establecemos que el centro y el radio de la circunferencia se pueden representar respectivamente así:

$$C(h,k) = C(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

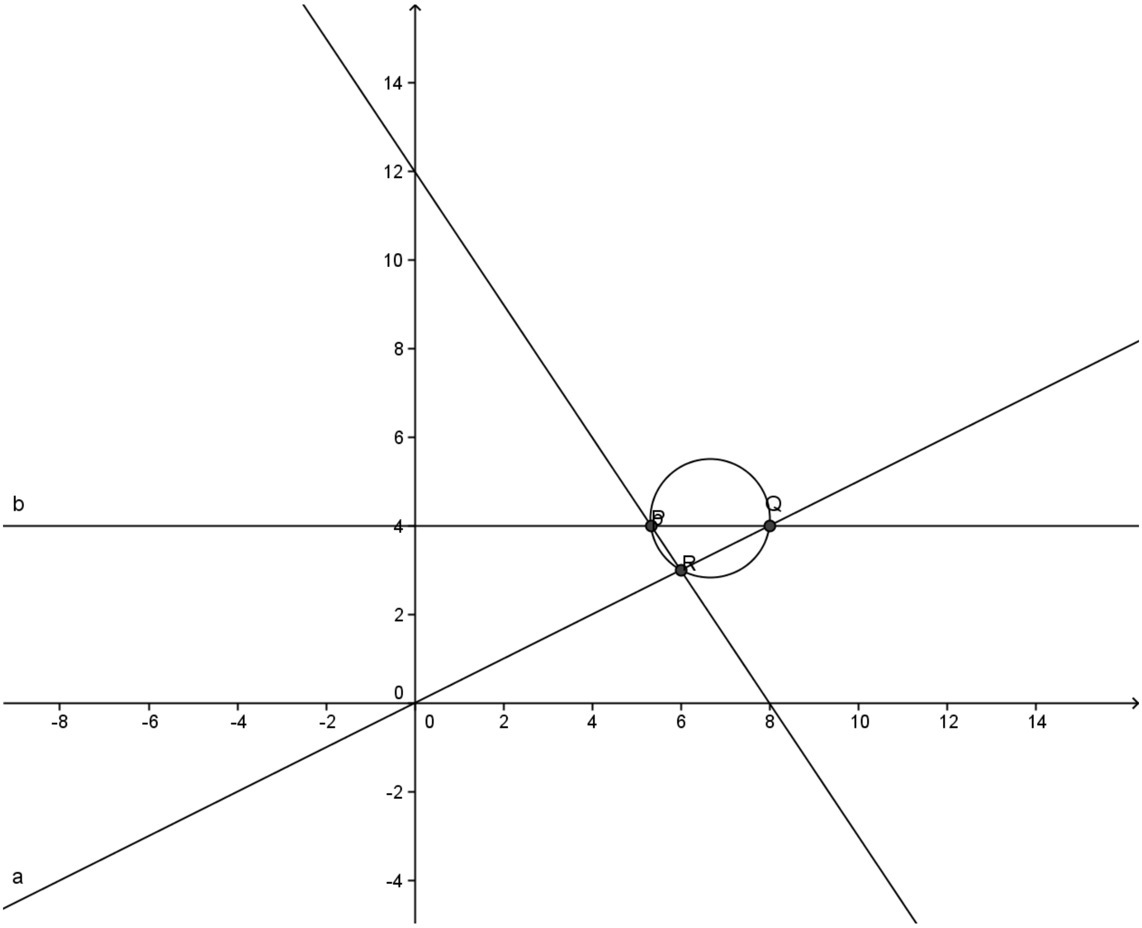
Siempre que $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

De esta manera sabemos que los elementos importantes de la circunferencia son centro y radio los cuales se pueden determinar de acuerdo a las condiciones dadas en el problema.

3. Los lados de un triángulo están sobre las rectas $x-2y=0$, $2y=8$ y $3x+8y=24$. Determine la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Solución.

Representamos gráficamente las rectas en el plano cartesiano que al intersectarlas por pares determinan los 3 vértices P, Q, R, del triángulo como se ilustran en la gráfica.



Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$2y=8$ y $3x+8y=24$ encontramos las coordenadas del vértice P.

$2y=8$ y $x-2y=0$, encontramos las coordenadas del vértice Q.

$x-2y=0$ y $3x+8y=24$ encontramos las coordenadas del vértice R.

De lo cual determinamos los vértices $P(\frac{16}{3},4)$, $Q(8,4)$ y $R(6,3)$.

Para encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres vértices podemos utilizar la ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Sustituyendo las coordenadas de cada uno de los 3 puntos determinamos las ecuaciones:

$$16D + 4E + F = -\frac{400}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ (1)}$$

$$8D + 4E + F = -80 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (2)}$$

$$6D + 3E + F = -45 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (3)}$$

Determinamos un sistema de ecuaciones lineales de 3x3. Resolviendo el sistema aplicando el método de suma o resta triangulándolo encontramos $D = -\frac{53}{8}$, $E = -\frac{53}{8}$, $F = 15$

Sustituyendo en la ecuación general determinamos la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - \frac{53}{8}x - \frac{27}{4}y + 15 = 0$$

O también la ecuación de la misma:

$$8x^2 + 8y^2 - 53x - 54y + 120 = 0$$

Ejercicio 3. Reduzca la ecuación de la circunferencia obtenida en el ejemplo anterior a su forma anterior a su forma ordinaria.

Ejercicio 4. Encuentre la ecuación de la circunferencia del ejemplo utilizando las mediatrices del triángulo del ejemplo anterior.

Ejercicio 5. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P(-1,-3), Q(-2,4) y R(2,1).

R. $(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$

Ejercicio 6. Los lados de un triángulo están sobre las rectas $3x - y - 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$ y $x - 3y + 7 = 0$. Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita.

R. $360x^2 + 360y^2 - 600x - 960y + 361 = 0$

4. Determine si la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 9 = 0$ representa a una circunferencia.

Solución.

Para determinar si representa a una circunferencia basta aplicar el discriminante D^2+E^2-4F

En la ecuación $D=-4$, $E=-4$ y $F=9$

Sustituyendo en el discriminante:

$$D^2+E^2-4F=-4$$

$$D^2+E^2-4F<0$$

Esto nos indica que el discriminante es negativo entonces podemos afirmar que la ecuación dada no representa a una circunferencia real.

Ejercicio 5. Determine si la ecuación dada en cada caso representa circunferencia o un punto o una circunferencia no real.

a) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$
b) $x^2+y^2-6x+2y+10=0$
c) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$
d) $x^2+y^2+8x+15=0$
e) $x^2+y^2-3x-4y+15=0$

Ejercicio 6. La circunferencia es tangente a la recta $4x+3y-4=0$ en el punto A(4.-4) y el centro está en la recta $x-y-7=0$. Encuentre su ecuación.

*CORREGIR
Ejercicio 7. La circunferencia es tangente a la recta $3x-4y-22=0$ en el punto A(6,-1) y también es tangente a la recta $4x+4y-12=0$ en el punto B(0,4). Determine la ecuación de la circunferencia.

R. $(x-\frac{36}{25})^2+(y-\frac{127}{25})^2=\frac{81}{25}$

Ejercicio 8. La circunferencia es tangente a ambos ejes coordenados y pasa por los puntos A(4,1) y B(6,3). Encuentre su ecuación.

R. $x^2+y^2-7x-7y+18=0$.

Ejercicio 9. Dados los vértices opuestos de un cuadrado $A(3,0),C(-4,1)$, hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

R. $(0,4),(-1,-3)$

Ejercicio 10. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $2x+3y-1=0$ y $12x-16y-23=0$ y pasa por el punto $P(-\frac{15}{2},\frac{7}{4})$. Trace la gráfica.

Ejercicio 11. Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro C(5,-3) que es tangente a la recta $3x-4y-12=0$ ¿En qué punto se intersectan la recta y la circunferencia.

Ejercicio12. (a) Demuestre que la ecuación $x^2+y^2=2rx$ es la ecuación de una circunferencia de radio r y cuyo centro está en $C(r,0)$. (b) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de radio r y cuyo centro está en $(0,r)$?

Algunas conclusiones.

- Definición. La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que se mueven en un plano cuya distancia a un punto fijo es constante.
- El punto fijo es el centro $C(h,k)$**, el radio es** r.
- La ecuación de la circunferencia se puede deducir directamente de la definición.
- La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria es: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.
- La ecuación de la circunferencia en su forma general es: $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$, $A=B$, $C=0$, D,E,R representan a números reales.
- Si $r^2>0$ o $D^2+E^2-4F>0$, la ecuación representa a una circunferencia.
- Si $r^2=0$ o $D^2+E^2-4F=0$, la ecuación representa a un punto.
- Si $r^2<0$ o $D^2+E^2-4F<0$, la ecuación no es una circunferencia.
- La distancia del centro de la circunferencia al punto de tangencia de una recta con una circunferencia es un radio.

- El centro de una circunferencia que pasa por tres puntos no colineales es el circuncentro.

- Si el centro de una circunferencia está en el eje X, la ecuación tiene la forma: $(x-h)^2 + y^2 = r^2$

- Si el centro de una circunferencia está en el eje Y, la ecuación tiene la forma: $(x^2 + (y-k)^2 = r^2$.