UNIDAD 2: SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMETRICOS

UNIDAD 2: SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMETRICOS

Propósitos: Mostrar una visión global del método de la Geometría Analítica como el medio para resolver problemas algebraicos. Proporcionar los elementos que servirán en unidades posteriores para el método en situaciones más complejas.

PRESENTACIÓN

Desde tiempos remotos, la humanidad tiene la necesidad de orientarse de alguna manera para ubicar lugares y protegerse del clima, con la finalidad de localizar espacios en donde conseguir alimentación para subsistir, guiándose por árboles, rocas, ríos o plantas, etc. Posteriormente, se utilizaron las estrellas para dirigirse a lugares conocidos, todo ello es parte de los conocimientos básicos que posteriormente utilizaron los estudiosos en diferentes campos del conocimiento. En particular, en el siglo XVII René Descartes introdujo el Sistema de Coordenadas Cartesianas o Sistema de Coordenadas Rectangulares en dos dimensiones y tres dimensiones, éste sistema tiene la ventaja de localizar puntos en el plano o el espacio, por ejemplo en dos dimensiones se representar segmentos conocidas las coordenadas de sus extremos, polígonos conocidas las coordenadas de los vértices, además en este sistema de coordenadas identificamos líneas rectas o curvas que son la representación grafica de ecuaciones o relaciones o funciones.

Sistema de coordenadas polares. El sistema se fundamente en los estudios realizados por el astrónomo Hiparco (190 ac - 20 ac) y el matemático Arquímedes , siendo sistematizado por Isaac Newton en el siglo XVII (método de fluxiones), aunque el término coordenadas polares se atribuye a Gregorio Fontana y utilizado en el siglo XVIII por los matemáticos italianos. En coordenadas polares, usando la ecuación polar y graficando encontraremos graficas de espirales, cardioides, rosas, lemmiscatas..etc.

Coordenadas Geográficas

En Geografía es común utilizar el sistema de coordenadas geográficas que se establecen a partir del Ecuador Terrestre y el meridano de Greenwich y cuyas medidas latitud y longitud se miden en grados minutos y segundos.

Otros sistemas de Coordenadas

En cursos posteriores se utilizaran otros sistemas y los indicados en párrafos anteriores, por ejemplo coordenadas rectangulares en tres dimensiones, coordenadas paramétricas en dos dimensiones, coordenadas cilíndricas, coordenadas esféricas, Coordenadas elípticas , hiperbólicas…etc

Lugares geométricos. Son parte de la temática propuesta en esta unidad y se obtienen en base a la aplicación de condiciones geométricas básicas de la Geometría Analítica que mediante los procesos algebraicos obtendremos rectas circunferencias elipses y algunas parábolas.

1. **Sistemas de referencias en dos dimensiones**

Uso de la Guía Roji:

Si revisamos los planos presentados en la Guía Roji de la Ciudad de México, nos encontraremos que la localización de calles se establece mediante un cuadriculado y en la intersección de una columna y renglón identificados por números y literales respectivamente ubicamos la dirección buscada según el plano utilizado

Líneas del metro.

Es común que entre personas para localizarse en alguna estación del metro, se pongan de acuerdo en el nombre de la estación y la dirección en donde puede ser al inicio o final de la estación o en la taquilla o debajo del reloj, para ello es necesario conocer las estaciones o el mapa del metro.

Otros sistemas de referencia

Actualmente con el uso de las redes de telefonía la localización de personas es directa en base a un punto de referencia

2 Sistema de Coordenadas Rectangulares o Plano Cartesiano

En cursos básicos de matemáticas en nivel bachillerato es común utilizar de referencia el Plano Cartesiano y algunas ocasiones el Plano Polar.

Plano Cartesiano.

El Plano Cartesiano se utilizó en secundaria para graficar puntos, líneas y curvas de manera ilustrativa, ahora en bachillerato conviene presentarlo en base a la definición del *producto cartesiano* de números reales en donde consideraremos dos rectas graduadas con una de medida establecida, en el punto de intersección de las rectas que son perpendiculares se define el origen del sistema y a partir de ello también definimos el sentido positivo o negativo.

Definición Plano Cartesiano:

Recordemos al eje horizontal lo definimos por eje de abscisas o eje X, y la recta vertical por eje de ordenadas o eje Y , cuando realizamos el producto cartesiano obtenemos infinidad de puntos que corresponden a parejas ordenadas de números reales (x , y) que se sintetiza de la siguiente forma.

$$R^2 = R \, X \, R = \{(x, y) \in R \mid \; x \in R \wedge y \in R \}$$

La característica importante del producto cartesiano es la de cubrir el plano con infinidad de puntos, en donde se cumple la **correspondencia biunívoca.**

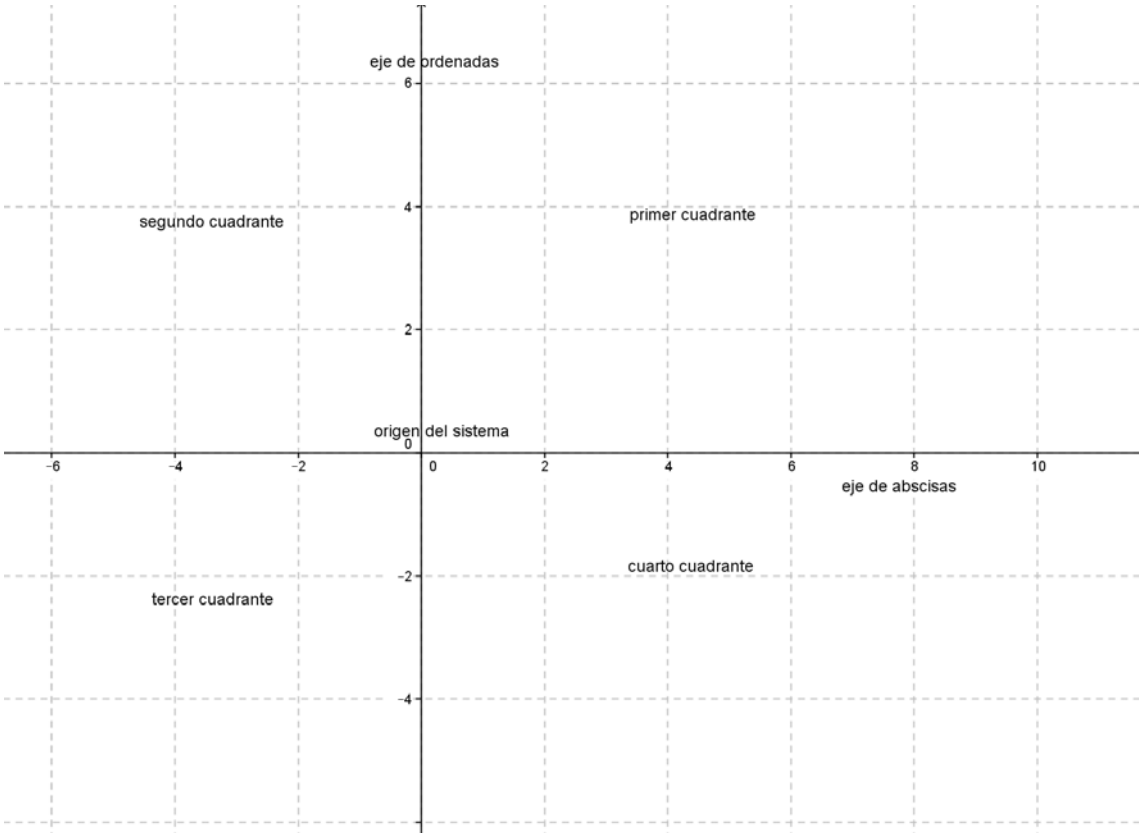
Correspondencia biunívoca:

Si elegimos un punto arbitrario del plano al que denotaremos mediante la letra mayúsculas, por ejemplo A (4, 5) a esta pareja le corresponde un valor para la abscisa (4) y el valor de la ordenada (5), o también si elegimos en el eje de las abscisas (4) y en el eje de ordenadas (5) en el punto de intersección de rectas paralelas a cada eje le corresponderá el punto del Plano (4, 5) al que identificamos por A(4, 5) , que es conocida por correspondencia biunívoca.

Nota: por conveniencia a los puntos del Plano los identificaremos por medio de letras mayúsculas seguida por sus coordenadas, en donde el primer elemento es la abscisa y el segundo la ordenada.

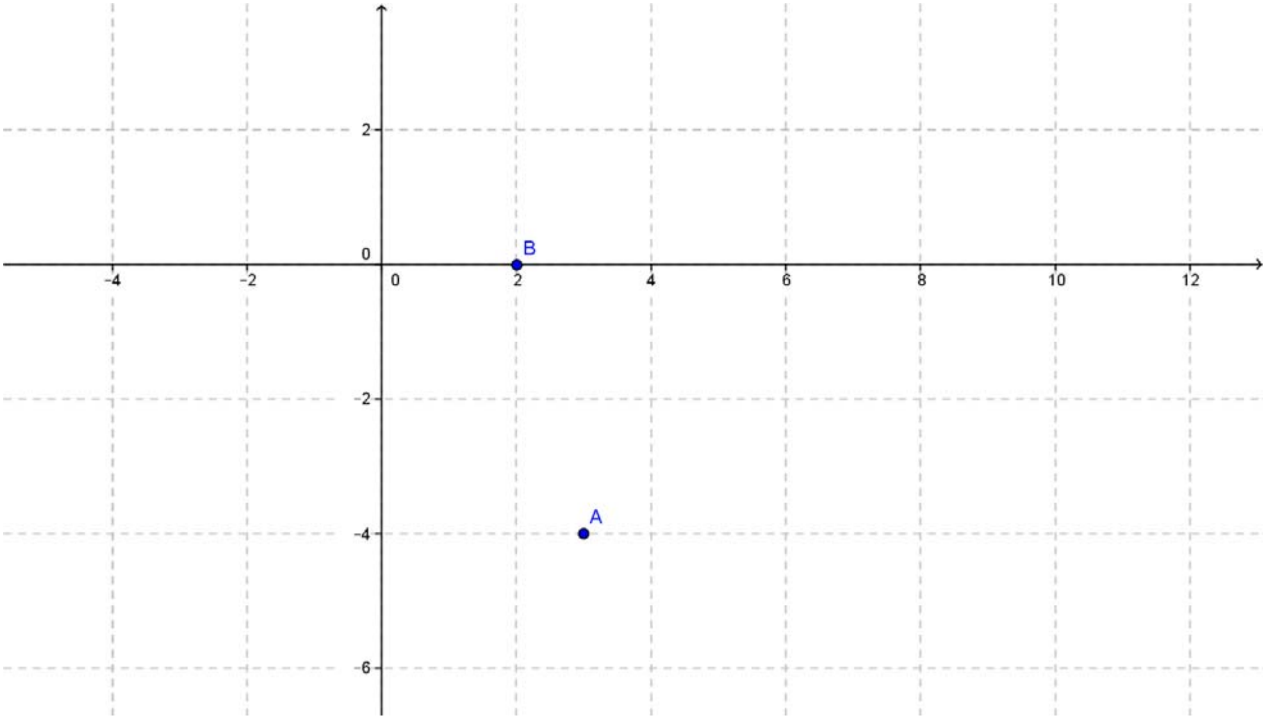
Origen del sistema

Cuando representamos los ejes de abscisas y ordenadas, el Plano Cartesiano se divide en cuatro regiones que denominamos cuadrantes y al punto de intersección de las rectas lo identificaremos por el origen del sistema



Identificación de puntos en el Plano Cartesiano.

Recordando en textos de geometría analítica se utilizan letras mayúsculas para cada representar puntos seguida de los elementos correspondientes a la abscisa y ordenada, por ejemplo A (3, - 4), B (2, 0),



Ejercicio.

a) Localiza en el Plano Cartesiano los siguientes puntos:

A (- 4,-3), B (4, 0), C (-2.5, -3) , O (0,0) además indica el cuadrante donde se localiza y el valor numérico de la abscisa y ordenada.

b) Localiza en el plano cartesiano los siguientes puntos e indica el cuadrante en donde se encuentra cada uno

$$A(\sqrt{2}, \frac{3}{2}) \quad , \quad B(-\frac{4}{5}, \frac{6}{7}) \quad , \quad C(-\sqrt{7}, \sqrt{11})$$

Simetrías

Con la idea fundamental de usar conceptos anteriores se proponen algunos ejercicios para localizar puntos simétricos de tal manera que se observen algunas regularidades.

Ejercicios

Consideremos el punto D (2, 5), ahora determina las coordenadas si es.

a) Simétrico respecto al eje X, denótalo por D1
b) Simétrico respecto al eje Y, denótalo por D2
c) Simétrico respecto al eje origen, denótalo por D3

Explica

a): cuándo se obtienen las coordenadas de un punto simétrico respecto al eje de las abscisas ¿Cuál es la coordenada que cambia el signo?

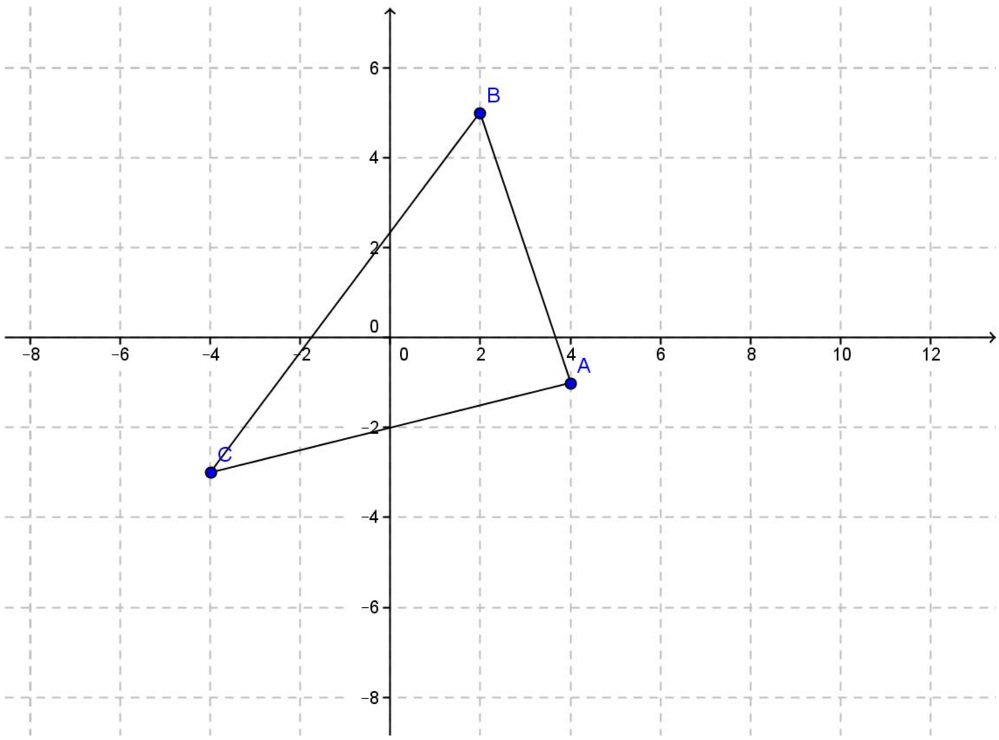
b): cuándo se obtienen las coordenadas de un punto simétrico respecto al eje de las ordenadas ¿Cuál es la coordenada que cambia el signo?

a): cuando se obtienen las coordenadas de un punto simétrico respecto al origen ¿Cuál es la coordenada que cambia el signo?

Ejercicio 1.Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC, son :

A (4,- 1), B (2, 5) , C (- 4,-3), Localiza los puntos y forma el triángulo

a) Localiza los vértices del triangulo si las coordenadas son simétricas respecto al eje X.
b) Localiza los vértices del triangulo si las coordenadas son simétricas respecto al eje Y.
c) Localiza los vértices del triangulo si las coordenadas son simétricas respecto al origen



Pregunta.

Los triángulos obtenidos por simetrías, ¿son congruentes? Explique.

Conceptos por descubrir.

Entre las ventajas del uso de coordenadas es localizar segmentos conocidos las coordenadas de los extremos, calcular su longitud, determinar la inclinación del segmento con respecto al eje X, obtener las coordenadas de los puntos medios , o las coordenadas de los puntos cuando es dividido el segmento en **n** partes (congruentes) etc.

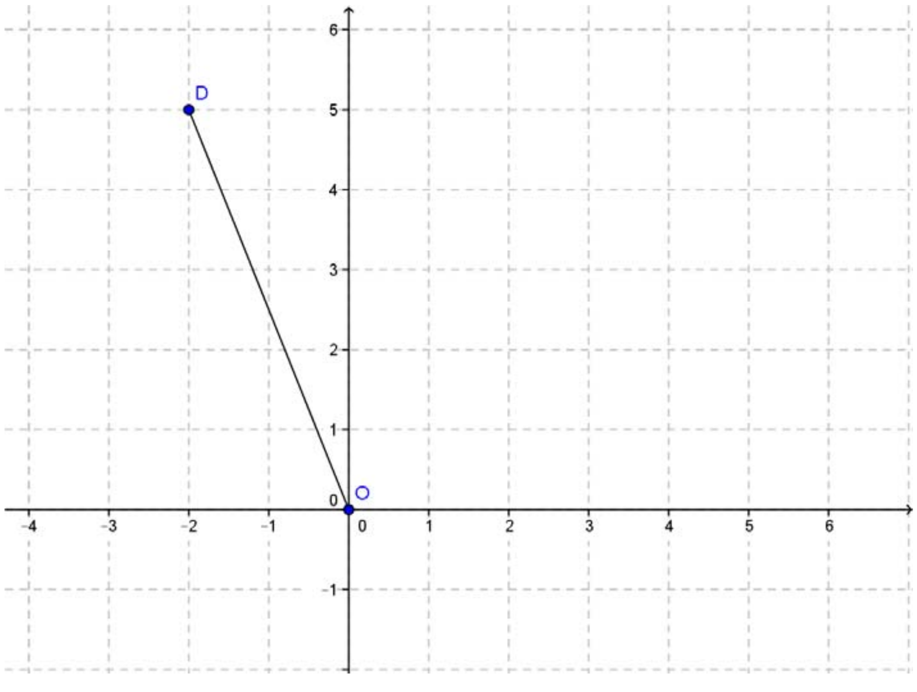
Longitud de un segmento.

Para determinar la longitud de un segmento cuando las escalas en los ejes son iguales se puede medir usando regla graduada, compas o con las proyecciones de puntos en los ejes coordenados para así obtener las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y con la aplicación del teorema de Pitágoras obtenemos la longitud del segmento.

Por ejemplo.

Calcula la longitud del segmento OD, si D (2, 5) para ello recordemos que el origen del sistema es O (0,0).

Localizando los puntos en el sistema de coordenadas se tiene

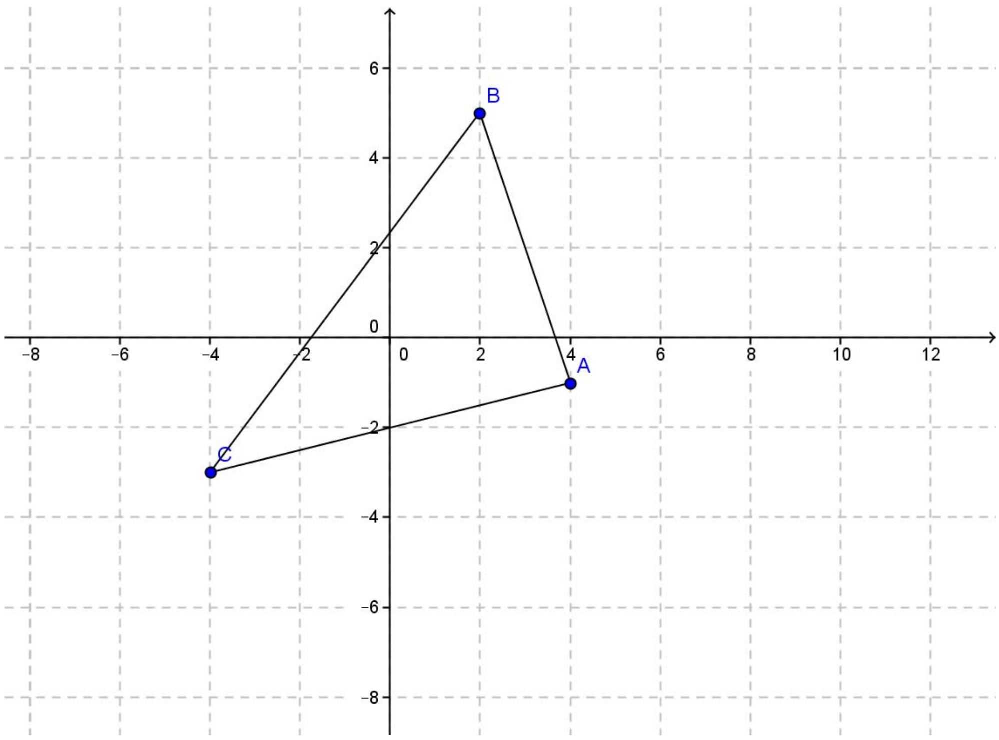


La longitud OD se obtiene mediante el triángulo rectángulo que se forma con las proyecciones a los ejes y obtenemos la longitud de cada cateto considerando el valor absoluto en donde las longitudes son 2 y 5 unidades, por teorema de Pitágoras determinamos la longitud de la hipotenusa.

Ejercicio 2. Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC, son:

A (4,- 1), B (2, 5) , C (- 4,- 3), Localiza los puntos y forma el triángulo.

a) Calcula el perímetro.
b) Utiliza las coordenadas de los vértices del triangulo anterior para formar otro triángulo cuando las coordenadas son simétricas respecto al eje X, además calcula el perímetro



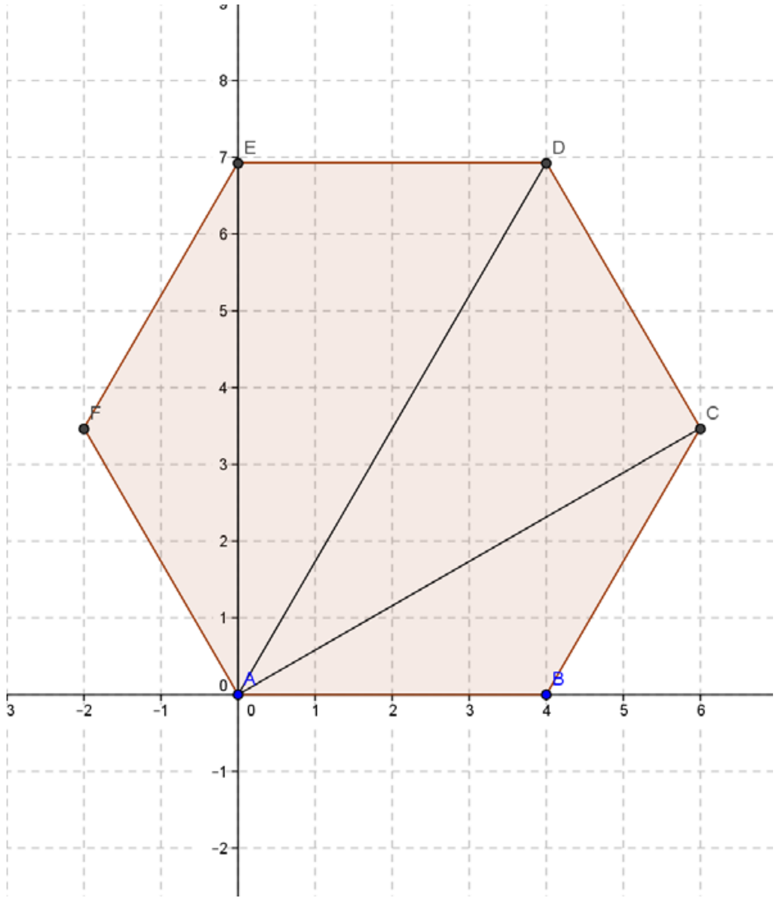
Pregunta. Los triángulos obtenidos por simetrías, ¿son congruentes? Explica.

Figuras geométricas.

Con las coordenadas de vértices en el plano cartesiano es posible localizar polígonos regulares o irregulares y en donde podemos calcular longitudes, medidas de ángulos interiores, áreas, perímetros, usando conocimientos de geometría euclidiana y trigonometría.

Ejercicio 3. En la siguiente figura se presenta un hexágono regular de 4 centímetros de lado, usando geometría

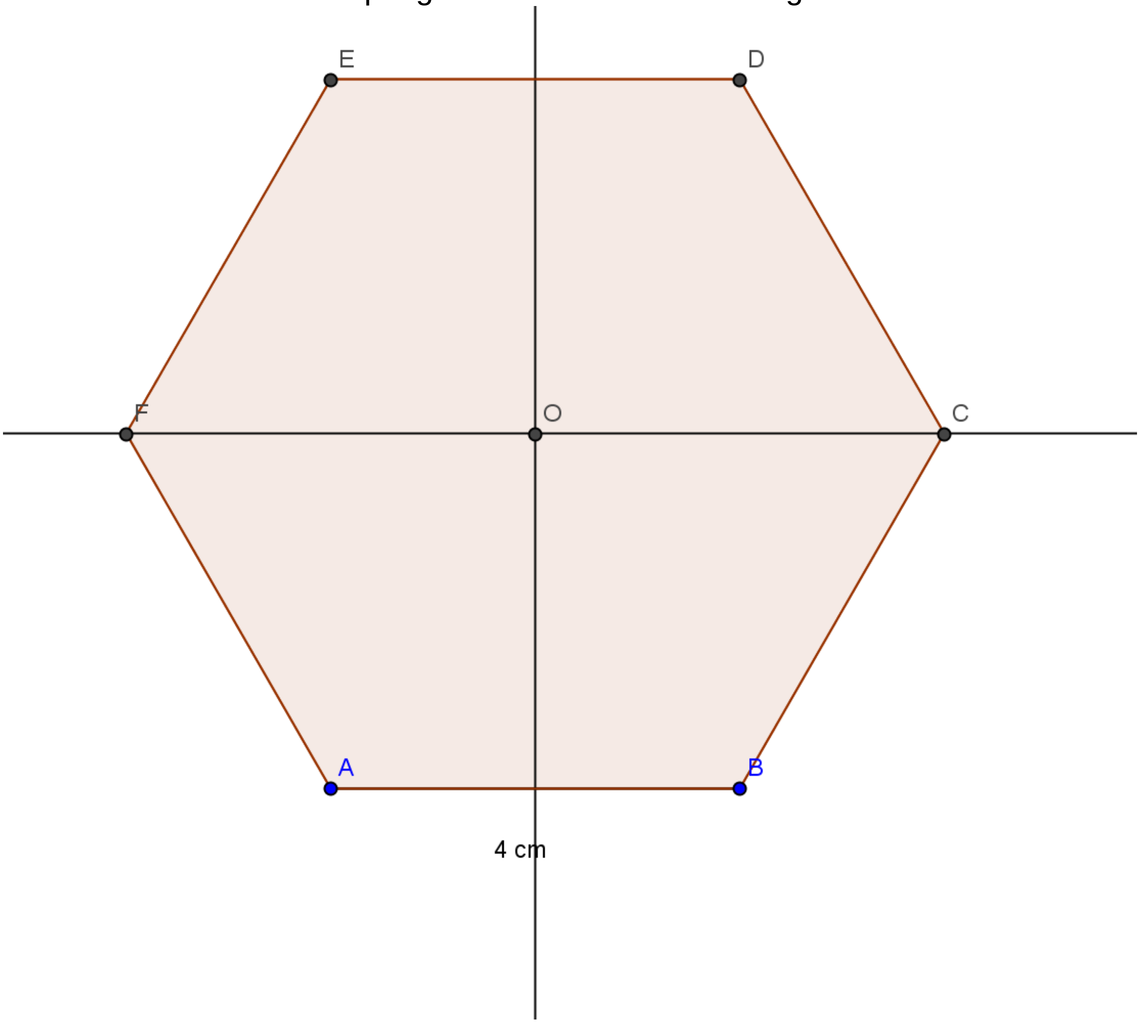
a) Localiza las coordenadas de cada vértice.



b) Calcula la longitud de las diagonales trazadas desde un vértice.
c) Calcula el área.

Sugerencia

Este ejercicio tiene diferentes maneras de proponerse al alumno, por ejemplo si el centro del polígono es el origen del sistema.

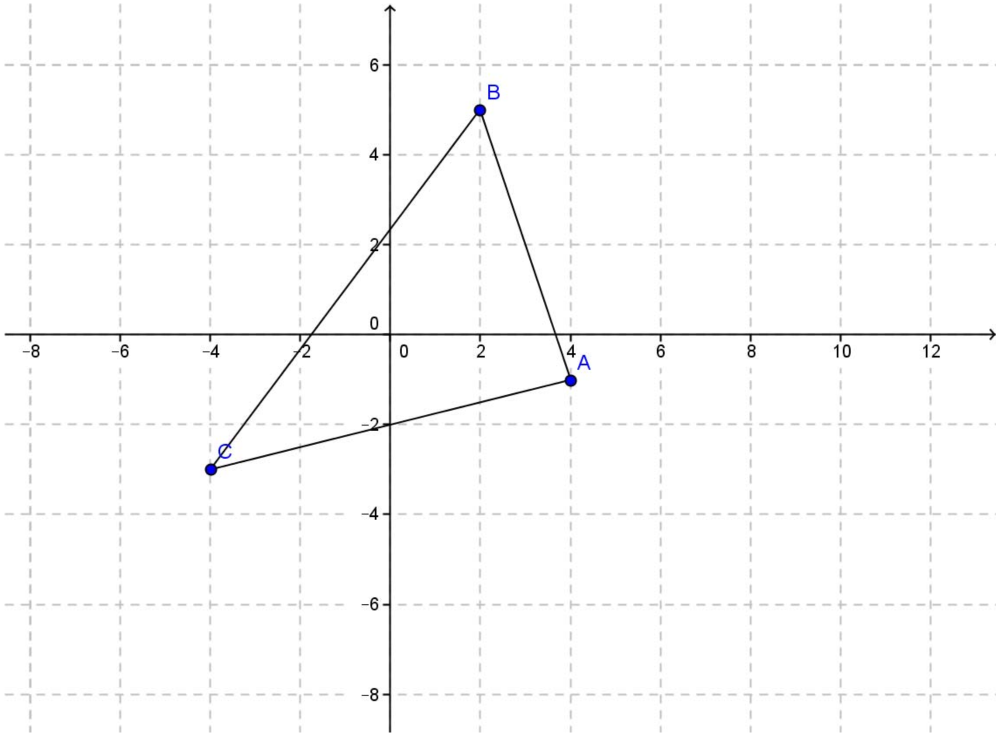


¿Cómo se obtienen las coordenadas de cada vértice? y ¿las longitudes de cada diagonal?

Ejercicio 4. Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC, son:

A (4,- 1), B (2, 5), C (-4,-3), Localiza los puntos y forma el triángulo

a) Si las coordenadas son simétricas respecto al eje X. ¿Cuáles son?
b) Ahora localiza los vértices del triángulo, si las coordenadas son simétricas respecto al eje Y.
c) Finalmente localiza los vértices del triangulo, si las coordenadas son simétricas respecto al origen



Preguntas.

Los triángulos obtenidos por simetrías, ¿son congruentes?

Calcula el perímetro de cada triángulo.

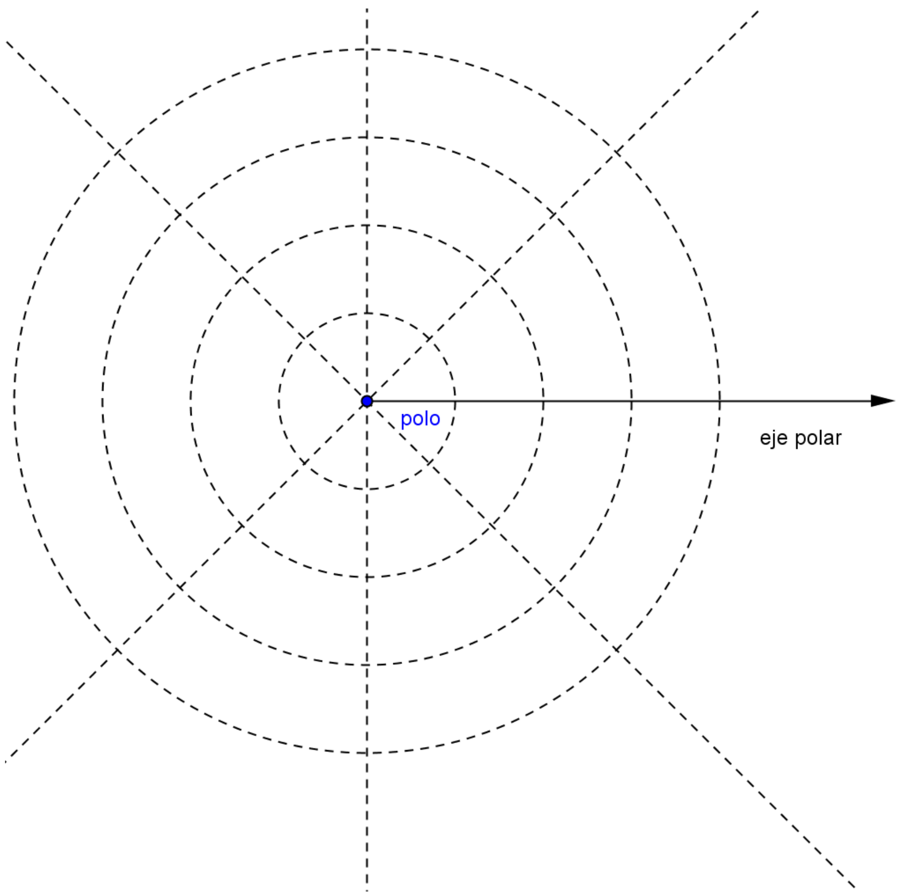
Determina las coordenadas del punto medio de cada lado

OTRO SISTEMA DE COORDENADAS.

En nivel bachillerato a manera introductoria se sugiere conocer lo básico del sistema de Coordenadas Polares, por ejemplo identificar puntos

1. **SISTEMA DE COORDENADAS POLARES.**

El sistema de coordenadas se define mediante la longitud que hay desde un punto de referencia denominado **polo** y el ángulo que define con respecto a un eje denominado **eje polar,** el ángulo que consideraremos se mide en grados o radianes y se define positivo en el sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj.



En el Plano Polar para localizar puntos, inicialmente se mide el ángulo indicado después localizamos la longitud del radio que corresponde a una circunferencia. La notación de puntos es con letras mayúsculas seguidas de las coordenadas por ejemplo A (r,).

PLANO POLAR.

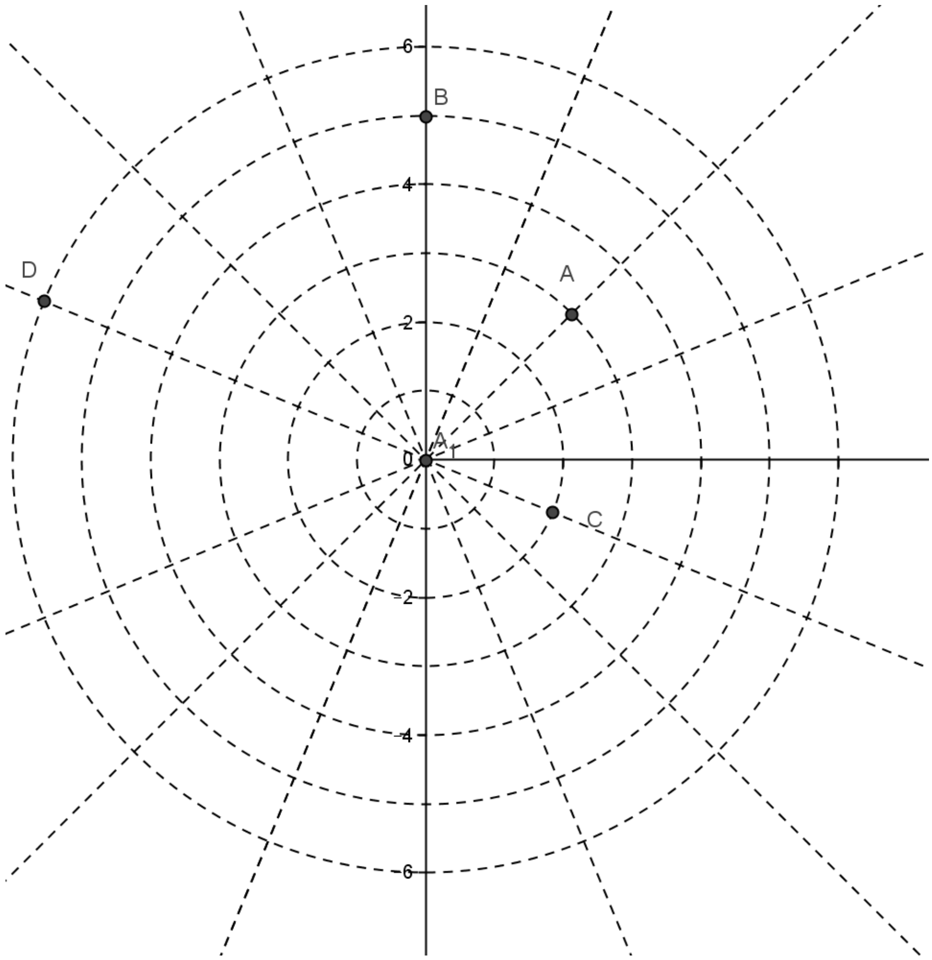
La característica que se tiene cuando se localizan puntos en el plano polar es que cada punto puede localizarse en diferentes coordenadas, por ejemplo.

$$A\ (3,\ 45^0) = A(3,-315^0) = A\ (-3,-135^0)$$

$$B\ (5,\ 90^0) = B(5,-270^0) = B\ (-5,-90^0)$$

$$C\ (2,-22.5^0) = C(2,337.5^0) = C\ (-2,112.5^0)$$

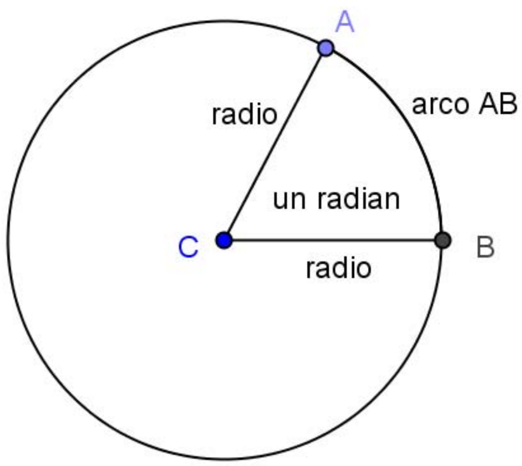
$$D\ (6,\ 157.5^0) = D(-6,-22.5^0) = D(6,-202.5^0)$$



RADIAN.

Otra manera de localizar puntos en el Plano Polar es cuando el “ángulo “es el equivalente a radianes”.

Definición de radian. Cuando se tiene el ángulo central en un círculo y la longitud del arco de circunferencia es igual a la longitud del radio de define un radián.



FÓRMULA DE CONVERSIÓN GRADOS A RADIANES:

Elementos de geometría

$$\text{longitud de circunferencia} = 2\pi\,\text{radio}$$

Si radio es 1 (unidad)

$$\text{longitud de circunferencia} = 2\pi$$

$$\text{ángulo central} = 360^0$$

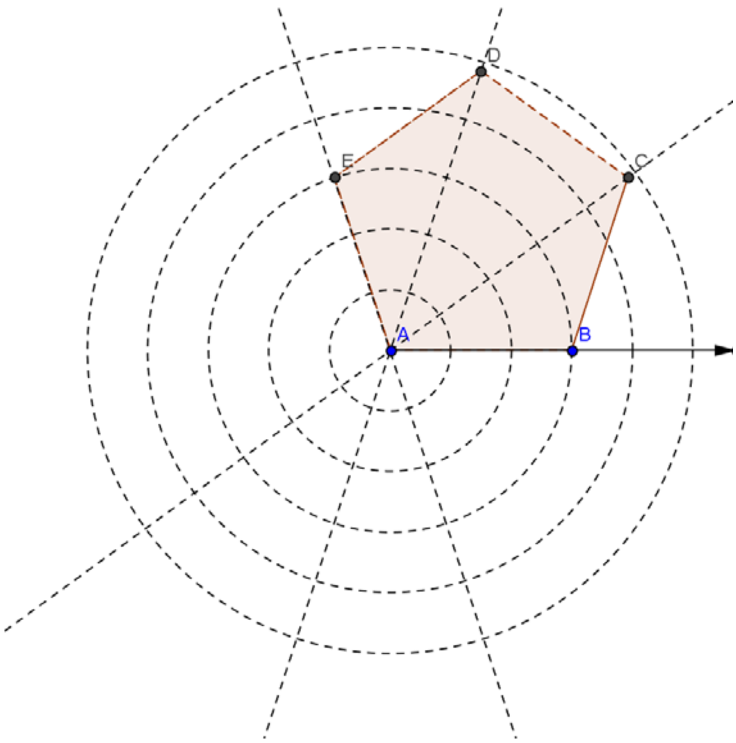
FÓRMULA

$$2\pi = 360^0$$

Ejercicio 5**.** Use el plano polar y la fórmula de conversión para localizar los siguientes puntos

$$A\ (\ 3,\ \pi)\ ,\ \ B(3,\ \ 2)\ ,\ C\ (\ 5,\ \frac{\pi}{4})\ ,\ D\ (\ -4,\ -\frac{3\pi}{2}\ )$$

Ejercicio 6. Si el lado de un pentágono regular mide 3 centímetros y está en el eje polar. Localiza los demás vértices.



ECUACIONES POLARES.

Con la finalidad de dar sentido a la localización de puntos en coordenadas polares se sugiere al profesor proponer ecuaciones polares, y verificar algunas curvas por ejemplo cardiodes, espirales, pétalos o cónicas etc.

EJEMPLOS. Proponer las siguientes ecuaciones cómo tarea o investigación

$r = 4\,\text{sen}\,(2\theta)$ $\qquad r = 4\cos\theta$ $\qquad r = 3$ $\qquad r = 2 - 2\cos\theta$

$r = 1 + \text{sen}\,\theta$ $\qquad r = 1 - 2\cos\theta$

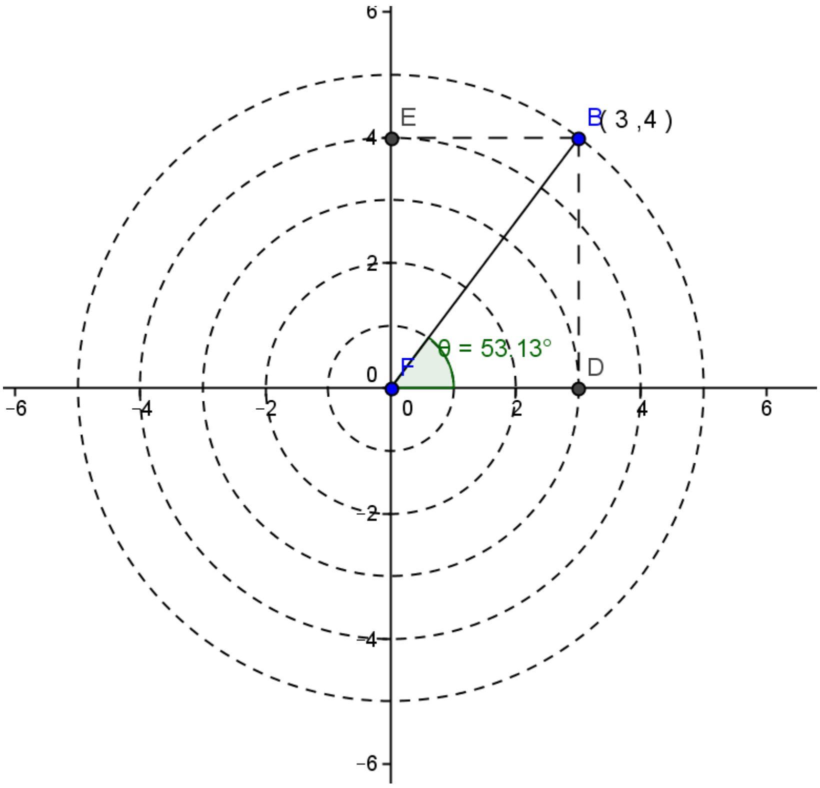
CONVERSIÓN DE COORDENADAS POLARES A RECTANGULARES Y VICEVERSA.

Los dos sistemas presentados se relacionan mediante algunas fórmulas que se obtienen de trigonometría, por ello utilizaremos las coordenadas rectangulares y las proyecciones sobre los ejes. A la vez sí colocamos el plano polar coincidiendo el eje polar con el eje X y el polo con el origen del sistema, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

Convertir a coordenadas polares el punto $A(3,4)$

Formando el triángulo rectángulo con las proyecciones en cada eje, por teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es 5, el ángulo agudo se obtiene por razón trigonométrica

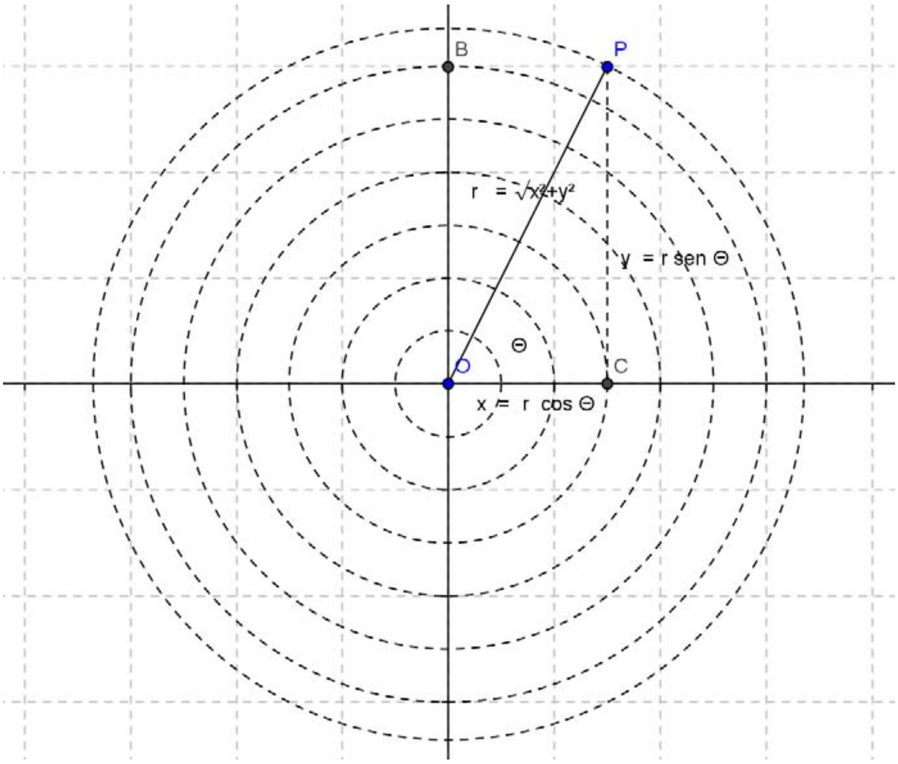


Por lo anterior las coordenadas polares del punto A son:

$A(5, 53^0 13')$

FORMULAS DE CONVERSIÓN

De manera general se obtienen las formulas de conversión mediante un punto arbitrario ubicado en el Plano Cartesiano denotado por P (x, y) a la vez lo representamos en el Plano Polar.



Longitud

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ángulo

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad \theta = \operatorname{ang}\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejercicio 7.En los siguientes ejercicios es recomendable primero localizar los puntos y hacer la transformación necesaria.

a) Convierte cada punto a coordenadas polares

$A(5,2)$, $B(-1,4.5)$, $C(0,4)$, $D(-3,-5)$, $E(5,-2)$

b) Convierte cada punto a coordenadas cartesianas.

$F(4,\pi)$, $G(-1,\frac{\pi}{4})$, $H(0,1)$, $I(-3,2\pi)$, $J(-2,200^0)$

c) En el plano cartesiano, las coordenadas de los vértices de un triángulo son :

$A(4,0),\ B(2,1),\ C(-1,-5)$ ¿Cuáles son las coordenadas polares?

d) En el plano cartesiano, las coordenadas de los vértices de un cuadrado son :

$C(0,0),\ A(5,0)\ ,\ B(5,5), D(0,5)$ ¿Cuáles son las coordenadas polares?

2. En el plano cartesiano, las coordenadas de los vértices de un paralelogramo son:

$(0,1),\ (3,7),\ (4,4),\ (1,-2)$ ¿Cuáles son las coordenadas polares?

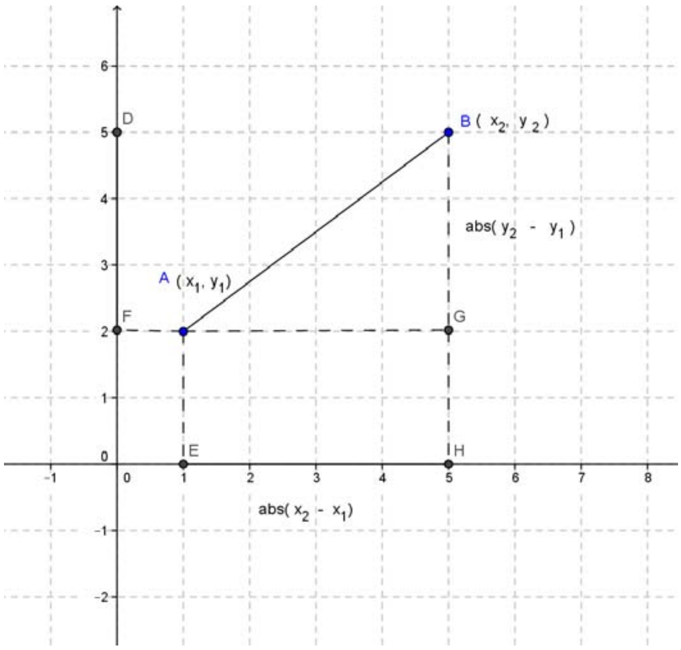
3. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Retomando los elementos básicos de geometría y trigonometría establecernos las fórmulas para longitudes de segmentos, punto medio o coordenadas que dividen de un segmento en n partes iguales, ángulo de inclinación de un segmento, ángulo entre dos rectas, en las siguientes unidades se especificarán otras fórmulas.

FÓRMULA PARA CALCULAR LONGITUDES USANDO COORDENADAS.

La deducción de la fórmula o teorema de distancia entre dos puntos, se obtiene con las coordenadas de los puntos extremos de un segmento a los cuales los denotaremos por:

$A(x_1, y_1)\ ,\ B(x_2, y_2)$ Graficando



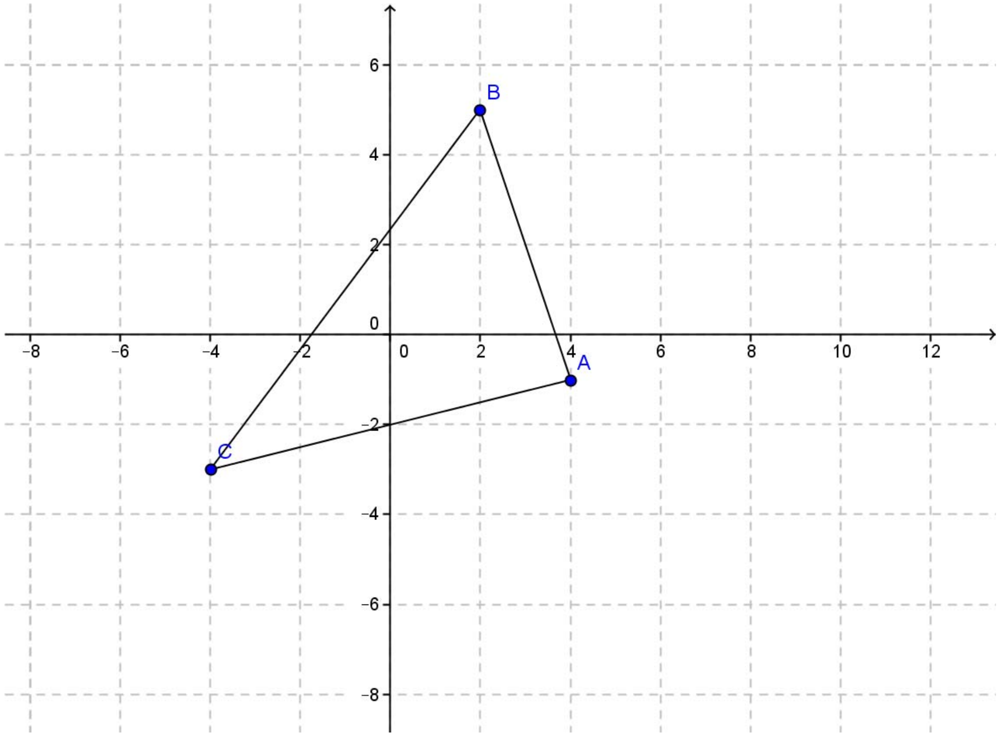
Usando las proyecciones en los ejes coordenados y el teorema de Pitágoras.

$$d(A\ ,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

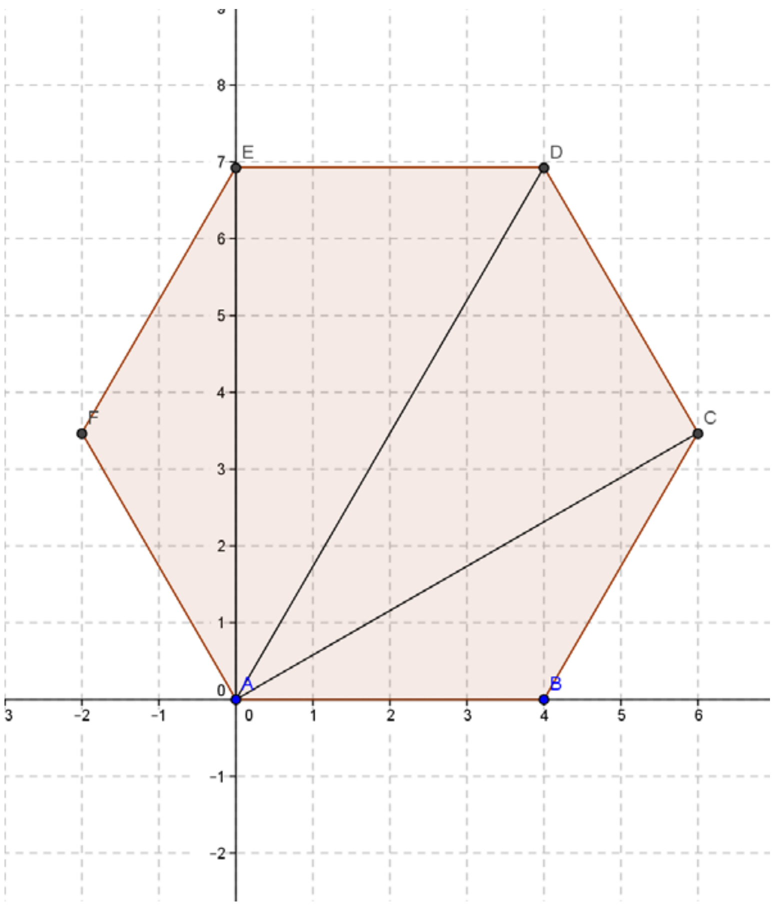
Aplicación.

Utiliza la fórmula de distancia entre dos puntos en los ejercicios anteriores.

Ejercicio 8. Utiliza la fórmula para calcular el perímetro del triangulo e indica por la longitud de sus lados ¿cómo se clasifica el triángulo?, por sus ángulos ¿cómo se clasifica el triángulo?



Encuentra las coordenadas del hexágono y determina las longitudes de las diagonales usando la fórmula.



ÁREA DE POLÍGONOS POR DESCOMPOSICIÓN DE TRIÁNGULOS. El área en polígonos se calcula por fórmulas básicas de geometría y el polígono elemental es el triángulo.

ÁREA DEL TRIÁNGULO.

Para calcular el área de un triángulo se emplean diferentes maneras:

a) Por áreas, de figuras geométricas, en donde se incluye el cuadrilátero y triángulos rectángulos, cuando se proyectan las coordenadas a los ejes de coordenadas y se calcula el área de cada una.
b) La de Herón de Alejandría cuando se conocen las longitudes de los tres lados,

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \therefore \quad s = \frac{p}{2}$, $p = \text{perímetro}$, a, b, c son las longitudes de los lados del triangulo

c) Cuando se conoce la longitud de la base y altura.

$$A = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}, \text{ base } \perp \text{ altura}$$

d) Fórmula de determinante, conocidas las coordenadas de los tres vértices.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

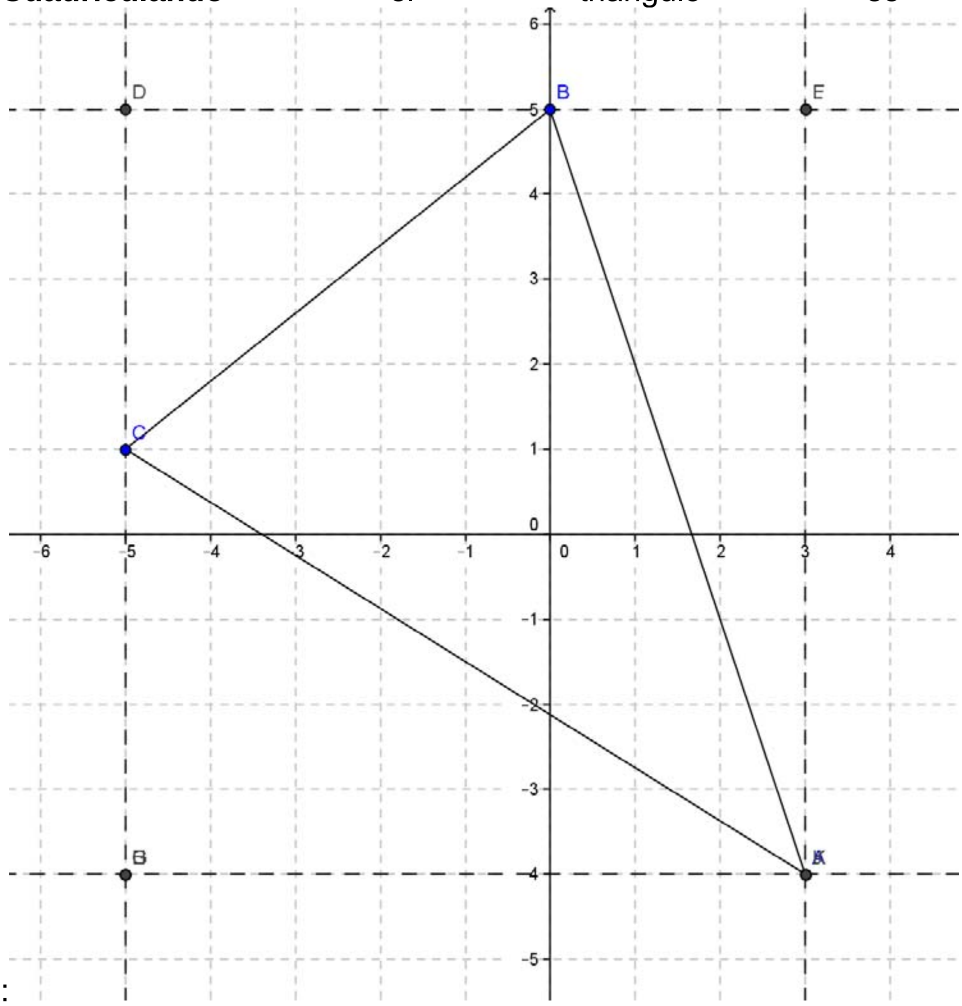
En ésta fórmula el sentido de recorrido de las coordenadas de los vértices es contrario al de las manecillas del reloj

EJEMPLO.

Calcular el área del triángulo de vértices

$A(3,-4)$, $B(0,5)$, $C(-5,1)$

Cuadriculando el triángulo se tiene



:

Un rectángulo y cuatro triángulos, de ellos tres son rectángulos, por ello el área del triángulo ABC es:

$$A_{\Delta ABC} = (72 - \frac{40}{2} - \frac{27}{2} - \frac{20}{2})u^2$$

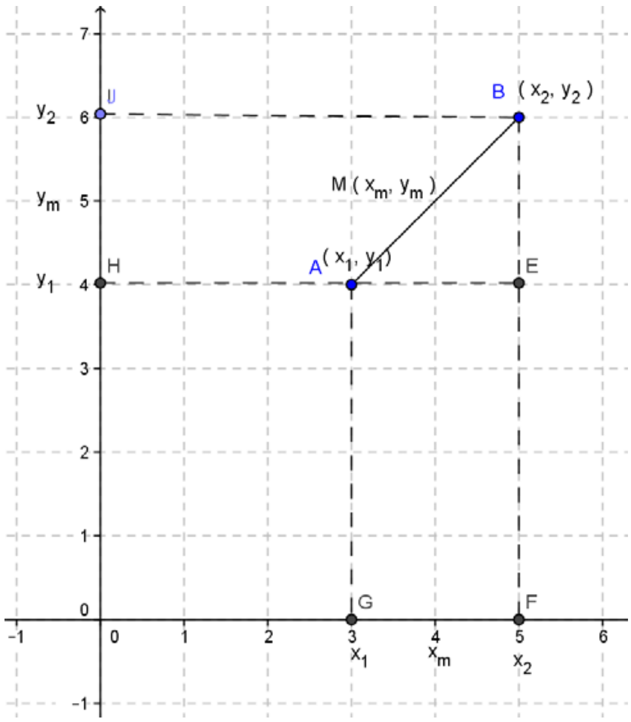
$$A_{\Delta ABC} = \frac{57}{2}u^2$$

Ejercicio 9.Usando determinantes verifique el resultado obtenido en el triángulo anterior.

FÓRMULA PARA OBTENER LAS COORDENADS DEL PUNTO O PUNTOS QUE DIVIDEN A UN SEGMENTO EN N PARTES IGUALES.

Para obtener la fórmula consideremos los extremos del segmento $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, con ello encuentra las coordenadas del punto medio del segmento.

Graficamos proyectamos las coordenadas a cada eje.



Con las proyecciones en cada eje, denotaremos el punto medio por $M(x_m, y_m)$ se cumple que las longitudes (valor absoluto) con respecto a los extremos son de igual longitud, es decir

$$x_m - x_1 = x_2 - x_m \qquad\qquad \therefore \quad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

De manera análoga para las ordenadas obtenemos

$$\therefore \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Con ello tenemos $M(x_m, y_m) = M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Aclaración

En la deducción anterior se utilizó el concepto de razón en longitudes de segmentos $R = \frac{\text{una parte}}{\text{entre el resto}}$ que es el equivalente al teorema de Thales en los triángulos semejantes es decir $R = \frac{x_m - x_1}{x_2 - x_m}$ cuando $R = 1$, de igual manera para el eje de ordenadas. $R = \frac{y_m - y_1}{y_2 - y_m}$

Ejercicio 10. Demuestre que las coordenadas del punto que divide a un segmento en **n** partes iguales es $(\frac{Rx_1 + x_2}{1+R}, \frac{Ry_1 + y_2}{1+R})$, $R \neq -1$ si usamos el hecho que $R = \frac{\text{una parte}}{\text{entre el resto}}$.

Demuestra que las coordenadas del punto medio de un segmento son $M\ (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$, cuando el concepto de razón que se utiliza es $R = \frac{\text{una parte}}{\text{la longitud del segmento}}$, para esta situación $R = \frac{1}{2}$

Demuestra que las coordenadas del punto que divide a un segmento en **n** partes iguales es: $(R\,x_2 + x_1\,(1 - R),\ R\,y_2 + y_1(1 - R))$, cuando la razón es $R = \frac{\text{una parte}}{\text{la longitud del segmento}}$

COMENTARIO A LAS FÓRMULAS ANTERIORES.

En algunos libros de geometría analítica es común hacer la aclaración en la fórmula que se emplea para evitar errores en la interpretación de resultados por lo siguiente : En ejercicios en donde la razón es R = - 1, y empleamos las fórmulas $(\frac{Rx_1 + x_2}{1+R}, \frac{Ry_1 + y_2}{1+R})$, no tiene sentido el resultado, pues la división entre cero **no** está definida, sin embargo si se utilizan las fórmulas $(R\,x_2 + x_1\,(1 - R),\ R\,y_2 + y_1(1 - R))$, es posible hacer las operaciones, indicadas y graficar las coordenadas del punto obtenido.

Importante

En estos ejercicios, se tienen los siguientes casos

a) Si la razón es positiva el punto está entre los extremos.
b) Pero si la razón es negativa el punto está fuera de los extremos

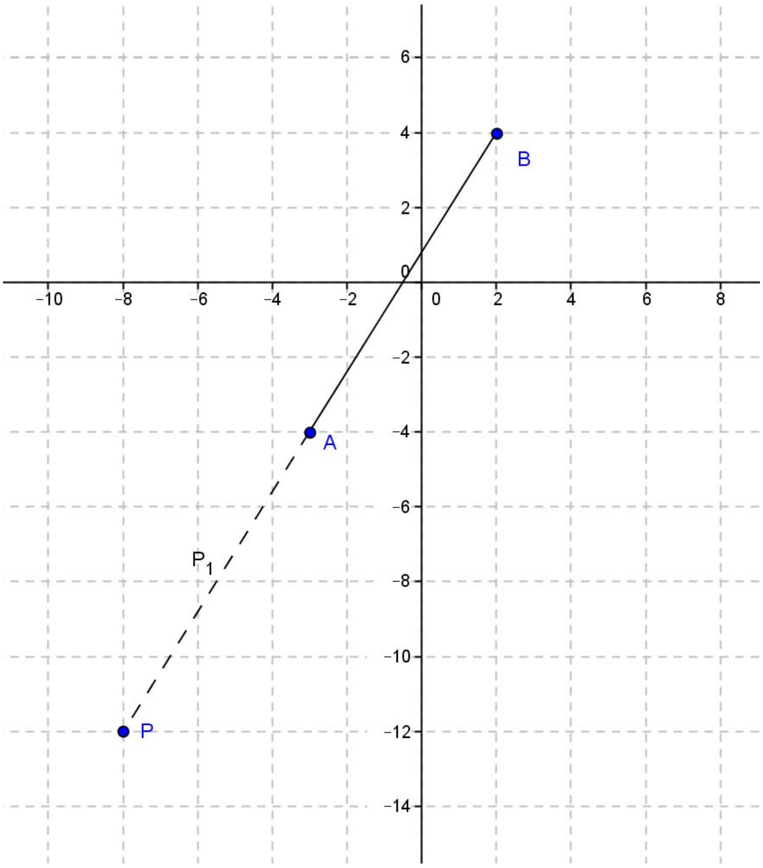
Ejemplo.

Utilice la fórmula adecuada y encuentre las coordenadas del punto P, que divide al segmento de extremos A (- 3, - 4), B (2, 4) en la razón = - 1, localiza los puntos y él encontrado.

Solución

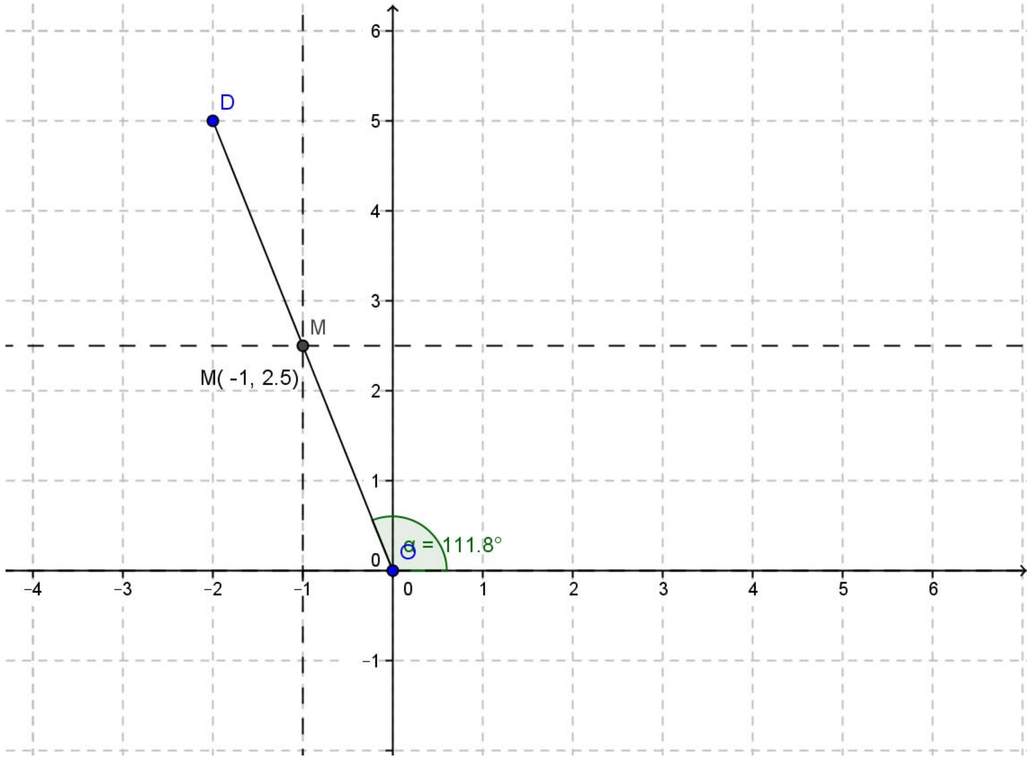
De las fórmulas $\left(R x_2 + x_1 (1 - R) , R y_2 + y_1 (1 - R) \right)$ sustituimos R = -1

Obtenemos: $P(-8 , -12)$



El resultado es un punto fuera del segmento, además es simétrico con respecto al punto A

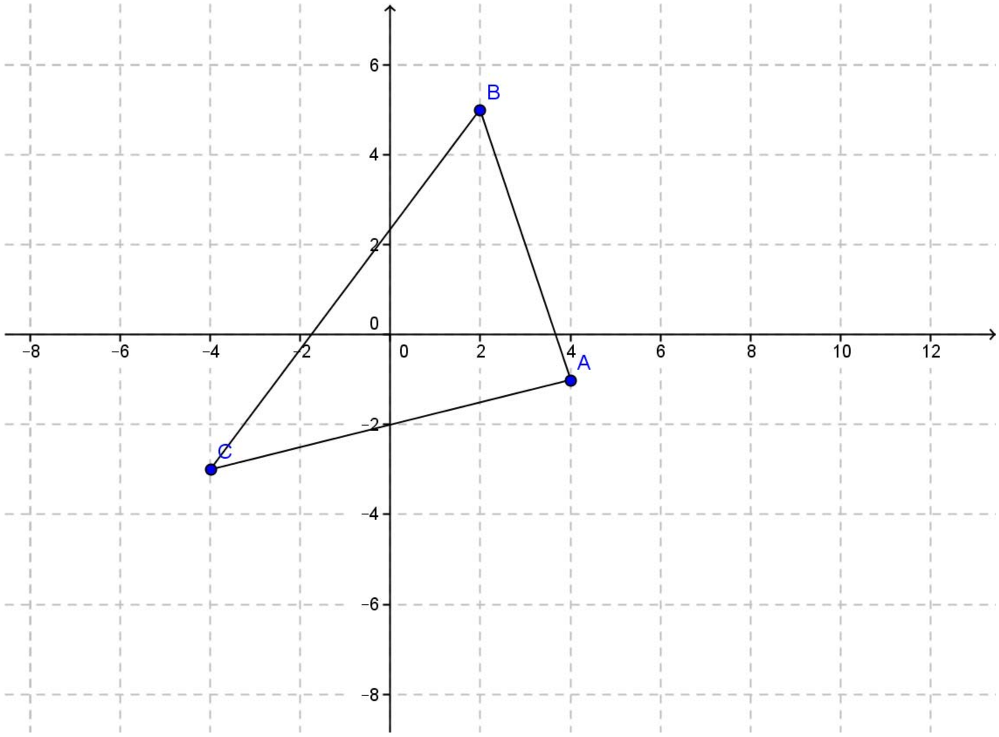
Ejercicio 11.Coordenadas del punto o puntos cuando el segmento se divide en **n** partes iguales, para localizar el punto medio se determina el punto medio de cada cateto en el triángulo formado por los ejes y de acuerdo a la ubicación de la abscisa y ordenada



Para cada segmento, encuentra los puntos de trisección si los extremos son:

$A(1,-2)$, $B(4,1)$ $C(-2,-3)$, $D(0,0)$

Usando fórmulas, determina las longitudes de las medianas, y las coordenadas del baricentro del triángulo ABC, para ello debes considerar las coordenadas de los vértices que se indican.



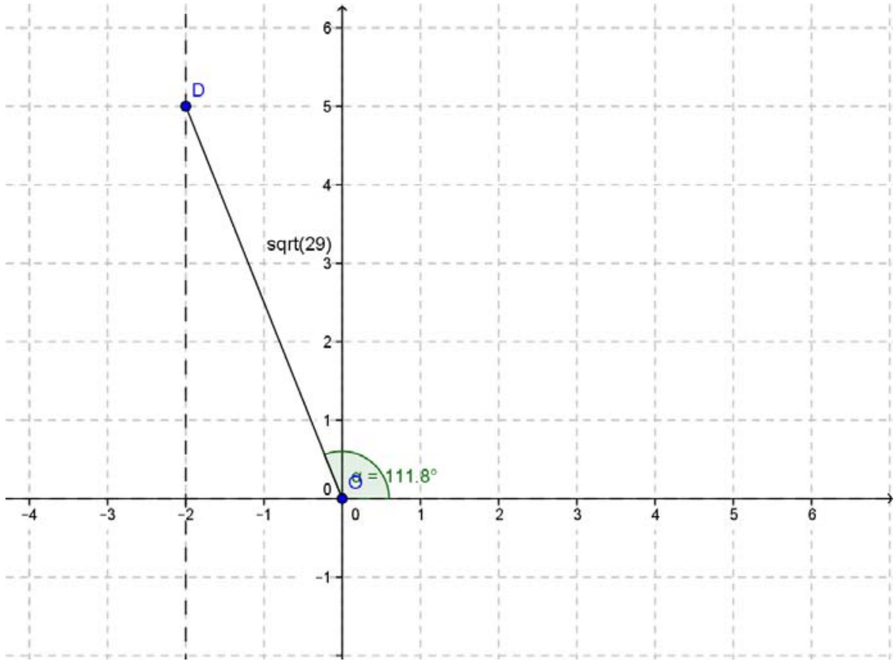
Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC son:

$A(4,0)$, $B(2,1)$, $C(-1,-5)$

Determina las coordenadas del baricentro.

Inclinación con respecto al eje X

El ángulo de inclinación respecto al eje X, se obtiene considerando el sentido contrario a las manecillas de un reloj en donde el lado inicial es el eje X y el lado final el segmento o su prolongación, la medida del ángulo la obtendremos por razones trigonométricas en los triángulos rectángulos, en la siguiente figura se considera un segmento de extremos O (0, 0) y D (-2, -4), presentados en la figura.



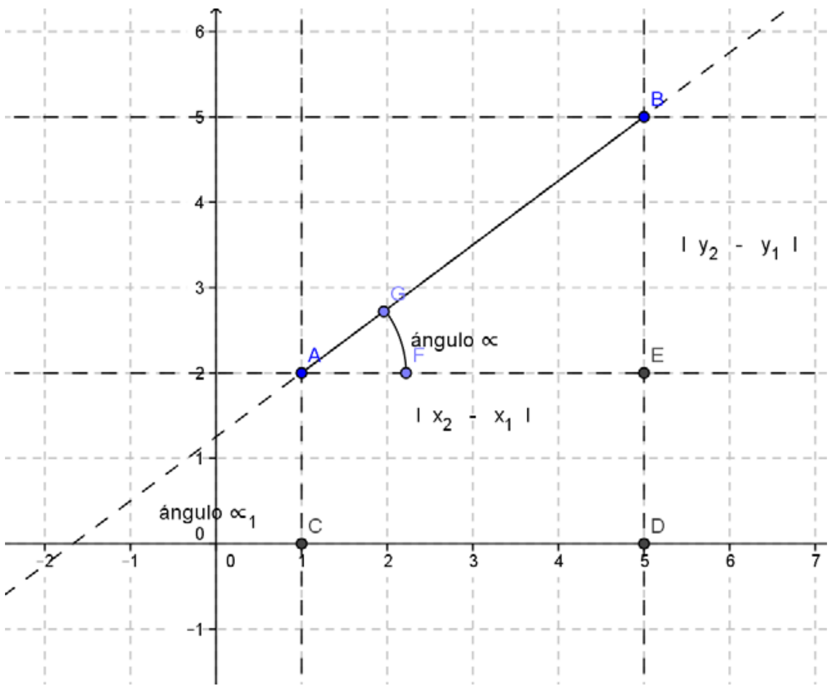
El ángulo definido es mayor de 90 grados y es él suplemento del ángulo agudo del triángulo rectángulo que utiliza. La longitud se obtuvo por la fórmula de distancia y el ángulo por la razón trigonométrica definida por tangente cateto opuesto entre cateto adyacente, es decir

$$\tan(\alpha) = \frac{5}{2} \quad \therefore \quad \alpha = \operatorname{inv}\tan\frac{5}{2}$$

además en la figura $\theta = 180^0 - \alpha$

FORMULA PARA OBTENER EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN.

Para obtener la fórmula del ángulo de inclinación consideremos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, las coordenadas de los extremos del segmento AB, graficando tenemos.



En la figura se formaron dos triángulos rectángulos, proyectando las correspondientes coordenadas a los ejes X, Y por ello se tiene

$$\text{ángulo } \alpha_1 = \text{ángulo } \alpha \text{ por ser ángulos correspondientes}$$

El ángulo α lo obtenemos por la tangente trigonométrica del triángulo AEB

$$\tan\alpha = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \; x_2 \neq x_1$$

La fórmula se simplifica con la definición de pendiente de una recta.

Definición: La pendiente **m** de la recta se define por tangente trigonométrica del ángulo de inclinación, es decir

Graficamos proyectamos las coordenadas a cada eje.

$$m = \tan\alpha, \quad \text{por ello} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \; x_2 \neq x_1$$

ANALIZANDO LA FÓRMULA.

Cuando se aplica la fórmula de pendiente pueden obtenerse los siguientes resultados.

a) Si $y_2 - y_1 = 0$ entonces $y_2 = y_1$, la recta es paralela al eje X, además la pendiente (m) es cero y el ángulo de inclinación es cero grados.

b) Si $x_2 - x_1 = 0$ entonces $x_2 = x_1$, la recta es paralela al eje Y, o también la pendiente (m) no está definida, y el ángulo de inclinación es un ángulo de noventa grados.

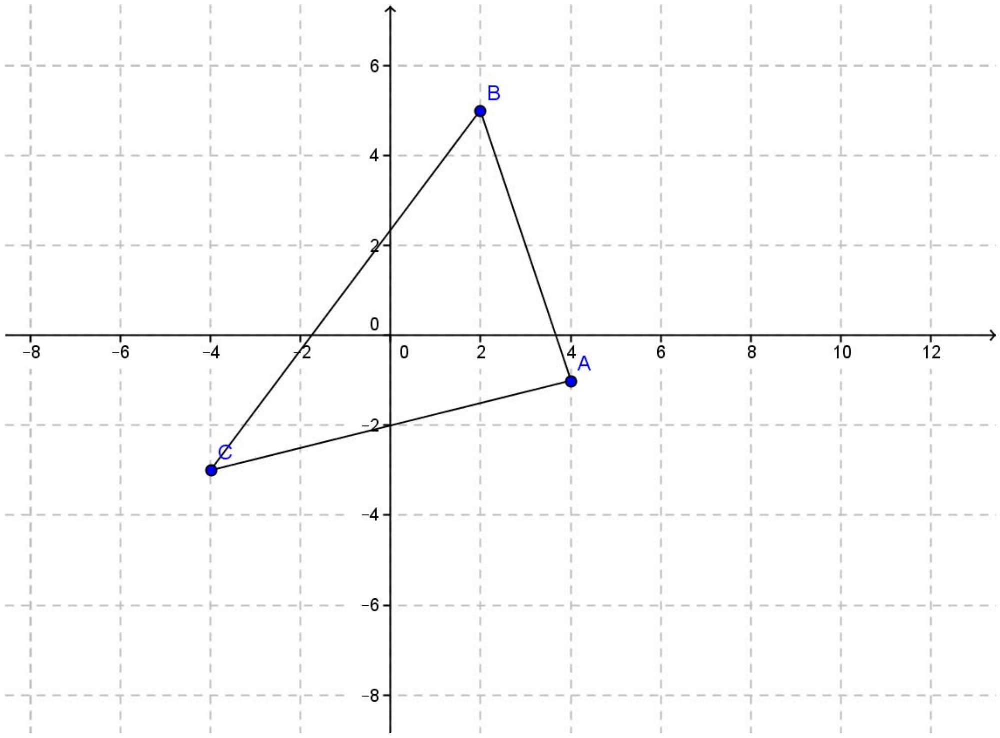
c) Si el resultado de aplicar la fórmula de pendiente es un número positivo el ángulo de inclinación es mayor de cero grados pero menor de noventa grados o de otra manera es un ángulo agudo.

d) Si el resultado de aplicar la fórmula de pendiente es un número negativo el ángulo de inclinación es mayor de noventa grados pero menor de ciento ochenta grados o de otra manera es un ángulo obtuso.

Por ello

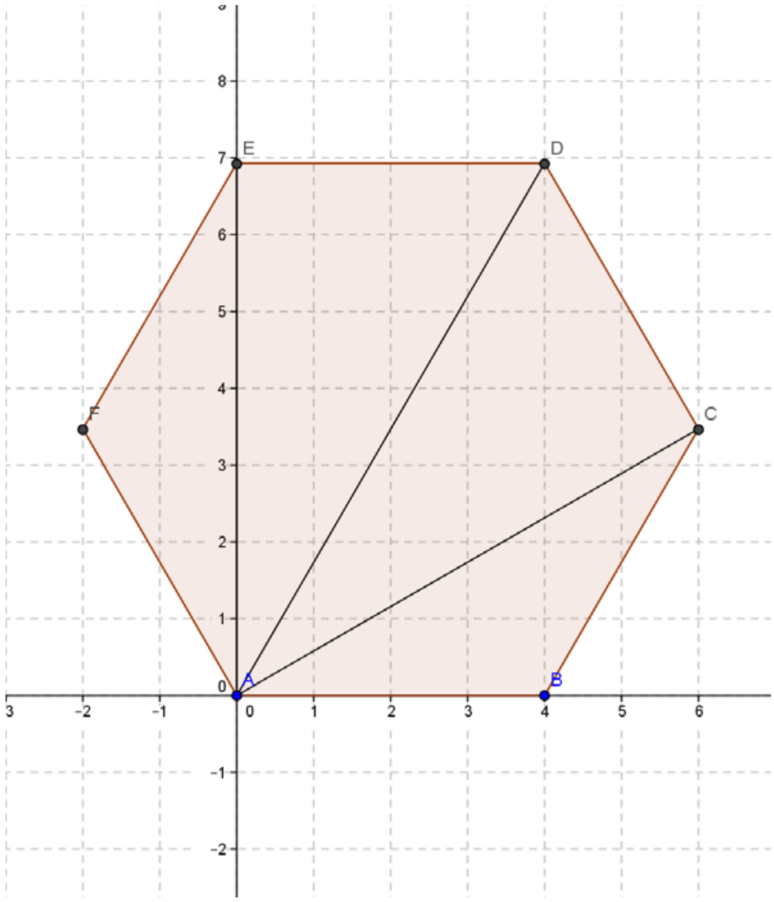
$$0^0 \leq \alpha \prec 180^0$$

Ejercicio. 12 Utilice la fórmula de pendiente y determine la medida del ángulo de inclinación de cada lado del triángulo ABC.



Sugerencia. Para el lado AC conviene hacer la prolongación de modo que al indicar el ángulo de inclinación se revise el resultado.

13. Encuentre el ángulo de inclinación de cada lado en él hexágono regular y de las diagonales que se indican en la siguiente figura.



14. Hallar la coordenada x o y para que los tres puntos sean colineales.

a) (3, 2), (7, 3) , (-1, y),
b) (1, 5), (1, 8) , (x, 9),
c) (0, 7), (-2, 5) , (- 4, y),

15. Un cuadrilátero tiene como vértice los puntos M (a, b), N(c, b),

O(c + d, e), P (a + b, e), hallar la pendiente de cada lado.

16. Demostrar que la recta que pasa por los puntos (3n, 0) y (0, 7n), es paralela a la que pasa por los puntos (0, 21n) y (9n, 0)

17. La recta que contiene a los puntos (- 8, m) y (2, 1) es paralela a la que contiene a los puntos (11, -1) y (7, m + 1) ¿cuál debe ser el valor de m?

18. ¿Para qué valores de k será la recta determinada por los puntos (k, 3) y (-2, 1) paralela a laque pasa por (5, k) y (1,0)? ¿Para qué valores de k será perpendicular?

19. Se dan los puntos P (1,2), Q (5,-6) y R (b, b). Determinar b tal que el ángulo PQR sea un ángulo recto.

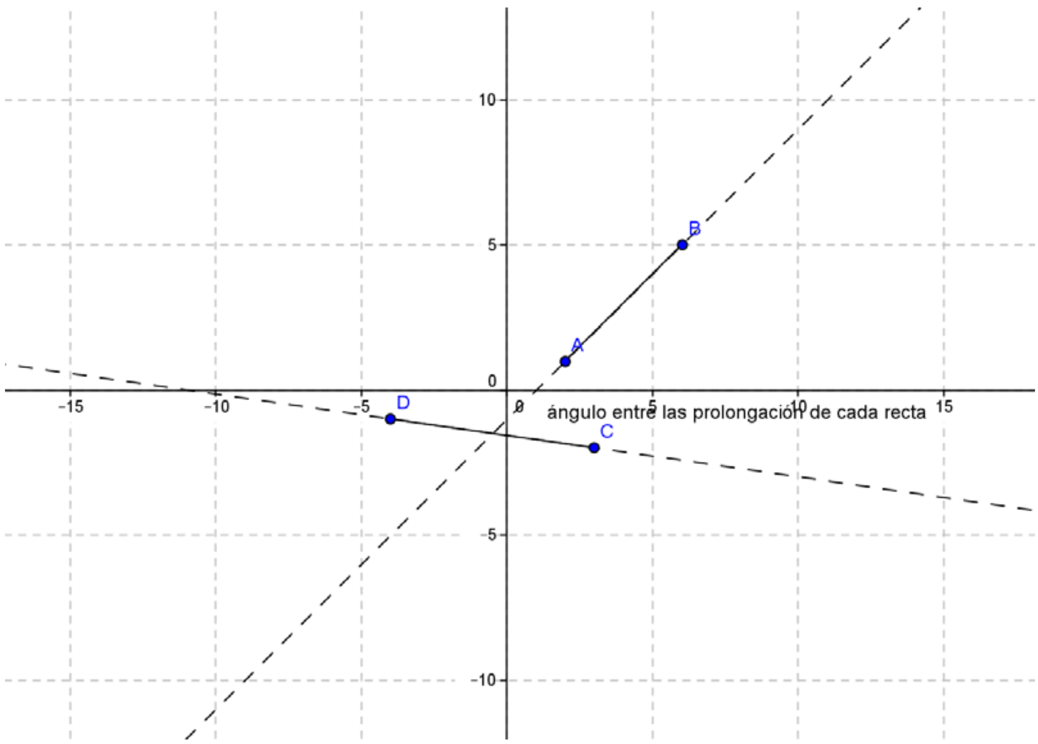
20. Un rayo PQ forma un ángulo de 30 grados con el eje X, QR es perpendicular al rayo PQ. SI P, Q y R son los puntos (-4,0), (5, raíz (27)) respectivamente, determínese el perímetro y el área del triángulo PQR.

21. Se dan los puntos P(-3,-4), Qb,-1) R (7, 6). Determinar b de manera que Q sea el punto medio de PR.

22. Mediante las coordenadas. Demostrar que dos de las medianas de un triángulo con vértices en (m, 0), (- m, 0), (0, 3m), son perpendiculares entre sí.

23. Los puntos A (-3, 2) y B (5,12) son dos vértices del triángulo ABC. Una recta que pasa por G punto medio de AB, y el paralela a al lado AC, intersecta al lado BC en H (10, 2). Determinar las coordenadas del tercer vértice.

ANGULO FORMADO ENTRE DOS SEGMENTOS DE RECTA QUE SE INTERSECTAN.



Cuando graficamos dos segmentos de extremos conocidos pueden tenerse las siguientes posibilidades:

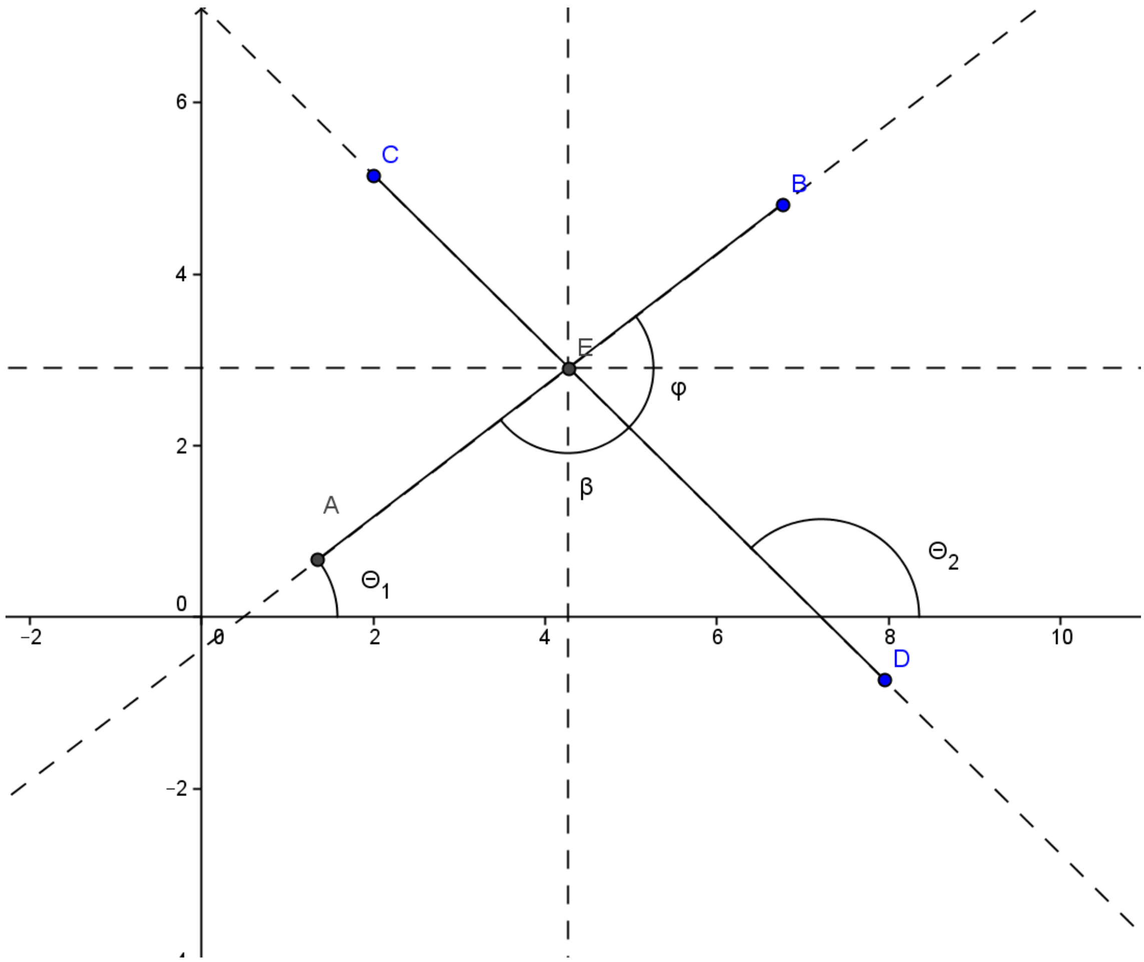
a) Que se intersecten en un punto y el ángulo que definen puede ser agudo, recto u obtuso.
b) Si no se intersecten, entonces las “rectas” son paralelas.

c) Que se intersecten en “todos” sus puntos o es el mismo segmento o los puntos son colineales.

FÓRMULA DE ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS O SEGMENTOS.

Para verificar los resultados anteriores, conozcamos la formula de ángulo entre dos segmentos o cuando se hace la prolongación de las rectas que los contienen y determinar el ángulo entre ellas.

Consideremos dos segmentos de extremos conocidos y que se intersectan en un punto E, ver figura.



FORMA INTUITIVA PARA OBTENER LA FÓRMULA

En la figura θ_2 es el ángulo de inclinación de la recta que pasa por C y D y su pendiente la denotaremos por m_2.

Además θ_1 es el ángulo de inclinación de la recta que pasa por A y B, y la pendiente de la recta la denotaremos por m_1.

Él ángulo entre las rectas es β o φ

Si consideramos el ángulo β y la dirección del ángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj, el lado inicial del ángulo es el lado AB y lado final del ángulo es DC, representado es la figura anterior en donde.

$$\beta = \theta_2 - \theta_1$$

Tomando la tangente en ambos miembros de la igualdad y la identidad trigonométrica.

$$\tan\beta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

sustituyendo las pendientes, la fórmula es:

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

CONSECUENCIA DE LA FÓRMULA,

Si en la figura el ángulo entre las rectas que consideramos es φ, entonces $\varphi = \theta_1 - \theta_2$, entonces la fórmula es: $\tan\varphi = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_2 m_1}$

24. Usando la figura anterior. Demuestra la fórmula $\tan\beta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$, usando el teorema de ángulo exterior de un triángulo.

ANALIZANDO LOS RESULTADOS DE LA FÓRMULA

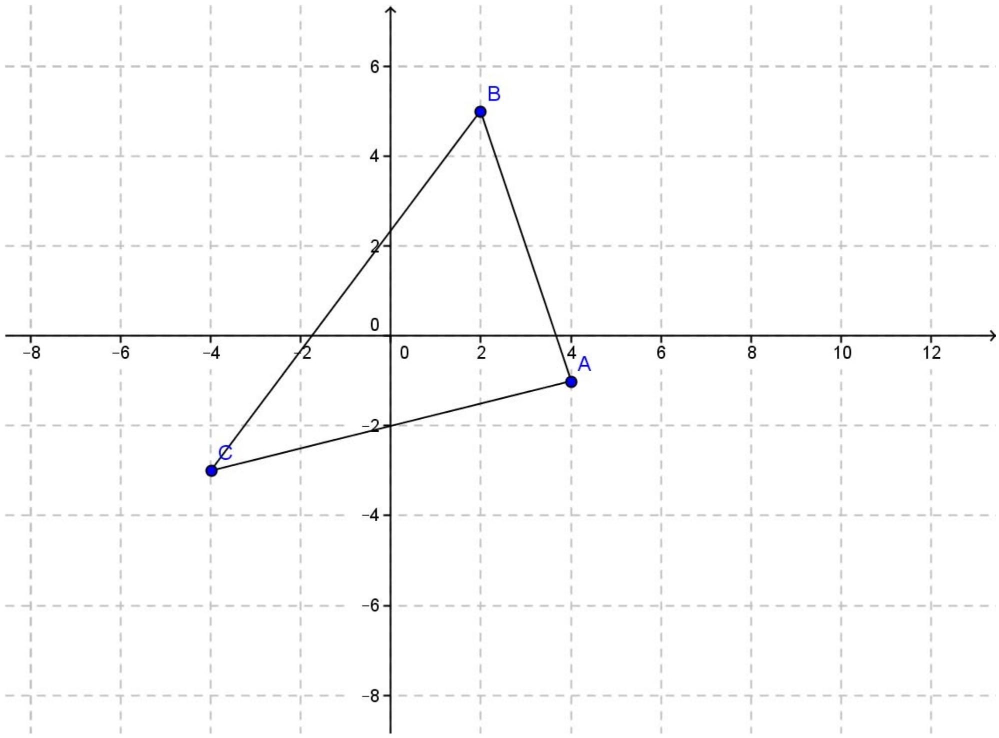
$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

a) si $m_2 - m_1 = 0$ $\tan\beta = 0$, resultado que indica que el ángulo de inclinación es cero, o las rectas son paralelas o es la misma.

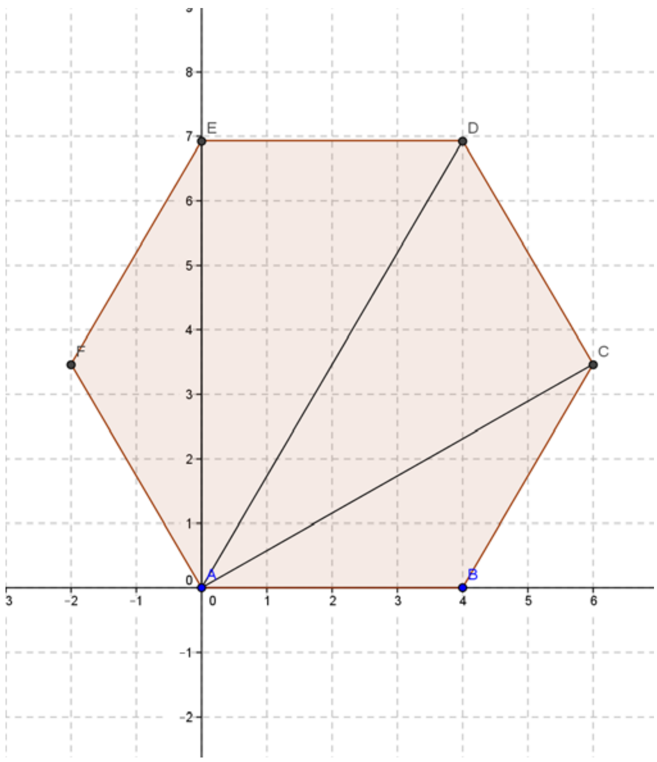
b) si $1 + m_2 m_1 = 0$ $\tan\beta$ no esta definida la operación, resultado que indica que el ángulo de inclinación es 90 grados, o las rectas son perpendiculares.

Condición de perpendicularidad $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

25. Encuentre las medidas de los ángulos interiores del triángulo ABC.



26. Usando la fórmula, encuentra la medida de los ángulos interiores de los triángulos que se formaron con las diagonales trazadas desde un punto en el hexágono regular.



27. Usando las fórmulas adecuadas y aplicando la fórmula de ángulo entre dos rectas cómo se clasifica el triángulo utilizando las medidas de los ángulos interiores si.

a) A (8, 1), B (1, - 2) , C (6,-4),
b) A (-4, 2), B(0, - 6) , C (6,-2),
c) A (0, 4), B(8, 0) , C (6, 8),

28. Calcula la medida de cada ángulo exterior del triángulo de vértices

d) A (1, 4), B (3, - 9) , C (-5, 2),
e) A (2, -5), B(1, - 2) , C (4,-7),

29. Encuentra las medidas de los ángulos interiores del triángulo de vértices

A (1, -3), B(3, 2) , C (-2, 4),

30. Encuentra las medidas de los ángulos interiores del rombo de vértices

(0, 0), (1, 2) , (2, 1), (3,3)

1. LUGARES GEOMETRICOS.

En cursos de geometría analítica en nivel bachillerato se recomienda estudiar el concepto de lugar geométrico.

En los dos primeros semestres se discutió la función lineal y la función cuadrática y además el estudio de solución de ecuaciones lineales, sistemas lineales, ecuación cuadrática, ahora en tercer semestre en la unidad 1, se resolvieron sistemas lineales 3X3, y sistemas cuadráticos, en donde al menos una de las ecuaciones representaban curvas, por ejemplo circunferencias, parábolas o elipses, curvas que se obtienen mediante condiciones.

DEFINICIÓN DE LUGAR GEOMÉTRICO:

El lugar geométrico se define por el conjunto de puntos del plano cartesiano que cumple una condición indicada.

Con la idea de encontrar algunas ecuaciones de lugares geométricos, se proponen algunos y se sugieren algunas propuestas de solución.

Ejemplo.

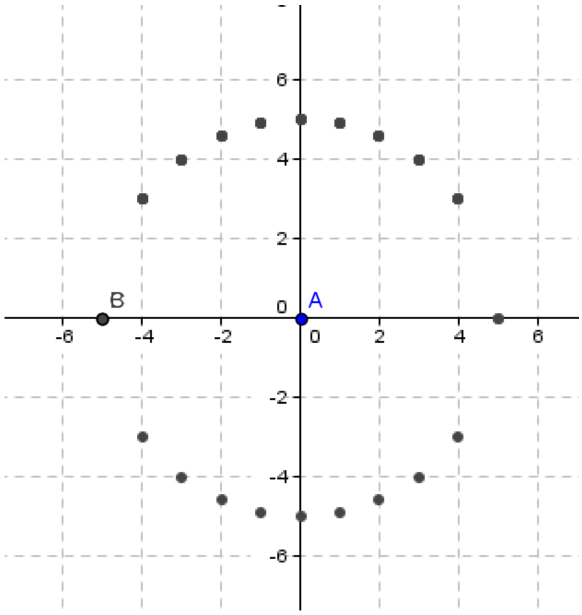
Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) que están a 5 unidades del punto fijo (0, 0).

Solución.

El punto fijo es (0, 0), y la distancia a todos los puntos P (x, y) es 5 unidades.

Forma de resolver el ejercicio.

La idea es usar regla graduada e identificar varios puntos medidos desde (0,0), otra manera es usar la fórmula de distancia entre dos puntos.



Por fórmula

$$d(c,p) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$\text{pero, por dato } d(C,P) = 5$$

Resolviendo obtenemos

$$x^2 + y^2 = 25$$

Ecuación del lugar geométrico que representa una circunferencia de radio 5 u y centro el punto fijo C (0,0).

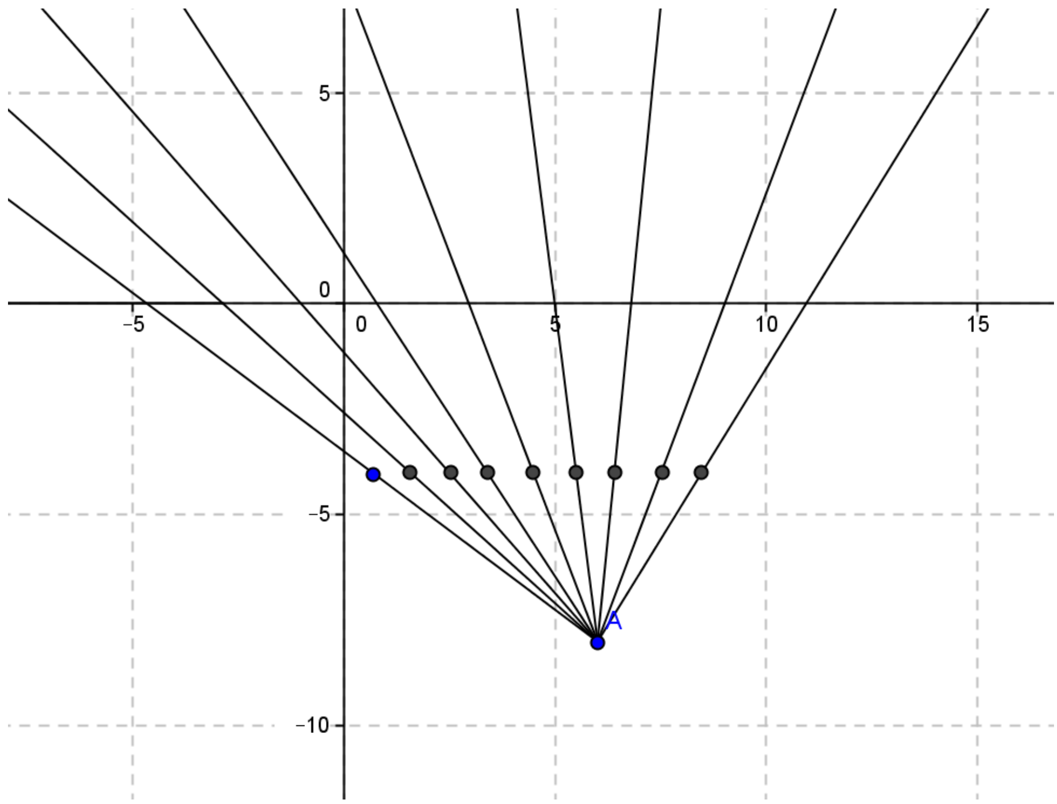
Ejemplo.

Desde el punto A (6,-8) se han trazado todos los rayos posibles hasta su intersección con el eje de abscisas. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios P(x, y).

Solución

Propuesta.

Localizando el punto dado y trazando rayos que intersecten al eje X, después obtener punto medio en cada uno.



Por fórmula

Un punto en el eje X, lo denotaremos por B(x, 0), el punto P(x, y) del lugar geométrico buscado está en el punto medio de cada rayo intersectado en el eje X, por ello, usando fórmula de distancia se cumple lo siguiente.

$$d(A,P) = d(P,B) \quad \text{por ello}$$

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y+8)^2} = \sqrt{y^2} \quad \text{resolviendo}$$

$$y = -4$$

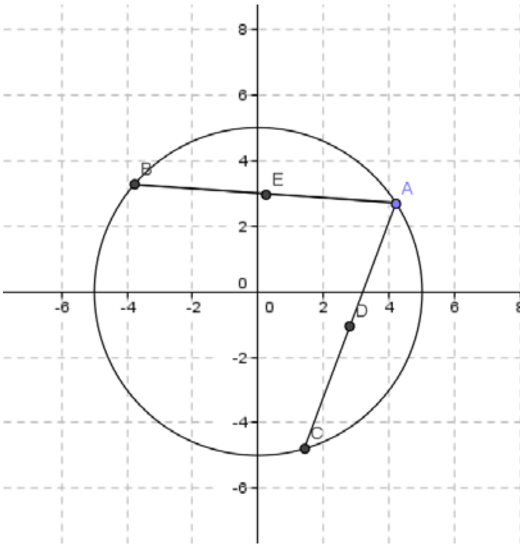
es la ecuación del lugar geométrico buscado, y es una recta paralela al eje Y

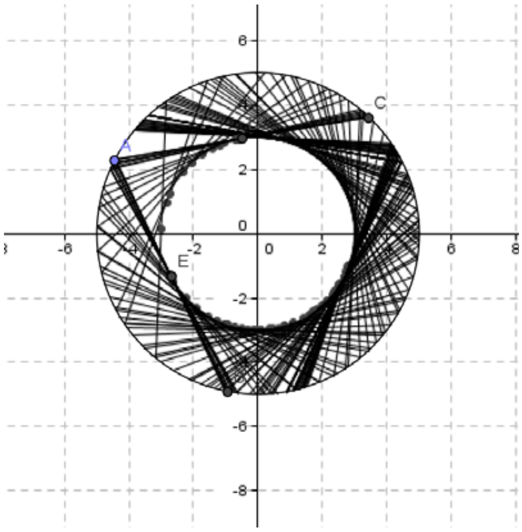
Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de esta circunferencia cuyas longitudes sea igual a 8u.

R. $x^2 + y^2 = 9$

Ejemplo

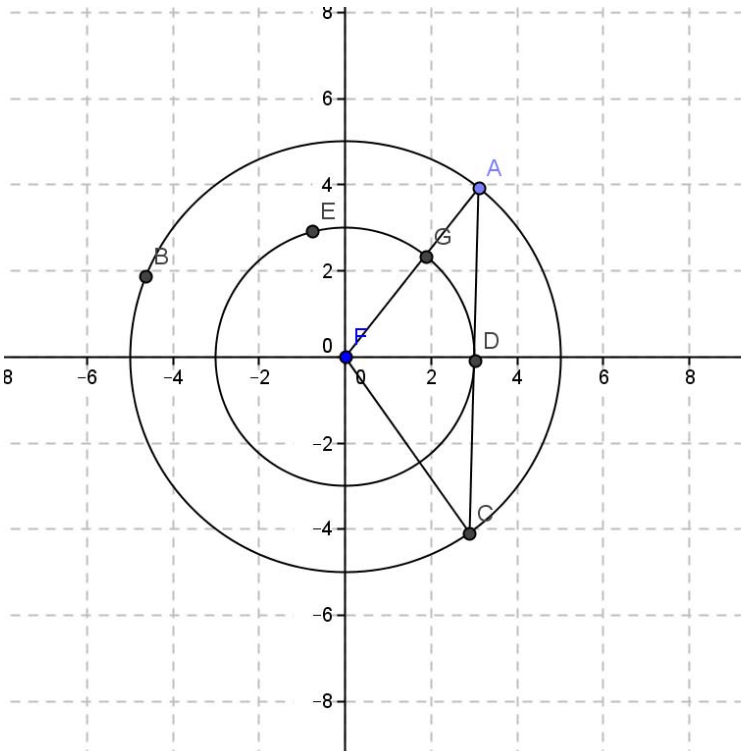
Usando la circunferencia de centro el origen y medir cuerdas de 8 u y localizar puntos medios en cada una.





La solución es una circunferencia de centro el origen y radio 3.

Usando geometría, verificamos el resultado para ello consideramos una cuerda perpendicular al eje X, en donde se forman triángulos rectángulos con medidas: de hipotenusa 5 u, catetos de 4 u y 3u, por lo cual el radio de la circunferencia concéntrica es 3u, cómo se muestra en la figura.

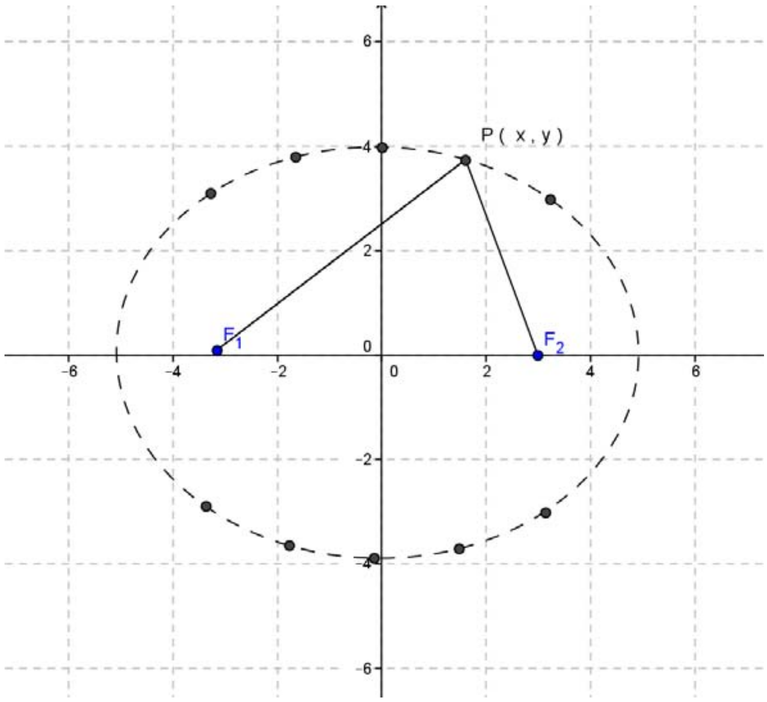


Ejemplo

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) en que la suma de sus distancias a dos puntos fijos dados $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ sea una cantidad constante igual a 10

Solución

El ejercicio también se interpreta como encontrar dos números que sumen 10, para ello puede usarse la regla graduada para localizar puntos que cumplan la condición, otra manera es mediante el trazo de circunferencias concéntricas en cada punto fijo con radios tales que sumen 10 y en la intersección de ellas considerar al punto que pertenece al lugar geométrico y finalmente utilizando la fórmula de distancia.



El lugar geométrico es una elipse.

Usando fórmula de distancia y la condición indicada en el enunciado resulta.

$d(F_1, P) + d(P, F_2) = 10$, sustituyendo las coordenadas

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = 10$$ resolviendo la ecuación

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y)^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + (y)^2}$$

Reduciendo

$$16\,x^2 \;+ 25\,y^2 \;=\; 400$$

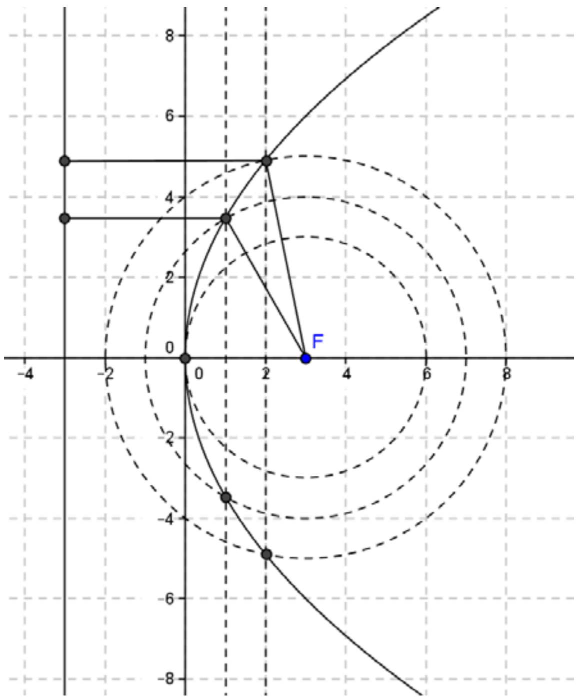
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Representa la ecuación de la elipse de centro el origen

Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto P(x,y) de tal manera que equidista del punto F(3,0) iguales y la recta $x+3=0$.

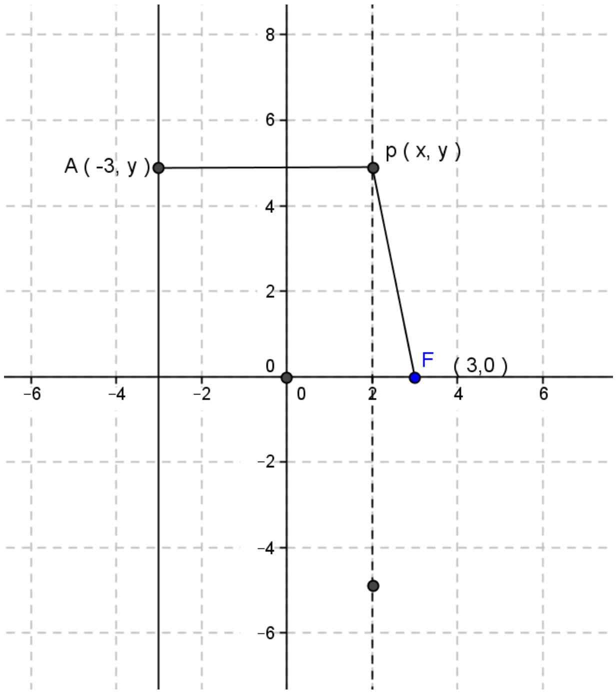
Solución.

Usando los datos en el plano cartesiano, midiendo con regla o usando regla y compas, observamos lo siguiente.



La gráfica representa una parábola.

Usando fórmula de distancia, y coordenadas según gráfica



d (A,P) = d (P , F) igual distancia

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y)^2}$$

reduciendo

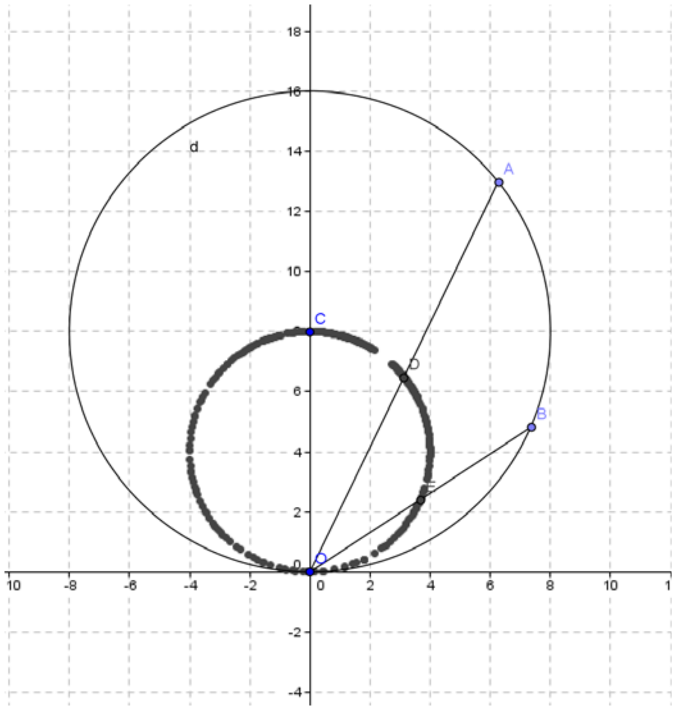
$$y^2 = 12x$$

Lugar geométrico es una parábola

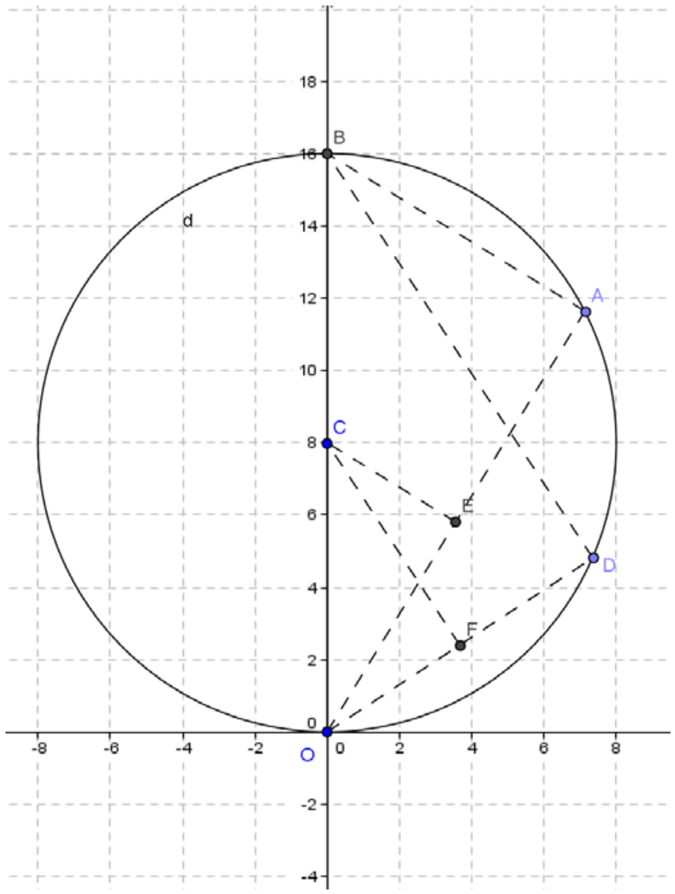
Por el origen de coordenadas se han trazado todas las cuerdas posibles a la circunferencia $x^2 + (y-8)^2 = 64$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas.

Solución

En el ejercicio es conveniente indicar que la circunferencia tiene centro en el punto C (0, 8) y sugerir que trace algunas cuerdas desde el origen del plano Cartesiano y localice el punto medio de cada una.



Por los trazos se observa que es una circunferencia de centro (0, 4), para confirmar lo anterior utilicemos la siguiente figura.



En la figura él $\triangle$ OAB es rectángulo, con 90^0 en vértice A, además el punto medio de una cuerda trazada con el centro de la circunferencia dada, forma otro triángulo rectángulo semejante es decir

$\triangle$ OEC es rectángulo, con 90^0 en vértice E, por ser la mitad del ángulo central y en todas las cuerdas, los puntos medios pertenecen a otra circunferencia de centro (0, 4), por lo cual la solución es

$x^2+(y-4)^2=16$ La circunferencia con centro (0, 4) y longitud del radio 4 u.

Ejercicio

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y), cuya diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(- 4, 0), B(4, 0) sea igual 8.

R. $16x \pm 8 = 0$

2. Los vértices de un cuadrado son los puntos $A(a,a), B(-a,a), C(-a,-a), D(a,-a)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los lados de este cuadrado se una cantidad constante, igual a $6a^2$.

R. $x^2+y^2=a^2$

3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) que equidistan de los ejes coordenados.

Solución

R. $y=x$

4. Hallar las coordenadas de las proyecciones de los puntos del Plano cartesiano

$A(2,-3),\ B(3,-1),\ C(-5,1),\ D(-3,-2),\ E(-5,-1)$ sobre los ejes de las abscisas.

R. $(2,0),(3,0),(-5,0)(-3,0),(-5,0)$,

5. Hallar las coordenadas de las proyecciones de los puntos del Plano cartesiano $A(-3,2), B(-5,1), C(3,-2), D(-1,1), E(-6,-2)$ sobre el eje de las ordenadas.

R. $(0,2),(0,1),(0,-2),(0,1),(0,-2)$

6. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos

$A(2,3), B(-3,2), C(-1,-1), D(-3,-5), E(a,b)$ con respecto al eje X.

R. A(2,-3), B(-3,-2), C(-1,1), D(-3,5), $E(a,b)$

7. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos A(-1,2),

B(3,-1), C(-2,-2), D(-2,5), $E(a,b)$ con respecto al eje Y.

R. A(1,2), B(-3,-1), C(2,-2), D(2,5), $E(-a,b)$

8. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos A(3,3),

B(2,-4), C(-2,1), D(5,-3), $E(a,b)$ con respecto al origen.de coordenadas.

R. A(-3,3), B(-2,4), C(2,-1), D(-5,3), $E(-a,-b)$.

9. Determinar las coordenadas polares de los puntos simétricos respecto al eje polar de.

$A(1, \frac{\pi}{4}),\ B(5, \frac{\pi}{2}),\ C(2, -\frac{\pi}{3}),\ D(4, \frac{5\pi}{6}),\ E(3, -2)$

Solución

10. Determinar las coordenadas polares de los puntos simétricos respecto al polo de.

$A(1, \frac{\pi}{4}),\ B(5, \frac{\pi}{2}),\ C(2, -\frac{\pi}{3}),\ D(4, \frac{5\pi}{6}),\ E(3, -2)$.

R. $A(1, -\frac{3\pi}{4}),\ B(5, -\frac{\pi}{2}),\ C(2, \frac{2\pi}{3}),\ D(4, -\frac{\pi}{6}),\ E(3, \pi-2)$

11. El polo de un sistema de coordenadas polares coincide con el origen de coordenadas cartesianas rectangulares, el eje polar coincide con el semieje positivo de abscisas. En el sistema de coordenadas polares se han dado los puntos

$$\mathrm{A}(6, \frac{\pi}{2}),\ \mathrm{B}(5, 0),\ \mathrm{C}(2, \frac{\pi}{4}),\ \mathrm{D}(10, -\frac{\pi}{3}),\ \mathrm{E}(8, \frac{2\pi}{3}),\ \mathrm{F}(12, -\frac{\pi}{6})$$

12. Determina las coordenadas cartesianas de ellos.

R. $A(0,6), B(-5,0), C(\sqrt{2},\sqrt{2}), D(-5,-5\sqrt{3}), E(-4,4\sqrt{3}), F(6\sqrt{3},-6).$

13. Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado $A(3,-7), B(-1,4)$, calcular el área del cuadrado.

R. $137u^2$

14. Dados dos vértices opuestos de un cuadrado $P(3,5), Q(1,-3)$, calcular el área del cuadrado.

R. $34u^2$

15. Dados tres vértices de un paralelogramo ABCD, cuyo cuarto vértice D es opuesto a B, determinar las longitudes de las diagonales y el perímetro del paralelogramo, los vértices son los siguientes.

$\mathrm{A}(3, -7),\ \mathrm{B}(5, -7),\ \mathrm{C}(-2, 5)$

R. $13.15u$

16. Demostrar que los puntos A(3,-5), B(-2,-7), C(18.1) están en una línea recta.

17. Los puntos A(5,0), B(0,1), C(3,3), son vértices de un triángulo. Calcular la medida de los ángulos interiores.

R. $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ.$

18. Hallar en el eje de la abscisa de un *punto*, cuya distancia hasta el punto

M (2,-3) sea igual a 5. R. $(6,0)\ y\ (-2,0).$

19. Hallar en el eje de las ordenadas un ***punto***, cuya distancia hasta el punto

M (-8,13) sea igual a 17.

R. $(0,28)\ \ y\ \ (0.-2).$

20. Dados los puntos P(2,2), Q(5,-2), hallar en el eje de las abscisas un punto M de manera que el ángulo PMQ sea recto.

R. (1,0) ; (6,0)

21. Por él punto R(4,2) se ha trazado una circunferencia, tangente a los dos ejes de coordenadas, determina las coordenadas del centro y longitud del radio

R. C(2,2), r=2; C10,10),r=10

22. Por él punto S(1,-2) se ha trazado una circunferencia de radio 5, tangente al eje X, determina las coordenadas del centro.

R. C(-3,-5), C(5,-5)

23. Dados dos vértices opuestos de un cuadrado $A(3,0), C(-4,1)$, hallar los otros dos vértices.

R. $(0,4),(-1,-3)$

24. Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado, $A(2,-1), B(-1,3)$ hallar los otros dos.

R. (-5,0), (-2,-4), (3,6), (6,2)

25. Los puntos medios de los lados de un triángulo son: $M(2,-1), N(-1,4), P(-2,2)$. Encuentra las coordenadas de los vértices.

R. (1,-3), (3,1), (-5,7)

26. Dados dos vértices adyacentes de un paralelogramo A(-3,5), B(1,7) y el punto de intersección de las diagonales M(1,1), determine las coordenadas de los otros dos vértices.

R. (5,-3), (1,-5)

27. El segmento limitado por los puntos A(1,-3), B(4,3) ha sido dividido en tres partes iguales. Encuentra las coordenadas de los puntos de división.

R. (2,-1), (3,1)

28. Los vértices de un cuadrilátero son: A(-2,14), B(4,-2), C(6,-2), D(6,10)

Determina el punto de intersección de las diagonales AC y BD.

R. $\left(\frac{9}{2}, 1 \right)$

29. El punto M de intersección de las medianas de un triángulo está situado en el eje de las abscisas, dos de sus vértices son los puntos $A(2,-3), B(-5,1)$ el tercer vértice C está en el eje de las ordenadas. Encuentra las coordenadas de los puntos M, C

R. M(-1,0), C(0,2)

30. Determinar el área del paralelogramo, tres de cuyos vértices son los puntos

$A(-2, 3), \quad B(4, -5), \quad C(-3, 1)$

Solución

$20u^2$

31. El área de un triángulo es 4 unidades de superficie, dos de sus vértices son los puntos $A(2,1), B(3,-2)$, el tercer vértice está situado en el eje de las abscisas. Encuentra las coordenadas del vértice C

Solución

$(5, 0), \quad \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

32. El área de un triángulo es12 unidades de superficie, dos de sus vértices son los puntos A(-1,3), B(-2,4) hallar los otros dos vértices de este paralelogramo, sabiendo que el punto de intersección de sus diagonales está situado en el eje de las abscisas.

R. (-7,-3), (-6,4), (17,-3), (18,-4)

Ejercicio. Obtención de ecuaciones de lugares geométricos

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) que equidistan de los ejes coordenados.

R: $y = x$

2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) que distan 4 unidades del eje de las abscisas.

R. $y = \pm 4$

3. Desde el punto $A(6, -8)$ se han trazado todos los rayos posibles hasta su intersección con el eje de ordenadas. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios P(x, y).

R. $x = 3$

4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y), cuya diferencias de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(-4,0), B(4,0), sea igual a 8.

R. $16x \pm 8 = 0$

5. Hallar la ecuación de la trayectoria del punto P(x, y) que en cada momento de su movimiento equidista por igual de los puntos.

$a)$ A(3, 2), B(2, 3);　　　$b)$ C(5, −1), D(1, − 5)

R. $a) x - y = 0 \quad b) x + y = 0$

6. Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de esta circunferencia cuyas longitudes sea igual a 7u.

R. $x^2 + y^2 = 12.75$

7. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) , cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos A (- 3, 0) ,

B (3, 0) sea igual 50.

R. $x^2 + y^2 = 16$

8. Los vértices de un cuadrado son los puntos A(4,4), B(-4,4), C(-4,-4), D(4,-4) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) cuya suma de

los cuadrados de sus distancias a los lados de este cuadrado se una cantidad constante, igual a 96.

R. $x^2 + y^2 = 16$

9. Por el origen de coordenadas se han trazado todas las cuerdas posibles a la circunferencia $(x-8)^2 + y^2 = 64$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas.

R. $(x-4)^2 + y^2 = 16$

10. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y) en que la suma de sus distancias a dos puntos dados $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ sea una cantidad constante igual a 10.

R. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

11. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P (x, y), cuyas distancias a un punto dado F(3,0) sean iguales a sus distancias a la recta $x+3=0$.

R. $y^2 = 12x$

Bibliografia

Moise – Downs. Geometría. Fondo Educativo Interamericano

PROBLEMAS DE GEOMETRIA ANALITICA

D. KLETENIK.EDITORIAL MIR, MOSCU CUARTA EDICION.