UNIDAD 3: LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

UNIDAD III LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósitos: Reafirmar el conocimiento del método de la Geometría Analítica, al obtener la ecuación de la recta y avanzar en la solución analítica de problemas que involucran relaciones entre figuras rectilíneas estudiadas en Geometría Euclidiana.

Introducción

A Renato Descartes se le considera el primer filosofo de la edad moderna debido a que el tuvo el mérito de sistematizar el método científico. Además fue el primero en aplicar el algebra a la geometría, creando así la Geometría Analítica.

El tema de la línea recta lo ubicamos en el campo de la geometría analítica, en donde se pueden interpretar muchos fenómenos, por ejemplo el movimiento rectilíneo uniforme; siendo la velocidad la constante de proporcionalidad entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla, la fórmula de este movimiento es $v = {}^{d}\!/_{t}$ y consideramos la distancia en función del tiempo podemos una gráfica de la línea recta y pronosticar movimientos futuros.

Condiciones necesarias y suficientes para localizar una recta.

Ejemplo 1.

Cada domingo un estanquillo vende x copias de cierto periódico a \$1.00 cada una. El costo del distribuidor es de \$0.50 por periódico y se paga un costo fijo de almacenaje, envío, etc. de \$100 cada domingo.

Escriba una ecuación que relacione la ganancia P con el número de copias vendidas. Haga la gráfica de esa ecuación. ¿Cuál es la ganancia del estanquillo si vende 1000 copias?, ¿y si vende 5000 copias?

El tipo de variables involucradas.

Una variable es la expresión simbólica representativa de un elemento no especificado comprendido en un conjunto. Este conjunto constituido por todos los elementos o variables, que pueden sustituirse unas a otras es el universo de variables. Se llaman así porque varían, y esa variación es observable y medible

Variable Dependiente $P(x) = ganancia$

Variable independiente $x = copias$

La función que representa dicho fenómeno será

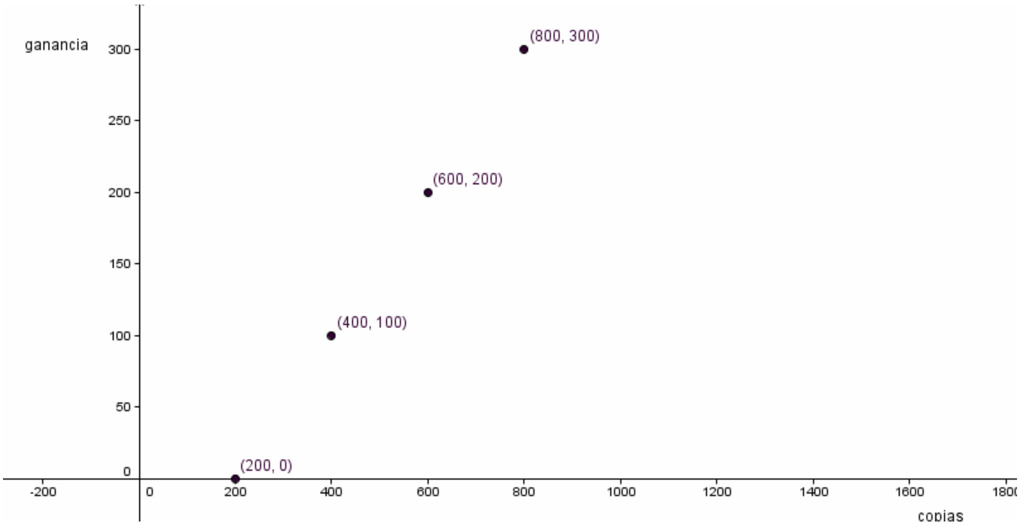
$P(x) = 0.5x - 100$

x	**P(x)**
100	-50
200	0

300	50
400	100
500	150
600	200
700	250
800	300
900	350
1000	400
2000	900
3000	1400
4000	1900
5000	2400

Podemos observar que: a medida que el estanquillo vende más copias, mayor será su ganancia, por lo tanto, si vende 5000 copias

$$P(x) = 0.5x - 100$$
$$P(5000) = 0.5(5000) - 100$$
$$P(5000) = 2400$$



Esta es una función de una recta o función lineal ya que si observamos la gráfica, nos da una recta un poco inclinada.

Al observar la expresión $P(x) = 0.5x - 100$ tenemos que la variable independiente esta elevada a la potencia 1, por lo tanto, es una función lineal.

Ejemplos de funciones lineales

$$f(x) = 2x - 5$$
$$f(x) = -\frac{5}{3}x$$
$$f(x) = -3x + \frac{3}{2}$$

Debido a que el exponente de la variable independiente es 1, se trata de una función lineal y su gráfica es una recta.

Ejemplo 2. Una bicicleta corre a una velocidad constante de $4\frac{m}{s}$. Hacer una gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo y obtener el modelo matemático.

Considerando que $v = \frac{d}{t}$ en donde

v= velocidad

t= tiempo

d= distancia

Despejamos la distancia

$d = vt$

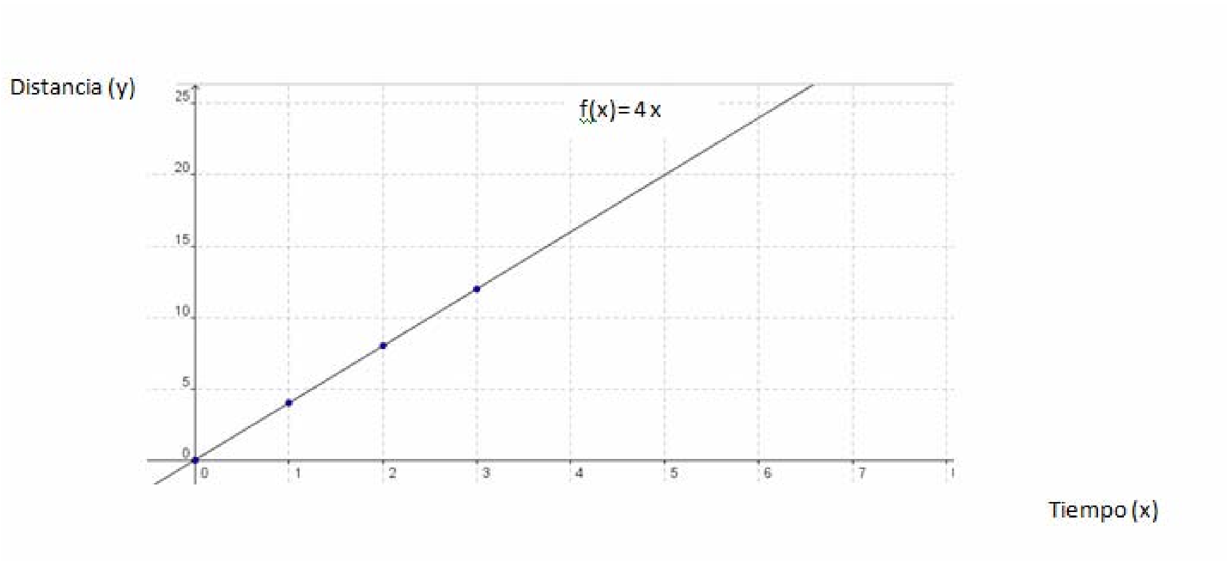
$d = 4\frac{m}{s}$

$d = y$

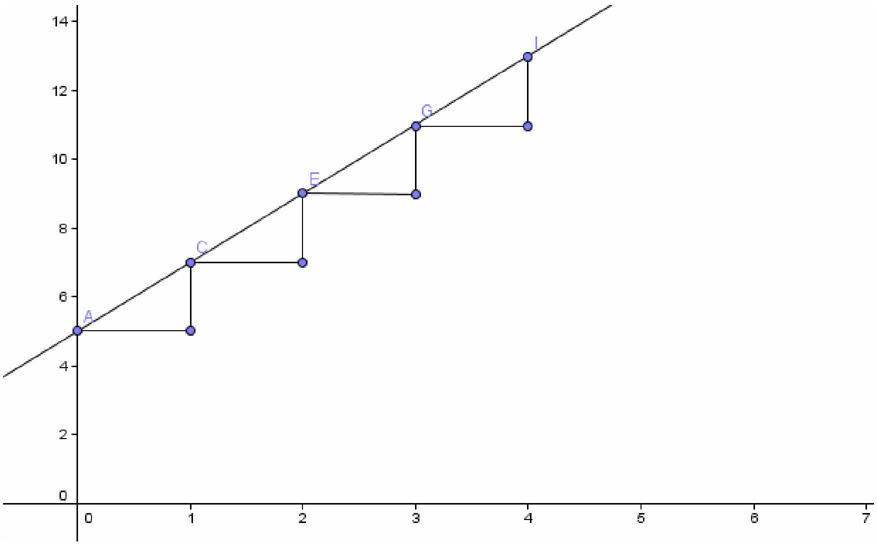
$t = x$

$y = 4x$

tiempo	**distancia**
x	**y= f(x)**
0	0
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
10	40
20	80
30	120



Pendiente de una Recta

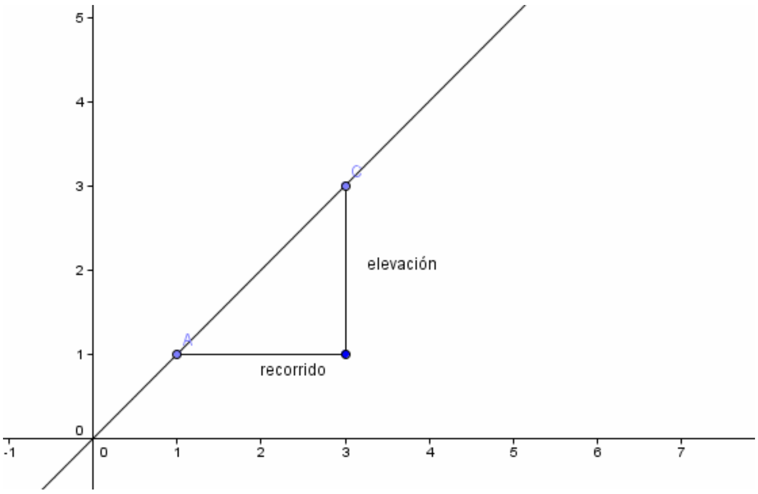


Considere la figura anterior. Cada escalón tiene exactamente el mismo recorrido horizontal y la misma elevación vertical. La razón de la elevación al recorrido, llamada pendiente, es una medida numérica de la inclinación de la escalera. Por ejemplo, si el recorrido se aumenta y la elevación permanece sin cambio, la escalera se vuelve menos inclinada. Si el recorrido se mantiene igual pero se aumenta la elevación, la escalera se vuelve más inclinada. Esta característica importante de una recta se define mejor utilizando coordenadas rectangulares.

Sea $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos distintos con $x_1 \neq x_2$. La **pendiente m** de la recta no vertical L que contiene a P y Q está definida por la formula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ con } x_1 \neq x_2$$

Si $x_1 = x_2$, *L* es una recta vertical y la pendiente *m* de *L* esta indefinida (ya que resulta en una división entre 0)



Como puede apreciarse en la figura anterior, la pendiente *m* de una recta no vertical puede ser vista así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Elevación}{\mathrm{Re}\,corrido}$$

También podemos expresar la pendiente *m* de una recta vertical como

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Cambio \text{ en } y}{Cambio \text{ en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

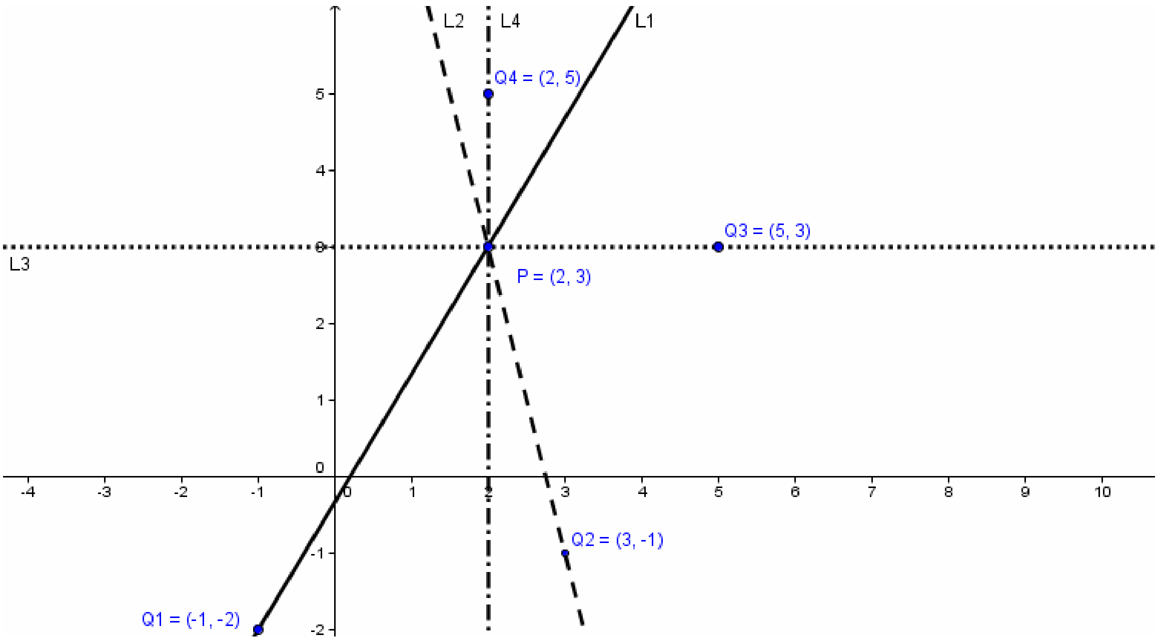
Esto es, la pendiente *m* de una recta no vertical *L* es la razón del cambio en las coordenadas y de P a Q, $\Delta y = y_2 - y_1$, al cambio de las coordenadas *x* de P a Q, $\Delta x = x_2 - x_1$.

Ejemplo3. Calcular las pendientes de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 que tienen los siguientes pares de puntos. Hacer las gráficas de las cuatro rectas en el mismo conjunto de ejes coordenados.

$L_1 : P(2,3), \quad Q_1(-1,-2)$
$L_2 : P(2,3), \quad Q_2(3,-1)$
$L_3 : P(2,3), \quad Q_3(5,3)$
$L_4 : P(2,3), \quad Q_4(2,5)$

Sean m_1, m_2, m_3 y m_4 las pendientes de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4, respectivamente.

$$m_1 = \frac{-2-3}{-1-2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$
$$m_2 = \frac{-1-3}{3-2} = \frac{-4}{1} = -4$$
$$m_3 = \frac{3-3}{5-2} = \frac{0}{3} = 0$$
$$m_4 = \text{no esta definida}$$



Podemos concluir los siguientes hechos:

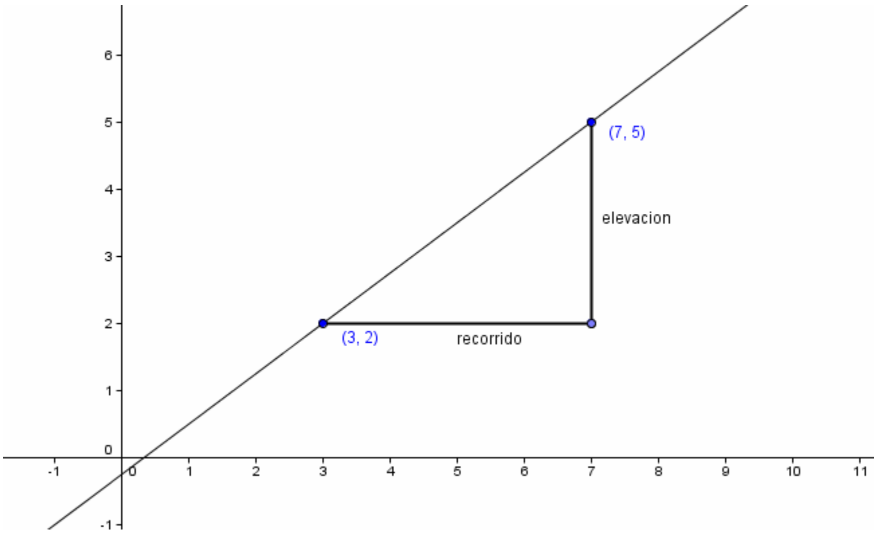
1. Cuando la pendiente de una recta es positiva, la recta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha (L_1).
2. Cuando la pendiente de una recta es negativa, la recta se inclina hacia debajo de izquierda a derecha (L_2).
3. Cuando la pendiente de la recta es cero 0, la recta es horizontal (L_3).
4. Cuando la pendiente de la recta no está definida, la recta es vertical (L_4).

Graficación de una recta dados un punto y una pendiente

Dibujar la gráfica de la recta que pasa por el punto (3, 2) y tiene una pendiente

(a) $\frac{3}{4}$ (b) – $\frac{4}{5}$

Solución (a) Pendiente = elevación/recorrido. El hecho de que la pendiente sea ¾ significa que para un movimiento horizontal (recorrido) de 4 unidades a la derecha habrá un movimiento vertical (elevación) de 3 unidades. Si iniciamos en el punto dado (3, 2) y nos movemos 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba, llegamos al punto (7, 5). Dibujando la recta que pasa por este punto y el punto (3, 2), obtenemos la grafica.

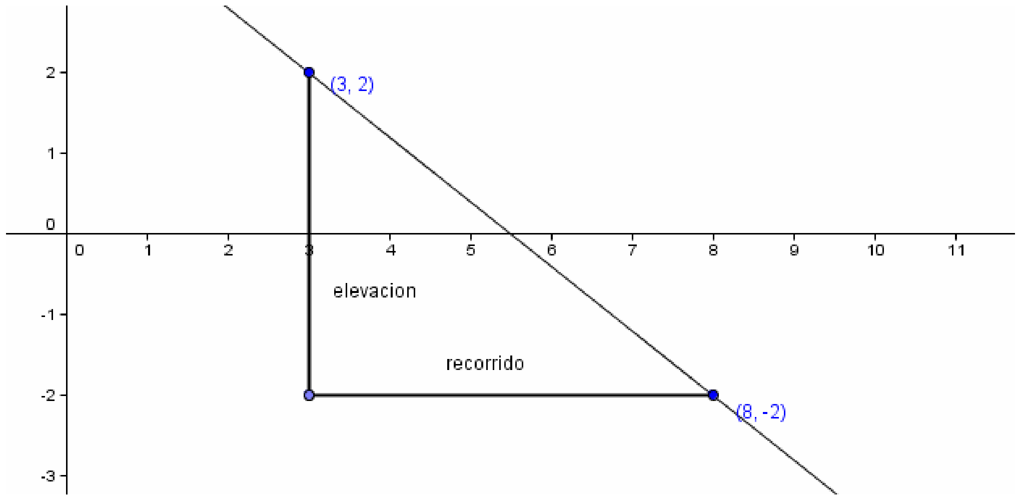


(b) El hecho de que la pendiente sea

$$-\frac{4}{5}=\frac{-4}{5}=\frac{Elevación}{\mathrm{Re}\,corrido}$$

Significa que por cada movimiento horizontal de 5 unidades a la derecha habrá un correspondiente movimiento vertical de -4 unidades (un movimiento hacia abajo).

Si empezamos en el punto dado (3, 2) y nos movemos 5 unidades a la derecha y después 4 unidades hacia abajo, llegamos al punto (8,-2).Al dibujar la recta que pasa por estoy puntos obtenemos la gráfica.



Ecuaciones de Rectas

Una vez asimilando el concepto de pendiente de una recta, estamos preparados para deducir ecuaciones de rectas. Como veremos, hay varias formas de la ecuación de una recta

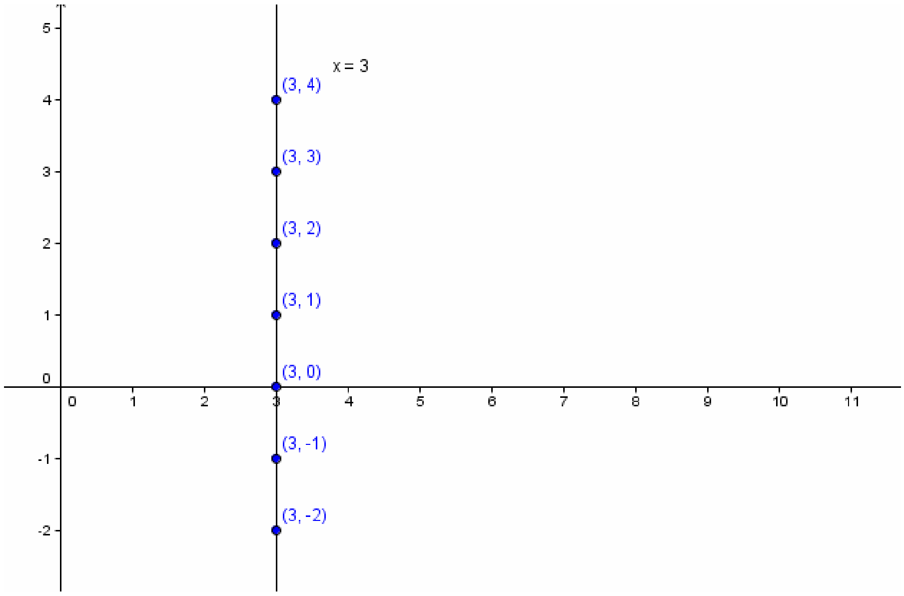
Ecuación de una recta vertical $x = a$

Ejemplo:

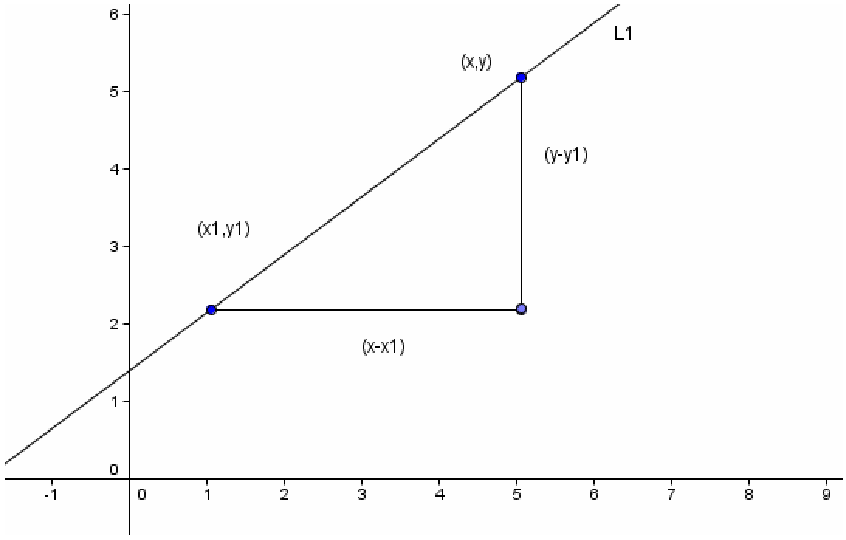
Hacer la gráfica de la ecuación: $x = 3$

Buscamos todos los puntos (x, y) en el plano para los cuales $x = 3$. Así, no importa que coordenada *y* se utilice, la correspondiente coordenada *x* siempre será igual a 3. En consecuencia, la gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección –*x* igual a 3 y pendiente indefinida.

x	**y= f(x)=3**
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3
3	3
4	3



Ahora sea *L* una recta no vertical con pendiente *m* y con el punto (x_1, y_1). Para cualquier otro punto (x, y) sobre *L*, tenemos



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{o} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

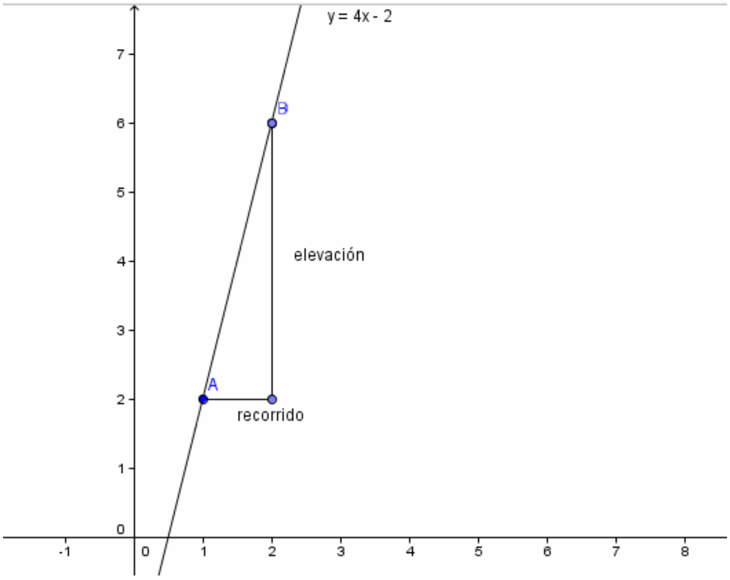
Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

Ejemplo 4. Una ecuación de la recta con pendiente 4 y que pasa por el punto (1,2) puede ser encontrada utilizando la forma punto-pendiente con $m=4$, $x_1=1$ y $y_1=2$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y-2=4(x-1)$$

$$y=4x-2$$



Ejemplo 5. Hallar una ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto (3,2).

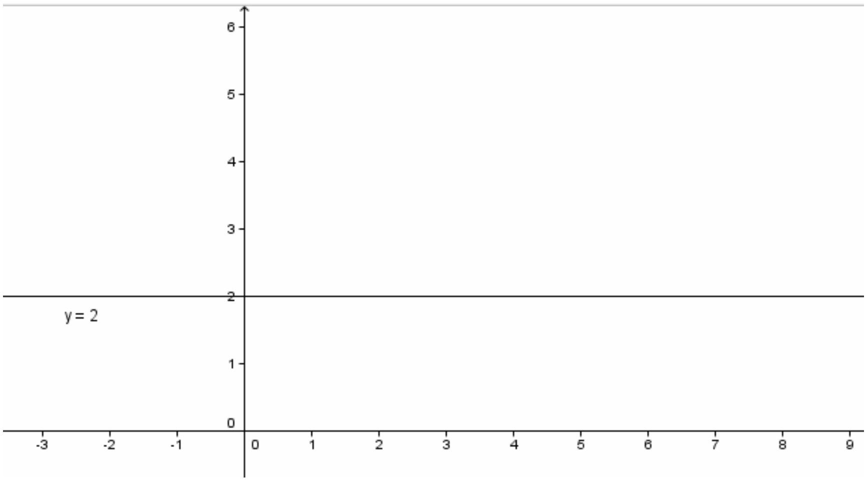
Solución:

La pendiente de una recta horizontal es 0. Para obtener una ecuación, utilizamos la forma punto-pendiente con m=0, $x_1=3$ y $y_1=2$.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=0(x-3)$$

$$y-2=0$$
$$y=2$$



Tenemos como resultado de la gráfica una recta horizontal de la forma $y = b$, donde b es la intersección en *y*.

Determinación de una ecuación de una recta dados dos puntos

Ejemplo 6. Encontrar la ecuación de la recta *L* que pasa por los puntos (2,3) y (-4,5). Hacer la gráfica de la recta *L*.

Solución:

Ya que tenemos dos puntos, primero calculamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{5-3}{-4-2} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Utilizamos el punto A (2,3) y el hecho de que la pendiente $m = -\frac{1}{3}$ para obtener la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Sustituyendo:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x-2)$$

Multiplicando por 3 y reordenando, obtenemos la ecuación:

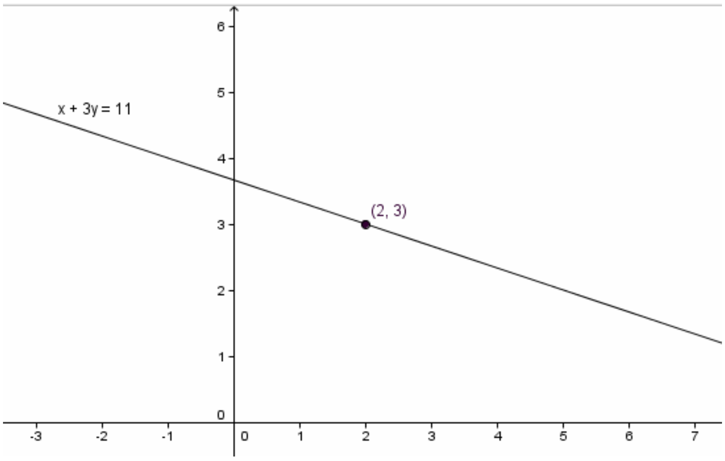
$$x + 3y - 11 = 0$$

Si la recta pasa por el punto A, entonces:

2+3(3)-11=0

Se cumple que: 0=0. Por lo tanto La ecuación obtenida es correcta.

GRÁFICA



De esta forma obtenemos la ecuación de la recta en su **Forma General.**

La ecuación de la recta *L* está en forma general cuando está escrita como

$$Ax + By + C = 0$$

Donde A, B y C son tres números reales y A y B no son ambos cero.

Ya que la ecuación de toda recta puede ser escrita en la forma general, cualquier ecuación equivalente a está es llamada ecuación lineal.

Otra ecuación útil de una recta se obtiene cuando la pendiente *m* y la intersección con el eje *y* son conocidas. En este caso, conocemos tanto la pendiente de la recta, como un punto (0, b) sobre la recta; así podemos utilizar la forma punto-pendiente para obtener la ecuación:

$$y - b = m(x - 0)$$
$$o$$
$$y = mx + b$$

Cuando la ecuación de una recta está escrita en la forma pendiente-intersección, es fácil encontrar la pendiente *m* y la intersección *b* de la recta. Por ejemplo:

Suponga que la ecuación de la recta es

$$y = -2x + 3$$
$$\text{Comparandola con}$$
$$y = mx + b$$

$$\begin{array}{c} y = -2x + 3 \\ \quad\ \uparrow \quad \uparrow \\ y = mx + \ b \end{array}$$

La pendiente de esta línea es -2 y su intersección en *y* es 3.

Ejemplo 7. Hallar la pendiente *m* y la intersección en *y*, *b* de la recta $2x+4y-8=0$. Haga la gráfica de la recta.

Solución:

Para obtener la pendiente y la intersección, transformamos la ecuación a su forma pendiente-intersección. Por tanto, necesitamos resolver para *y*:

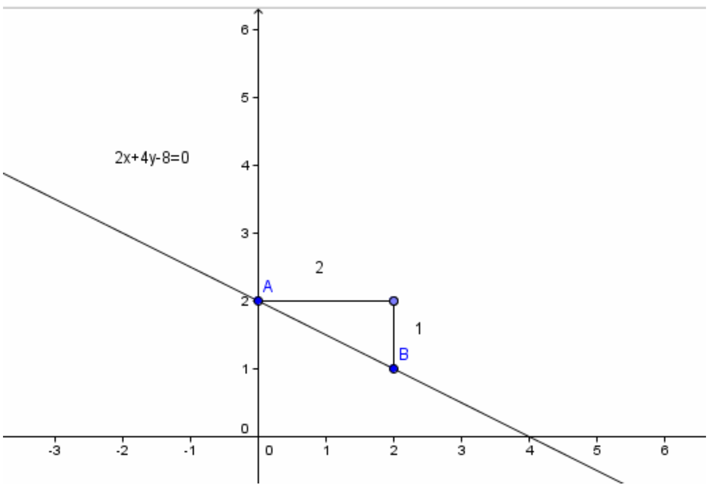
$$\begin{aligned} &2x+4y-8=0 \\ &4y=-2x+8 \\ &y=\underset{\substack{\uparrow \\ m}}{-\tfrac{1}{2}}x+\underset{\substack{\uparrow \\ b}}{2} \end{aligned}$$

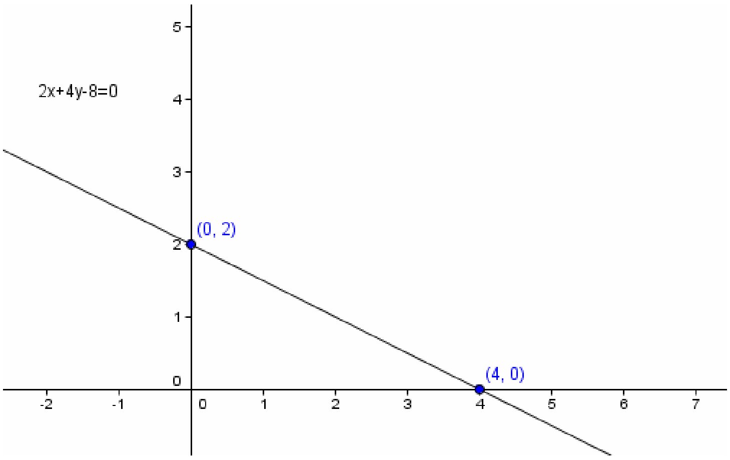
Podemos hacer la gráfica de dos maneras:

1. Usando el hecho de que la intersección es 2 y la pendiente $-\frac{1}{2}$. Después, iniciando en el punto (0,2), contando hacia la derecha 2 unidades y hacia abajo 1 unidad hasta el punto (2,1).
2. Localizando las intersecciones con los ejes, ya que la intersección en *y* es 2, sabemos que una intersección es (0,2). Para obtener la intersección en *x*, hacemos *y*=0 y resolvemos para *x*. cuando *y*=0, tenemos

$$\begin{aligned} &2x+4(0)-8=0 \\ &2x-8=0 \\ &x=4 \end{aligned}$$

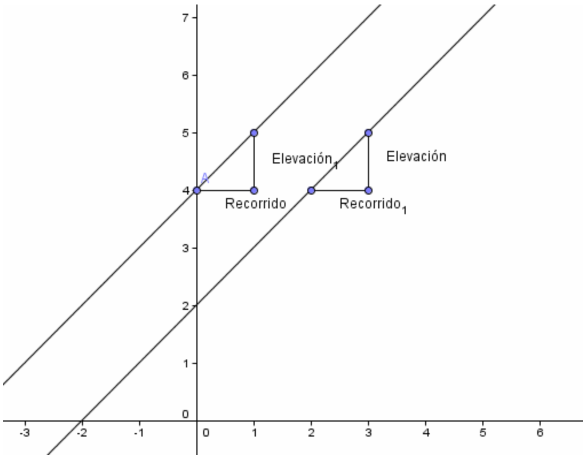
Por lo tanto, las intersecciones con los ejes son (4,0) y (0,2)





Rectas paralelas

Cuando en un plan dos rectas no tienen puntos en común se dice que son paralelas. Ahí trazamos dos rectas y triángulos rectángulos dibujando lados paralelos a los ejes coordenados. Estas rectas son paralelas si, y sólo si, los triángulos rectángulos son semejantes. Pero los triángulos son semejantes si, y solo si, las razones de los lados correspondientes son iguales.



Esto sugiere el resultado siguiente:

Teorema: Dos rectas no verticales distintas son paralelas si, y sólo si, sus pendientes son iguales.

Ejemplo 8. Demostrar que las rectas dadas por las ecuaciones siguientes son paralelas:

$$L: 2x + 3y - 6 = 0$$
$$M: 4x + 6y = 0$$

Solución:

Para determinar si estás rectas tienen pendientes iguales, escribimos cada ecuación en la forma pendiente- intersección:

$$L: 2x+3y-6=0 \qquad M: 4x+6y=0$$
$$3y=-2x+6 \qquad 6y=-4x$$
$$y=-\tfrac{2}{3}x+2 \qquad y=-\tfrac{2}{3}x$$
$$Pendiente=-\frac{2}{3} \qquad Pendiente=-\frac{2}{3}$$

Puesto que estas rectas tienen la misma pendiente $Pendiente=-\frac{2}{3}$, pero diferentes intersecciones en *y*, concluimos que son paralelas.

Condición de paralelismo y perpendicularidad.

A continuación presentamos ejemplos para ilustrar estas propiedades:

Ejemplo 1. Consideremos las rectas cuyas ecuaciones son $3x+2y-6=0 \ y \ \ 6x+4y+6=0$ ¿Son paralelas las rectas?

Solución.

Representando las ecuaciones:

$$3x+2y-6=0 \qquad (L_1)$$

$$6x+4y+6=0 \qquad (L_2)$$

En L_1 , $A_1=3,\ B_1=2,\ C_1=-6$

En L_2, $A_2=6,\ B_2=4,\ C_2=6$

Como $m=-\frac{A}{B}$, entonces

$$m_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{3}{2} \quad y \qquad m_2=-\frac{A_2}{B_2}=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{3}{2} \ y \qquad \frac{A_2}{B_2}=\frac{3}{2}$$

O también,

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$$

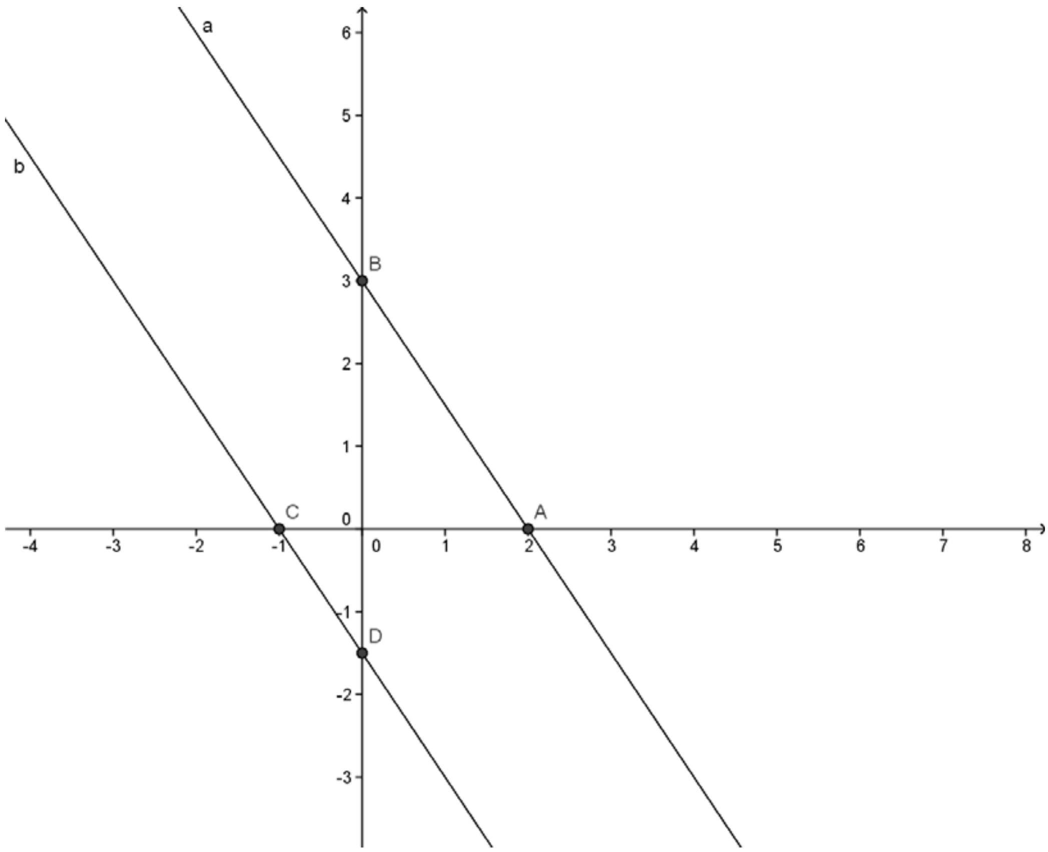
Que se puede representar así:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Sustituyendo los valores determinamos que:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 3(4) - 6(2) = 0$$

Por lo tanto las rectas L_1 y L_2 son paralelas.



Generalizando, la recta L_1 está representada por la ecuación $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y la recta L_2, por la ecuación $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$ la condición de paralelismo: L_1 y son paralelas si y solo si

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

Que se puede representar:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2. ¿Son perpendiculares las rectas $3x+2y-6=0 \ y \ \ 6x-9y+1=0$?

Solución.

De la misma manera que en el ejemplo anterior:

En L_1 , $A_1=3, B_1=2, C_1=-6$

En L_2 , $A_2=6, B_2=-9, C_2=1$

$$m_1=-\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad m_2=\frac{2}{3}$$

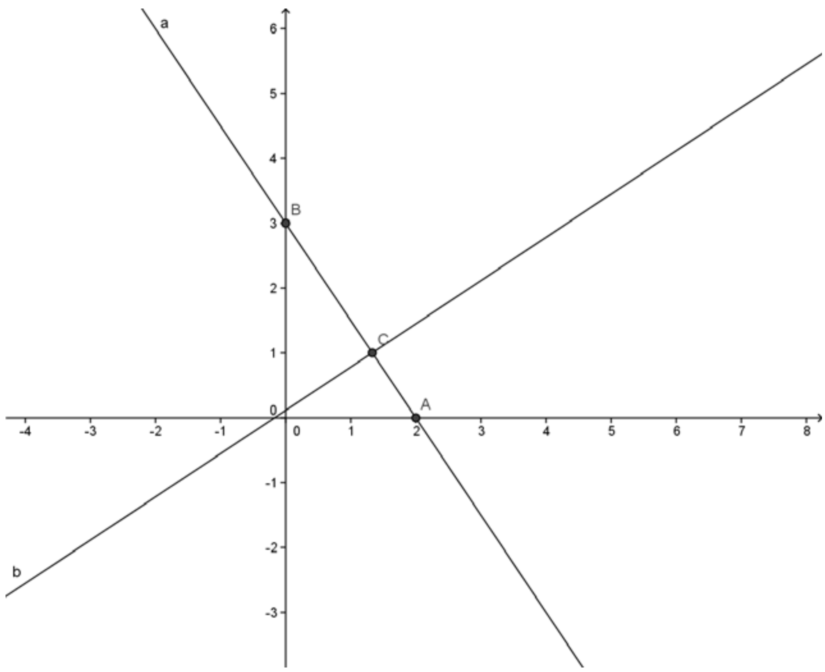
Como las rectas son perpendiculares ,

$$m_1=-\frac{1}{m_2},$$

$$\frac{3}{2}=-\frac{1}{\frac{2}{3}}$$

O sea,

$$(\frac{3}{2})(-\frac{2}{3})=-1$$



Generalizando, En las rectas L_1 y L_2, las pendientes respectivas son:

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

$$-\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{\frac{A_2}{B_2}}$$

$$-\frac{A_1}{B_1} = \frac{B_2}{A_2}$$

O sea,

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

La condición de perpendicularidad se puede expresar de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} A_1 & -B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 1. Encuentre el valor que se debe asignar a A o a B para que las dos rectas cuyas ecuaciones se dan a continuación sean paralelas y en seguida encuentre los valores que hacen a estas rectas perpendiculares entre sí.

a) $Ax - 2y = 4; \quad x + 3y = 7$

b) $4x + 5y = 20; \quad Ax - 6y = 4$

c) $x + 3y + 7 = 0; \quad 5x + By + 4 = 0$

d) $1.2x - 3.6y = 5; \quad x + By = 2$

Ejercicio 2. En cada uno de los casos siguientes encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto A y son respectivamente paralelas y perpendiculares a la recta dada.

a) $A(3,-5); \quad 3x + 2y = 10$

b) $A(-2,-1); \quad x - 7y = 16$

Ejercicio 3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(6,-3)$ y cuyas intersecciones con los ejes coordenados $(a,0)$ y $(0,b)$ son tales que $a + b = 10$

Ejercicio 4.

1. Juan estaba jugando con un papalote este se atoro en la punta de un pino, que se encontraba a 5 metros de distancia. Juan quiere bajar su papalote con una escalera. Si el pino mide 3 metros de altura. ¿Cuál es el ángulo, con respecto al piso, con el que se debe apoyar la escalera para bajar su papalote?

2. Se quiere construir una escuela que se encuentra a la misma distancia de tres pueblos que forman un triangulo cuyas coordenadas son: A(8,-2), B(6,2) y C(3, -7). ¿Dónde debe construirse? Sugerencia: Encuentre las coordenadas del circuncentro.

Problemas en los que se aplica la ecuación de la recta. Plantee y resuelva cada uno de los siguientes problemas.

1. En 1950 la esperanza de una mujer estaunidense era de 72 años. En 1970 era de 75 años. Sea E la esperanza de vida y t el número de años transcurrido desde 1950.
   a) Determine una ecuación de la forma $E = mt + b$
   b) Utilice la ecuación para predecir la esperanza de vida de una mujer en 1993 y en el año 2008.

SOLUCIÓN.

a) Representemos a 1950 con el valor de 0 y 1970 con el valor 20 entonces determinamos dos puntos (0,72) y (20,75) con la forma (t, E).

Determinando la pendiente de la recta que es: $m = \frac{3}{20}$.

La ordenada en el origen es (0,72), entonces $b = 72$

Por lo tanto la ecuación que representa al problema es:

$$E = \frac{3}{20}t + 72$$

Como la ecuación pasa por el punto B(20, 75), sustituyendo en la ecuación obtenida:

$$75 = \frac{3}{20}(20) + 72$$

Obtenemos que, 75=75 esto implica que la ecuación se satisface. Lo que confirma que la ecuación de esperanza de vida es

$$E = \frac{3}{20}t + 72$$

b) En 1993, $t = 43$, sustituyendo en la ecuación obtenemos que $E = 78.5$. La esperanza de vida es de 78 años 6 meses.

En 2008, $t = 58$, sustituyendo, obtenemos $E = 80.7$, es decir, la esperanza de vida será de 80 años con 8 meses 12 días.

Hemos aplicado la ecuación de la recta para resolver el problema, en este caso la "ecuación de la recta con pendiente dada y ordenada al origen".

2. En 1930 el record de los 1500 metros planos era de 3.85 minutos. En 1950 era de 3.70 minutos.
   a) Encuentre una ecuación que se ajuste a los datos del problema.
   b) Utilice la ecuación obtenida para predecir el record en 1974 y en 2001.
   c) ¿En qué año el record será de 3.3 minutos?

3. El costo del transporte en taxi es de $1.50 por el primer $\frac{1}{5}$ km. Por 3 km el costo es de $4.30. Encuentre una ecuación de acuerdo a los datos. ¿Cuál es el costo de un viaje de 7 km y qué distancia puede viajar una persona por $20?

4. En 1930 el record de los 1500 metros planos era de 3.85 minutos. En 1950 era de 3.70 minutos.
   d) Encuentre una ecuación que se ajuste a los datos del problema.
   e) Utilice la ecuación obtenida para predecir el record en 1974 y en 2001.
   f) ¿En qué año el record será de 3.3 minutos?

5. El valor de una máquina fotocopiadora era de $5200. Después de dos años la máquina se deprecia a $4225. Encuentre el valor de la máquina después de 8 años.

6. El agua se congela a $32^{\circ}F$ y a $0^{\circ}C$. El agua hierve a $212^{\circ}F$ y $100^{\circ}C$. ¿Qué temperatura Celsius corresponde a una temperatura ambiente de $70^{\circ}F$?

7. Un negociante determina que cuando vende 7000 unidades de un producto obtiene una ganancia de $22000. Para una venta de 8000 unidades la ganancia es de $25000. ¿Cuál es la ganancia correspondiente a una venta de 10000 unidades?

8. Un tubo de cobre tiene una longitud de 100 cm a i8ºC. A 20ºC la longitud del tubo es 100.356 cm. Encuentre la longitud del tubo a 40ºC y a 0ºC.

9. Si rentas un automóvil por un día y viajas 100 km el costo es de $30. Si viajas150 km el costo es de $37.50. ¿Cuál es la ecuación que se ajusta a los datos? ¿Cuánto costará rentar el automóvil por un día para realizar un viaje de 200 km?