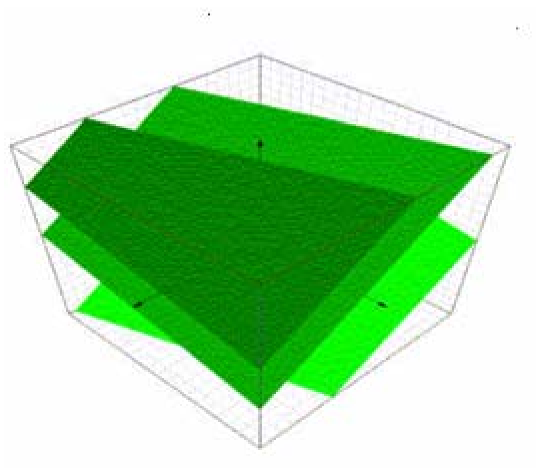
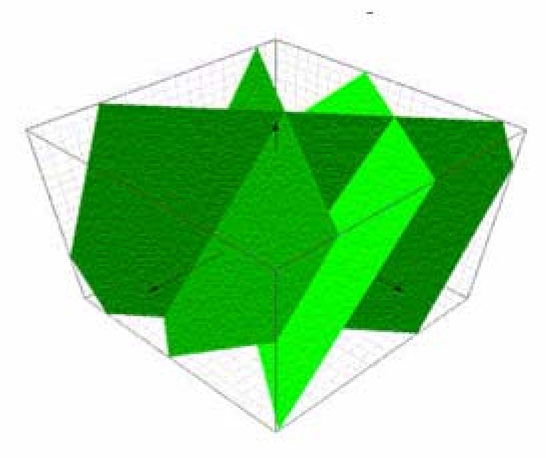
UNIDAD 1: SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES





UNIDAD 1. SISTEMAS DE ECUACIONES.

Propósitos: Ampliar el concepto de sistema de ecuaciones y extender dos procedimientos algebraicos de solución. Reafirmar el significado algebraico y gráfico de la solución de un sistema. Proporcionar una herramienta para el manejo del método analítico. Avanzar en la operatividad algebraica.

PRESENTACIÓN

NOTAS HISTÓRICAS SOBRE LAS ECUACIONES LINEALES.

Para las ecuaciones de primer grado, la primera fase comprende el periodo de 1700 a.C. a 1700 d.C., se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de ésta fase se puede hallar un álgebra desarrollada por los griegos (300 a.C.) llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a **Viète** (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual **Descartes** (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, **Euler** (1707-1783) la define como la teoría de los "*cálculos con cantidades de distintas clases*" (cálculos con números racionales, enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones)

Para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación $ax+b=c$ han pasado más de 300 años.

Los egipcios dejaron en sus papiros (sobre todo en el de **Rhid**-1650 a.C. y el de **Moscú** 1850 a.C.) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que se pueden clasificar como algebraicos, pues no se refieren a ningún objeto concreto. En estos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy se resuelven dichas ecuaciones.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x+ax=b$$
$$x+ax+bx=0$$

Donde a, b y c eran números conocidos y x la incógnita que ellos denominaban *aha* o montón.

Una ecuación lineal que aparece en el papiro de **Rhid** responde al problema siguiente:

"*Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*"

En notación moderna, la ecuación sería: $x + \frac{1}{7}x = 24$

La solución la obtenían, por un método que hoy conocemos con el nombre de "*método de la falsa posición*". Consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad, ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos obtendremos la solución exacta.

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil como en este caso e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones con numerador la unidad), cuyo uso dominaban los egipcios. En cuanto al simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.

Los babilonios casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizá por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado. Entre las pocas que aparecen, tenemos la ecuación $5x = 8$.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, excepto **Diofante** (250 d.C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación mayor era la Geometría.

Los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo III d.C.) son los **Sulvasütras**, donde se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos. En estos aparece el siguiente problema:

"*Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado*". Esto es, resolvían la ecuación $ax = S$ utilizando el método de la falsa posición, como los egipcios.

Posteriormente, **Brahmagupta** (siglo VII) expresa, ya de forma abreviada, como resolver ecuaciones lineales. La incógnita la representaba por la abreviatura *ya*, y las operaciones con la primera silaba de las palabras.

Dada la ecuación $ax + b = cx + d$, la solución vendrá dada dividiendo la diferencia de los términos conocidos entre la diferencia de los coeficientes de los desconocidos, esto es:

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Estos métodos pasaron a los árabes que los extendieron por Europa. Al algebrista **Abu-Kamil** (siglo IX y X) se le atribuye una obra donde trata la solución de las ecuaciones lineales por simple y doble falsa posición.

Ejemplo: Resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x - 7y = -16 \\ 2x + 8y = 26 \end{cases}$$

Solución

Las ecuaciones de este sistema se pueden sumar directamente dando como resultado:

$$\begin{array}{r} 5x - 7y = -16 \\ + \quad 2x + 8y = \ \ 26 \\ \hline 7x \ + \ y = \ 10 \end{array}$$

Hay que notar que en éste resultado, la ecuación sigue teniendo dos variables. Para resolver el sistema, se busca que el resultado contenga solo una variable, por lo que es necesario modificar las ecuaciones antes de sumarlas.

Si multiplicamos la primera ecuación por -2:

$$-2(5x - 7y = -16) \rightarrow -10x + 14y = 32$$

La segunda ecuación la multiplicamos por 5:

$$5(2x + 8y = 26) \rightarrow 10x + 40y = 130$$

Y ahora se suman las dos ecuaciones obtenidas, es decir:

$$\begin{array}{r} -10x + 14y = 32 \\ 10x + 40y = 130 \\ \hline 54y = 162 \end{array}$$

Se ha conseguido eliminar los términos de la variable x, por lo que ahora resolvemos la ecuación para la variable y:

$$y = \frac{162}{54} = 3$$

Se resuelve la variable x regresando a cualquiera de las ecuaciones originales y sustituyendo el valor de $y = 3$.

Usando la primera:

$$5x - 7(3) = -16$$
$$5x - 21 = -16$$
$$5x = 21 - 16$$

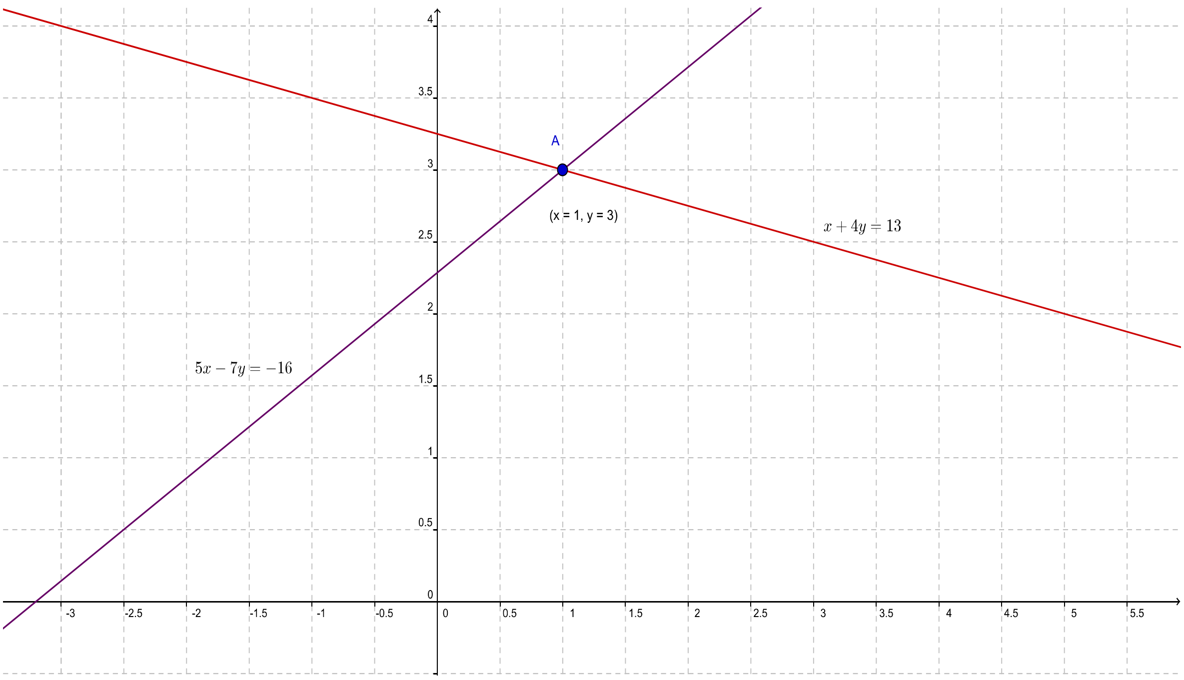
$$5x = 5$$
$$x = \frac{5}{5}$$
$$x = 1$$

Análogamente, se puede usar la segunda ecuación para hallar este mismo valor de la variable *x*.

Se llama solución del sistema a los valores: $x = 1$, $y = 3$

Para verificar que no se haya introducido algún error, se comprueba esta solución, sustituyendo en las ecuaciones del sistema.

Desde el punto de vista gráfico, las ecuaciones (i) y (ii) corresponden con rectas, trazadas en el plano cartesiano.



La extensión del método, para sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas se expone en el siguiente ejemplo.

1.Sistemas de Ecuaciones Lineales de 3x3.

Ejemplo 1.

Uno de los más influyentes libros de matemáticas chinos fue el *Chui-chang suan-shu* o *Nueve capítulos sobre el arte de las Matemáticas*, escrito aproximadamente en el año 250 a.C. El capítulo ocho de los Nueve capítulos contenía soluciones de sistemas de ecuaciones lineales que usaban números positivos y negativos. Uno de estos sistemas era como sigue:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39.................(i) \\ 2x+3y+z=34.................(ii) \\ x+2y+3z=26.................(iii) \end{cases}$$

Usamos la técnica del ejemplo anterior

Se multiplica por –2 la ecuación (iii):

$$-2(x+2y+3z=26) \to -2x-4y-6z=-52$$

Y este resultado, se suma con la ecuación (ii):

$$\begin{array}{r} -2x-4y-6z=-52 \\ + \quad 2x+3y\ +\ z=\ 34 \\ \hline -y-\ 5z=-18.............(iv) \end{array}$$

Es necesario combinar otro par de las ecuaciones originales, para obtener una ecuación donde la incógnita x se cancele.

Ahora multiplicamos por –3 la ecuación (ii):

$$-3(2x+3y+z=34) \to -6x-9y-3z=-102$$

Y la ecuación (i) por 2:

$$2(3x+2y+z=39) \to 6x+4y+2z=78$$

Finalmente se suman estos dos resultados:

$$\begin{array}{r} -6x-9y-3z=-102 \\ + \quad 6x\ +4y\ +2z=78 \\ \hline -5y-z=-24.............(v) \end{array}$$

Ahora trabajamos con las ecuaciones (iv) y (v). Se multiplica por –5 la ecuación (iv):

$$-5\left(-y-\ 5z=-18\right) \to 5y+25z=90$$

Y si se suma con la ecuación (v):

$$\begin{array}{r} -5y-z=-24 \\ + \quad 5y+25z=90 \\ \hline 24z=66............(vi) \end{array}$$

Si se aglutinan las ecuaciones (i), (iv) y (vi), el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i) \\ \quad -y - 5z = -18 \ldots\ldots\ldots\ldots(iv) \\ \qquad\quad 24z = 66 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(vi) \end{cases}$$

Que se resuelve de la siguiente forma:

De la ecuación (vi) se resuelve z

$$z = \frac{66}{24} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4}$$

Se sustituye este resultado en la ecuación (iv) y se resuelve para y:

$$-y - 5\left(\frac{11}{4}\right) = -18$$

$$-y - \frac{55}{4} = -18$$

$$-y = -18 + \frac{55}{4}$$

$$-y = -\frac{17}{4}$$

$$y = \frac{17}{4}$$

Con los valores de y y z conocidos, se sustituyen en la ecuación (i) y se resuelve para x.

$$3x + 2y + z = 39$$

$$3x + 2\left(\frac{17}{4}\right) + \left(\frac{11}{4}\right) = 39$$

$$3x + \frac{34}{4} + \frac{11}{4} = 39$$

$$3x + \frac{45}{4} = 39$$

$$3x = 39 - \frac{45}{4}$$

$$3x = \frac{111}{4}$$

$$x = \frac{111/4}{3}$$

$$x = \frac{111}{12} = \frac{37}{4}$$

Tenemos que las incógnitas resueltas son:

$$x = \frac{37}{4}\ ,\ \ y = \frac{17}{4}\ ,\ \ z = \frac{11}{4}$$

Sustituimos en las ecuaciones del sistema original para comprobar.

Ecuación (i):

$$3x + 2y + z = 39$$

$$3\left(\frac{37}{4}\right) + 2\left(\frac{17}{4}\right) + \left(\frac{11}{4}\right) = 39$$

$$\left(\frac{111}{4}\right) + \left(\frac{34}{4}\right) + \left(\frac{11}{4}\right) = 39$$

$$\frac{156}{4} = 39$$

$$39 = 39$$

Ecuación (ii):

$$2x + 3y + z = 34$$

$$2\left(\frac{37}{4}\right) + 3\left(\frac{17}{4}\right) + \left(\frac{11}{4}\right) = 34$$

$$\left(\frac{74}{4}\right) + \left(\frac{51}{4}\right) + \left(\frac{11}{4}\right) = 34$$

$$\frac{136}{4} = 34$$

$$34 = 34$$

Ecuación (iii):

$$x + 2y + 3z = 26$$

$$\left(\frac{37}{4}\right) + 2\left(\frac{17}{4}\right) + 3\left(\frac{11}{4}\right) = 26$$

$$\left(\frac{37}{4}\right)+\left(\frac{34}{4}\right)+\left(\frac{33}{4}\right)=26$$

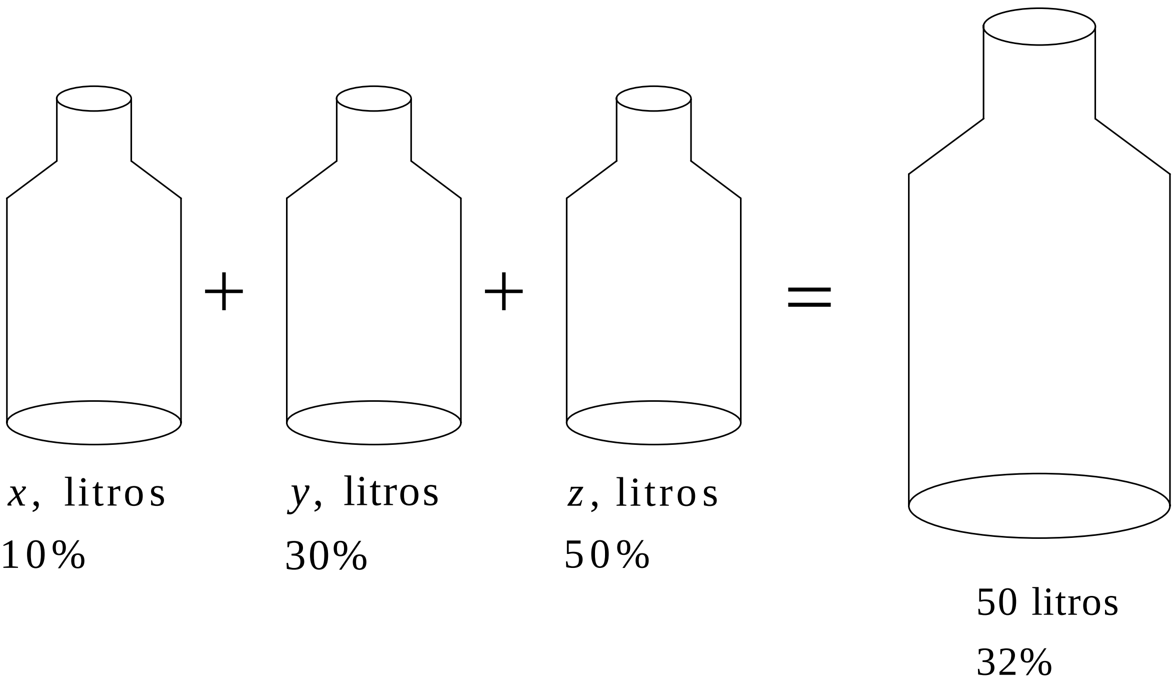
$$\frac{104}{4}=26$$

$$26=26$$

Al terminar la comprobación el sistema está resuelto.

Ejemplo 2. Problema de Aplicación (Mezclas):

Tres soluciones contienen ácido en diferentes porcentajes: 10, 30 y 50. Un químico desea usar las tres para producir una mezcla de 50 litros que contenga 32% de ácido. Si quiere utilizar el doble de la solución al 50%, respecto a la de 30%, ¿cuántos litros de cada solución debe usar?



Hay que constituir ecuaciones que modelen las condiciones del problema. La primera ecuación:

Se van a conseguir 50 litros de solución al 32% combinando las tres soluciones iniciales. La solución de 10% contribuye con x litros, la de 30% contribuye con y litros y finalmente la de 50% con z litros

$$x+y+z=50 \qquad (i)$$

En ácido presente en la solución final debe ser:

32% de 50 litros, es decir:

$$0.32(50)=16 \text{ litros}$$

Y cada solución inicial, contribuye con una parte de ácido, de acuerdo a su concentración, de modo tal que al sumarlas el resultado debe ser 16 litros.

$$0.1x+0.3y+0.5z=16 \qquad (ii)$$

La última ecuación se construye con la condición: el doble de la solución al 50%, respecto a la de 30%.

$$2z=y \qquad (iii)$$

Las ecuaciones (i), (ii) y (iii) se agrupan para constituir un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=50 \\ 0.1x+0.3y+0.5z=16 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

Solución:

Combinamos las ecuaciones (i) y (ii) para cancelar a x, de la siguiente forma:

Multiplicamos la ecuación (i) por –0.1 y sumamos con la ecuación (ii)

$$-0.1(x+y+z=50)\rightarrow -0.1x-0.1y-0.1z=-5$$

$$\begin{array}{r} -0.1x-0.1y-0.1z=-5 \\ +\quad 0.1x+0.3y+0.5z=16 \\ \hline 0.2y+0.4z=11 \end{array} \text{............................}(iv)$$

Ahora, combinaremos las ecuaciones (iii) y (iv) para cancelar y:

Multiplicamos por –0.2 la ecuación (iii) y la sumamos con la ecuación (iv):

$$-0.2\left(y-2z=0\right)\rightarrow -0.2y+0.4z=0$$

$$\begin{array}{r} -0.2y+0.4z=0 \\ +\quad 0.2y+0.4z=11 \\ \hline 0.8z=11 \end{array} \text{...........................}(v)$$

Con este proceso se ha construido un sistema de tres ecuaciones reducido:

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ y - 2z = 0 \\ 0.8z = 11 \end{cases}$$

Con la última ecuación resolvemos *z*.

$$z = \frac{11}{0.8}$$

$$z = 13.75$$

Con la ecuación de en medio:

$$y = 2z$$

$$y = 2\left(\frac{55}{4}\right)$$

$$y = 27.5$$

Finalmente, con la primera ecuación se resuelve *x*:

$$x = 50 - y - z$$

$$x = 50 - 13.75 - 27.5$$

$$x = 8.75$$

Ejemplo 3. Hay tres cadenas que pesan 450, 610 y 950 onzas, cada una de las cuales está formada por eslabones de tres tamaños diferentes. Cada cadena tiene 10 eslabones pequeños. Las cadenas tienen también 20, 30 y 40 eslabones medianos y 30, 40 y 70 eslabones grandes, respectivamente. Encuentra los pesos de los eslabones pequeños, los medianos y los grandes.

Solución:

Asignamos tres incógnitas a los pesos de los eslabones pequeños, medianos y grandes.

p: peso de eslabones pequeños
m: peso de eslabones medianos
g: peso de eslabones grandes

Con estas incógnitas construimos las ecuaciones.

Es importante reconocer que el producto (Número de eslabones)(Peso de cada eslabón) es igual a la contribución en peso de los eslabones de ese tamaño.

La cadena 1 pesa 450 onzas y está constituida por 10 eslabones pequeños, 20 medianos y 30 grandes.

$$10p + 20m + 30g = 450 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

La cadena 2 pesa 610 onzas y está compuesta por 10 eslabones pequeños, 30 medianos y 40 grandes.

$$10p + 30m + 40g = 610 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

Y la tercera cadena pesa 950 onzas

$$10p + 40m + 70g = 950 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

El sistema con las ecuaciones (i), (ii) y (iii)

$$\begin{cases} 10p + 20m + 30g = 450 \\ 10p + 30m + 40g = 610 \\ 10p + 40m + 70g = 950 \end{cases}$$

A la ecuación (ii) le restamos la ecuación (i):

$$\begin{array}{r} 10p + 30m + 40g = 610 \\ -\ \underline{10p + 20m + 30g = 450} \\ 10m + 10g = 160 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iv) \end{array}$$

A la ecuación (iii) le restamos la ecuación (ii):

$$\begin{array}{r} 10p + 40m + 70g = 950 \\ -\ \underline{10p + 30m + 40g = 610} \\ 10m + 30g = 340 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(v) \end{array}$$

Y finalmente a la ecuación (v) le restamos la ecuación (iv):

$$\begin{array}{r} 10m + 30g = 340 \\ -\ \underline{10m + 10g = 160} \\ 20g = 180 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(vi) \end{array}$$

El sistema de ecuaciones reducido, considerando las ecuaciones (i), (iv) y (vi):

$$\begin{cases} 10p+20m+30g=450 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i) \\ \qquad 10m+10g=160 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iv) \\ \qquad\qquad 20g=180 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (vi) \end{cases}$$

Con la ecuación (vi) se resuelve g:

$$g=\frac{180}{20}$$
$$g=9$$

Sustituyendo g en la ecuación (iv):

$$10m+10(9)=160$$
$$10m+90=160$$
$$10m=160-90$$
$$10m=70$$
$$m=7$$

Finalmente se sustituyen g y m en la ecuación (i):

$$10p+20m+30g=450$$
$$10p+20(7)+30(9)=450$$
$$10p+140+270=450$$
$$10p+410=450$$
$$10p=450-410$$
$$p=\frac{40}{10}$$
$$p=4$$

Finalmente, las respuestas al problema son:

Peso de los eslabones pequeños: 4 onzas
Peso de los eslabones medianos: 7 onzas
Peso de los eslabones grandes: 9 onzas

A continuación ilustraremos con otro problema de aplicación.

Ejemplo 4. Una alcancía contiene 50 monedas de 5, 10 y 25 centavos. El valor total de las monedas es 5.60 dólares, y el valor de las monedas de 10 centavos es cinco veces el valor de las monedas de 5 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

Solución.

Asignamos las variables x, y y z a los tres tipos de monedas

x : Número de monedas de 5 centavos
y : Número de monedas de 10 centavos
z : Número de monedas de 25 centavos

Traducimos las diferentes partes del texto del problema:

"Una alcancía contiene 50 monedas de 5, 10 y 25 centavos". En total son 50 monedas de tres denominaciones distintas.

$$x + y + z = 50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

"El valor total de las monedas es 5.60 dólares". Esto da lugar a la ecuación que expresa el monto total obtenido de las tres diferentes denominaciones.

$$\frac{5}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{25}{100}z = 5.6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

Los coeficientes de la ecuación (i) se pueden expresar en forma decimal, la ecuación queda como:

$$0.05x + 0.1y + 0.25z = 5.6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

"El valor de las monedas de 10 centavos es cinco veces el valor de las monedas de 5 centavos".

$$0.1y = 5\left(0.05x\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

Cuando se simplifica la ecuación (iii) queda como:

$$0.1y = 0.25x$$
$$0.25x - 0.1y = 0$$

Así, el sistema de ecuaciones que representa el problema es

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i) \\ 0.05x + 0.1y + 0.25z = 5.6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii) \\ 0.25x - 0.1y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii) \end{cases}$$

Se cancela el término de z usando las ecuaciones (i) y (ii). El resultado lo obtenemos multiplicando por –0.25 la ecuación (i) y el resultado se suma a la ecuación (ii):

$$-0.25(x+y+z=50) \rightarrow -0.25x-0.25y-0.25z=-12.5$$

$$\begin{array}{rl} & -0.25x-0.25y-0.25z=-12.5 \\ + & \underline{\;\;0.05x\;+\;0.1y\;+0.25z=5.6\;\;} \\ & -0.2x-0.15y \qquad\qquad =-6.9 \text{........................}(iv) \end{array}$$

Ahora combinamos las ecuaciones (iii) y (iv) para cancelar los términos de y. La ecuación (iii) se multiplica por –0.15 y la (iv) por 0.1 y se suman ambos resultados.

$$-0.15\left(0.25x-0.1y=0\right) \rightarrow -0.0375x+0.015y=0$$

$$0.1\left(-0.2x-0.15y=-6.9\right) \rightarrow -0.02x-0.015y=-0.69$$

$$\begin{array}{rl} & -0.0375x+0.015y=0 \\ + & \underline{\;\;-0.02x-0.015y=-0.69\;\;} \\ & -0.0575x=-0.69 \text{..}(v) \end{array}$$

Ya tenemos las ecuaciones que conforman nuestra forma reducida, si presentamos las ecuaciones (i), (iii) y (v), el sistema queda expresado como:

$$\begin{cases} x+y+z=50 \text{............}(i) \\ 0.25x-0.1y=0 \text{........}(iii) \\ -0.0575x=-0.69 \text{...........}(v) \end{cases}$$

De la ecuación (v):

$$x=\frac{-0.69}{-0.0575}$$

$$x=12$$

Con este valor resolvemos la ecuación (iii) para y :

$$y=\frac{0.25x}{0.1}$$

$$y=\frac{0.25\left(12\right)}{0.1}$$

$$y=30$$

Para terminar, resolvemos z de la ecuación (i):

$$z=50-x-y$$

$$z = 50 - 12 - 30$$

$$z = 8$$

Revisamos que los valores obtenidos son enteros, tal como se esperaban por el contexto del problema, solo se pueden tener monedas enteras (que significado le daríamos a una fracción, por ejemplo media moneda). La solución al problema es:

12 monedas de 5 centavos
30 monedas de 10 centavos
8 monedas de 25 centavos

La altura en el tiempo t de un cuerpo que se mueve en una recta (vertical) con aceleración constante a está dada por la ecuación de posición

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

La altura s se mide en pies, la aceleración a en pies por segundo al cuadrado, t en segundos, v_0 es la velocidad inicial (en t = 0) y s_0 es la altura inicial. Encuentre los valores de a, v_0 y s_0 si: s = 52 en t = 1, s = 52 en t = 2 y s = 20 en t = 3, e interprete el resultado.

Solución

Al sustituir los tres valores de t y s en la ecuación de posición, se pueden obtener tres ecuaciones lineales en a, v_0 y s_0:

Cuando t = 1: $\frac{1}{2}a(1)^2 + v_0(1) + s_0 = 52 \rightarrow a + 2v_0 + 2s_0 = 104$

Cuando t = 2: $\frac{1}{2}a(2)^2 + v_0(2) + s_0 = 52 \rightarrow 2a + 2v_0 + s_0 = 52$

Cuando t = 3: $\frac{1}{2}a(3)^2 + v_0(3) + s_0 = 20 \rightarrow 9a + 6v_0 + 2s_0 = 40$

Esto produce el siguiente sistema

$$\begin{cases} a + 2v_0 + 2s_0 = 104 \\ 2a + 2v_0 + s_0 = 52 \\ 9a + 6v_0 + 2s_0 = 40 \end{cases}$$

El cual se resuelve con el método expuesto en los ejemplos anteriores. Se escribe la solución al problema:

$a = -32$

$v_0 = 48$

$s_0 = 20$

PROBLEMAS PROPUESTOS. Plantee y resuelva cada uno de los siguientes problemas.

1. En el zoológico de Pittsburgh, los niños pasean en un tren por 25 centavos, los adultos pagan $1.00 y las personas de la tercera edad 75 centavos. En un día dado, 1400 pasajeros pagaron un total de $740 por los viajes. Había 250 más niños que todos los otros visitantes. Determine el número de niños, adultos y personas de la tercera edad.
   Solución (*825 niños, 410 adultos y 165 de la tercera edad*)

2. *Metales Stewart* tiene disponibles tres aleaciones de plata. Una tiene 22% de plata, otra tiene 30% de plata y la tercera tiene 42% de plata. ¿Cuántos gramos de cada aleación se requieren para producir 80 gramos de una nueva aleación que contenga 34% de plata, si la cantidad utilizada de la aleación al 30% es el doble de la cantidad de aleación al 22% utilizada?
   Solución (*14.54 grms[22%], 29.09 grms[30%] y 36.36 grms[42%]*)

3. Una tienda se especializa en mezclas de café para exigentes. El dueño desea preparar bolsas de una libra que se vendan en $8.50 combinando granos de Colombia, Brasil y Kenia. El costo por libra de estos cafés es $10, $6 y $8, respectivamente. El café de Colombia debe triplicar al de Brasil. Da la cantidad de cada tipo de café de la mezcla.
   Solución (*Colombia:0.375, Brasil:0.125 y Kenia:0.5*)

4. El perímetro de un triángulo es 180 pies. Su lado más largo es 9 pies más corto que dos veces el lado más corto. La suma de las longitudes de los dos lados más cortos es 30 pies más que la longitud del lado más largo. Encuentre la longitud de los lados del triángulo.
   Solución (*los lados del triángulo son de 42, 63 y 75 pies*)

Ejercicio. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de suma o resta para triangular el sistema.

1. . $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=-3 \\ 2x+3y-4z=-3 \end{cases}$ Sol (3,-3,0)

2. $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 3x+y+5z=8 \\ 2x-y-2z=-7 \end{cases}$ Sol (-1,1,2)

3. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+3z=10 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$ Sol (1,2,1)

4. $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 3x+7y-3z=12 \\ -2x-4y+3z=-5 \end{cases}$ Sol (-2,3,1)

5. $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-5y+6z=7 \\ 2x-3y+2z=5 \end{cases}$ Sol (1,-1,0)

6. $\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 4x-8y+5z=-5 \end{cases}$ Sol (7,6,3)

7. $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x-y+3z=-4 \\ 3x+y-z=-2 \end{cases}$ Sol (-24/25,7/25,-3/5)

8. $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3x+4y+10z=5 \\ x+2y-4z=3 \end{cases}$

Sol(7/2,-3/4,1/4)

2. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES 2X2.

Los sistemas de ecuaciones no lineales, los constituyen aquellos en donde al menos una de las ecuaciones del sistema es no lineal. Una ecuación es no lineal cuando las variables tienen exponente diferente de –1 y cuando las variables están multiplicándose entre sí o dividiéndose.

Ejemplo 5. Resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x^2+4x-y=7............(i) \\ 2x-y=-1..........(ii) \end{cases}$$

La ecuación (i) es no lineal, porque presenta a la variable x con un exponente dos en el primer término.

El método de solución consiste en resolver de la ecuación más simple a una de las variables y sustituirla en la ecuación restante.

Si se resuelve para x de la ecuación (ii).

$$x=\frac{y-1}{2}\ \ldots\ldots \qquad (iii)$$

Ahora, la expresión (iii) se sustituye en la ecuación (i).

$$3\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+4\left(\frac{y-1}{2}\right)-y=7$$

Esta ecuación ha de desarrollarse y simplificarse para resolverla en términos de la variable y.

$$3\left(\frac{y^2-2y+1}{4}\right)+\left(\frac{4y-4}{2}\right)-y=7$$

$$\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}+2y-2-y-7=0$$

$$\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{2}y-\frac{33}{4}=0$$

El último resultado exhibe a una ecuación cuadrática de la variable y. Las soluciones de la ecuación son:

$$y_1=-3 \text{ y } y_2=\frac{11}{3}$$

Y las soluciones para x son:

$$x_1 = \frac{y_1 - 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3-1}{2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = \frac{y_2 - 1}{2}$$

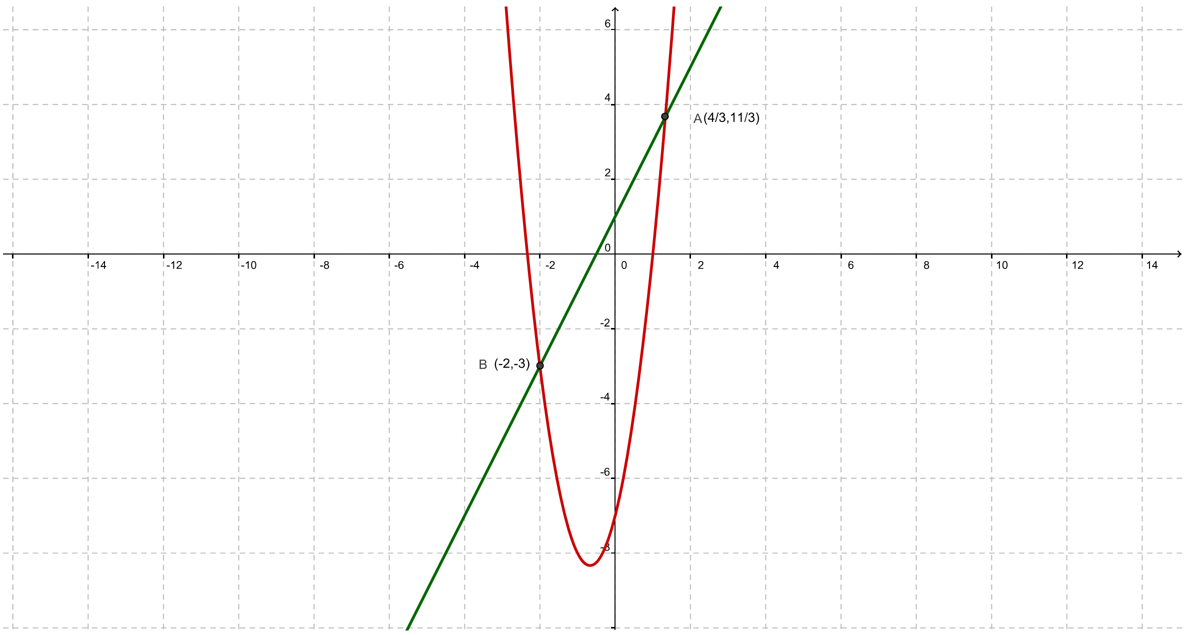
$$x_2 = \frac{\frac{11}{3} - 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$

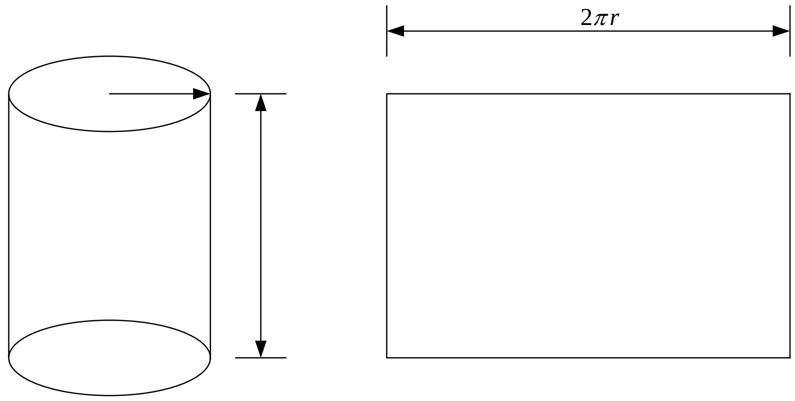
Como puntos en el plano cartesiano las soluciones son:

$(-2, -3)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$

Estos dos puntos solución, corresponden con los puntos en donde la gráfica de la ecuación (i) y la gráfica de la ecuación (ii) se intersectan.



Problema de aplicación 1. Determinar el radio y la altura de un cilindro abierto de manera tal que su volumen sea 50 cm^3 y el área de su superficie lateral sea de 65 cm^2.



Solución.

La primera ecuación se plantea de la expresión para el volumen del cilindro.

$$V_{cilindro} = \left(\pi r^2\right)h$$

La segunda ecuación está asociada al área de un rectángulo.

$$A = \left(2\pi r\right)h$$

El sistema queda conformado así

$$\begin{cases} \pi r^2 h = 50 \\ 2\pi r h = 65 \end{cases}$$

De la segunda ecuación despejamos a *h*:

$$h = \frac{65}{2\pi r}$$

Sustituimos este resultado en la primera ecuación:

$$\pi r^2 \left(\frac{65}{2\pi r}\right) = 50$$

$$\pi r^2 \left(\frac{65}{2\pi r}\right) = 50$$

$$\frac{65}{2} r = 50$$

$$r=\frac{100}{65}$$

$$r=\frac{20}{13}\text{ cm}$$

Y usando este valor hallamos a h:

$$h=\frac{65}{2\pi\left(\frac{20}{13}\right)}$$

$$h=\frac{169}{8\pi}\text{ cm}$$

Problema de aplicación 2. Determine las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 200 m y un área de 500 m^2.

Solución.

Si x es la base y y la altura, el perímetro queda expresado como:

$$2x+2y=200 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

En tanto el área es:

$$x\cdot y=500 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

El sistema que representa al problema es:

$$\begin{cases}2x+2y=200\\ x\cdot y=500\end{cases}$$

Despejamos a una incógnita de la ecuación (i), por ejemplo y:

$$y=100-x$$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$x\cdot(100-x)=500$$
$$100x-x^2-500=0$$

$$-x^2+100x-500=0$$

La ecuación resultante es cuadrática, aplicamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4(500)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{10000 - 2000}}{-2}$$

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{8000}}{-2}$$

$$x = \frac{-100 \pm 40\sqrt{5}}{-2}$$

$$x = 50 \pm 20\sqrt{5}$$

En este punto, se tienen dos soluciones, las simbolizamos

$$x_1 = 50 + 20\sqrt{5} \cong 94.72$$
$$x_2 = 50 - 20\sqrt{5} \cong 5.28$$

Como y depende de x, tendremos dos valores de y tales que:

$$y_{1,2} = 100 - x_{1,2}$$

$$y_1 = 100 - (50 + 20\sqrt{5})$$
$$y_1 = 50 - 20\sqrt{5} \cong 5.28$$

$$y_2 = 100 - (50 - 20\sqrt{5})$$
$$y_1 = 50 + 20\sqrt{5} \cong 94.72$$

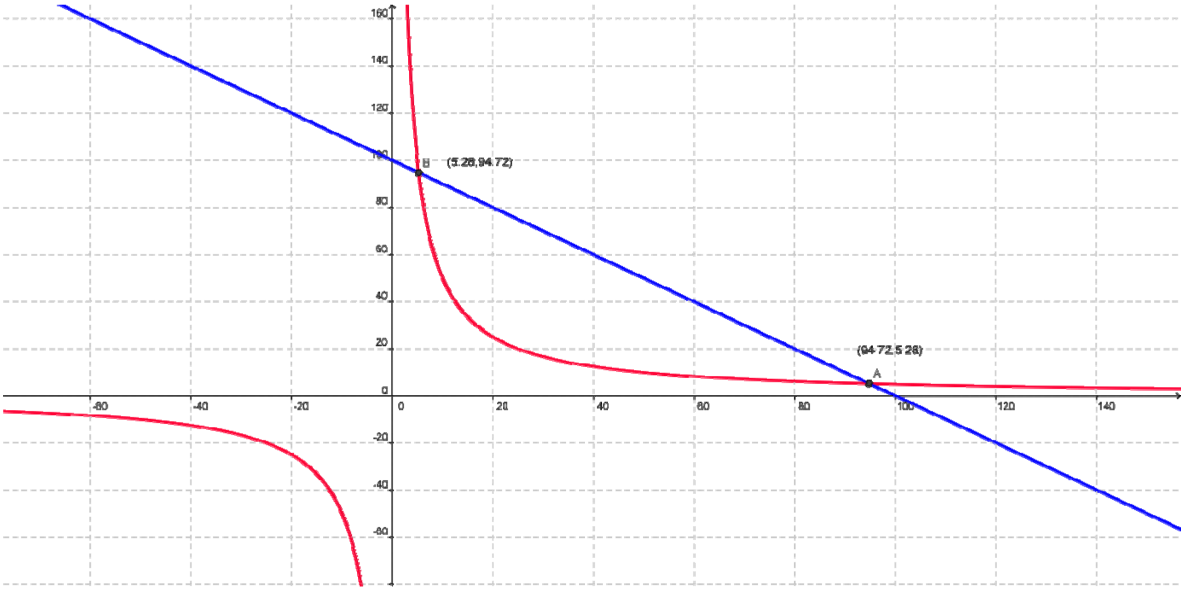
En notación de puntos en el plano cartesiano, las soluciones son:

$$\left(50 + 20\sqrt{5}, 50 - 20\sqrt{5}\right) \text{ y } \left(50 - 20\sqrt{5}, 50 + 20\sqrt{5}\right)$$

O bien con valores aproximados

$$(5.28, 94.72) \text{ y } (94.72, 5.28)$$

En la gráfica se observan las gráficas de las ecuaciones (i) y (ii), y sus puntos de intersección.



Ejercicios propuestos Resolver cada sistema.

1. $\begin{cases} y = 6x^2 \\ 7x + y = 3 \end{cases}$ Sol (-1.5,13.5) y (1/3,2/3) 6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ Sol (2.73,1.24) y (-2.93,-.64)

2. $\begin{cases} y = 2x^2 + x \\ 2x + y = 20 \end{cases}$ Sol(-4,28) y (2.5,15) 7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 4x + 7y = 13 \end{cases}$ Sol (-2.37,3.21) y (2.37,-3.21)

3. $\begin{cases} y = x^3 - x^2 \\ y = 2x^2 \end{cases}$ Sol(0,0) y (3,18) 8. $\begin{cases} y = x^3 - 4x \\ 4 = x - 2y \end{cases}$ Sol(-2.3,-3.1), (0.4,-1.7) y (1.8,-1.07)

4. $\begin{cases} y = x^3 + x^2 \\ y = -x^2 \end{cases}$ Sol(-2,-4), (0,0) 9. $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 5 \\ 1 = 2x - y \end{cases}$ Sol(-0.701,-2.403) y (5.701,10.403)

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$ Sol (-2.047,-2.192) y (2.047,-2.192)