SOLUCIÓN GENERAL Y SOLUCIÓN PARTICULAR DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Propósito

Al finalizar esta sección, quien imparte el curso habrá logrado que los estudiantes:

- Distingan la solución general de una solución particular para una ecuación diferencial

PROBLEMA DEL FÓSFORO RADIACTIVO (P32)

Si $20\ g$ de un isótopo radiactivo de Fósforo se reducen a $10\ g$ en 14 días, ¿qué cantidad de ese Fósforo permanecerá después de 18 días?

Anteriormente abordamos a manera de ejemplo, un problema sobre el decaimiento de elementos radiactivos y pudimos llegar sólo a la expresión

$$A(t) = A_0\, e^{-kt}$$

que nos dice que la masa del elemento radiactivo presente en el instante t, es $A(t)$.

Para tener una solución particular, necesitamos alguna información adicional que nos permita encontrar el valor de k, y hacer que $A(t)$ dependa exclusivamente de t, para que pueda ser evaluada directamente en cualquier instante.

Ejemplo 1

$f(x) = e^{-2x}$ es solución de la ecuación diferencial, $\frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0$ porque sustituyendo $f(x)$ y $\frac{df(x)}{dt} = -2e^{-2x}$ en la ecuación diferencial, obtenemos una identidad.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Pedir a los estudiantes que verifiquen lo anterior.

$-2e^{-2x} + 2(e^{-2x}) = 0, \quad 0 = 0$

Sin embargo, podemos comprobar que $f(x) = 2e^{-2x}$ ó $f(x) = 3e^{-2x}$ ó $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$ también son soluciones de la misma ecuación diferencial.

Verificarlo.

De hecho toda la familia de funciones

$$f(x) = Ce^{-2x}$$

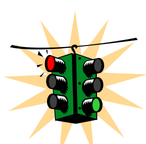
con C un número real arbitrario, son soluciones de la ecuación $\frac{df(x)}{dx} + 2Cf(x) = 0$.

Una solución de este tipo, que contiene una o más constantes arbitrarias, se llama *solución general de la ecuación diferencial* y corresponde a toda una familia de funciones, un miembro de la familia para cada valor asignado a cada constante.

Todas las soluciones que se obtienen al resolver los problemas del ejercicio 3, de la página 24, son *soluciones generales*.

Una solución *particular* de una ecuación diferencial, es la que se obtiene a partir de información adicional que permita asignar valores específicos a las constantes que aparecen en la solución general.

En la práctica, se obtienen soluciones particulares de una ecuación diferencial a partir de *condiciones iniciales* impuestas a la función desconocida y a sus derivadas.



Conceptos clave:

13. Solución de una ecuación diferencial

Una función $f(x)$ es una *solución* de una ecuación diferencial dada, sólo si la ecuación se satisface cuando $f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en dicha ecuación.

14. Solución general de una ecuación diferencial

Una solución que contiene una o más constantes arbitrarias, se llama *solución general de la ecuación diferencial* y corresponde a toda una familia de funciones, un miembro de la familia para cada valor asignado a cada constante.

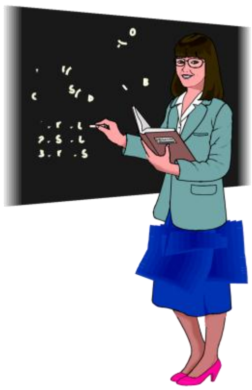
15. Solución particular de una ecuación diferencial

Una solución *particular* de una ecuación diferencial, es la que se obtiene a través de información adicional que permita asignar valores específicos a las constantes que aparecen en la solución general.

16. Condiciones iniciales o condiciones a la frontera

Se llama así a la información adicional que nos permite encontrar una solución particular a un problema dado.

En nuestro caso, las condiciones iniciales nos permitirán hallar el valor de las constantes que aparecen en la solución general de una ecuación diferencial.



Ejemplo 2

Si a la solución de la ecuación diferencial con que trabajamos en el ejemplo anterior $\frac{df(x)}{dx} + 2Cf(x) = 0$ le imponemos la condición de que $f(0) = 4$, es decir, pedimos que cuando $x = 0$, $f(0) = 4$, entonces:

$$f(x) = Ce^{-2x}$$

$$C\,e^{-2(0)} = 4$$

$$C = 4$$

Por lo tanto, una solución particular de $\frac{df(x)}{dx} + 2Cf(x) = 0$ es

$$f(x) = 4e^{-2x}$$

Si la condición inicial fuera que $f(x) = 1$ cuando $x = 5$, tendríamos que:

$$C\,e^{-2(5)} = 1$$

$$C = \frac{1}{e^{-10}} = e^{10}$$

Con lo que la solución particular en este caso es

$$f(x) = e^{-2x+10}$$

Ejercicio 1

1. Verificar que $f(x) = C\,x^3$ es una solución general de la ecuación diferencial $x\frac{df}{dx} - 3f(x) = 0$
2. Encontrar la solución particular de la ecuación anterior, determinada por las condiciones iniciales $f(x) = 9$ cuando $x = -3$.

Volviendo al problema del Fósforo radiactivo.

Sabemos que “la desintegración de un elemento radiactivo tiene lugar de manera continua, con una rapidez directamente proporcional a la cantidad del elemento presente”:

$$\frac{dA}{dt} = -k\,A$$

$$\frac{1}{A}dA = -k\,dt$$

$$\int \frac{1}{A}dA = \int -k dt$$

$$ln\, A = -\,k\,t + c$$

$$e^{ln\,A} = e^{-k\,t\,+\,c} = e^{c}\,e^{-k\,t}$$

$$A = e^{c}e^{-k\,t}$$

Una primera condición inicial fue que cuando $t = 0$, $A = A_0$, lo que nos llevó a

$$A(t) = A_0e^{-k\,t}$$

Que constituye una solución general. Sin embargo, el problema incluye condiciones iniciales que nos permitirán obtener un valor específico de k:

$20\ g$ de P32 se reducen a 10 g en 14 días, es decir:

$A_0 = 20\ g;$ si $t = 14$ días, $A = 10$ y por lo tanto:

$$10 = 20\ e^{-k(14)}$$

$$10 = 20\ e^{-14k}$$

$$ln\ 10 = ln\ (\ 20\ e^{-14k})$$

¿Usando propiedades de los logaritmos, a qué es igual $ln\ (20\ e^{-14k})$*?*

De manera que:

$$ln\ 10 = ln\ 20 + ln\ e^{-14k}$$

$$ln\ e^{-14k} = ln\ 10 - ln\ 20 = ln\frac{10}{20} = ln\ \frac{1}{2}$$

$$-14k = \ln\frac{1}{2}$$

$$k = -\ \frac{\ln\frac{1}{2}}{14}$$

$$k = 0.04951$$

De donde la expresión que permite calcular la cantidad de P32 presente en cualquier instante t es:

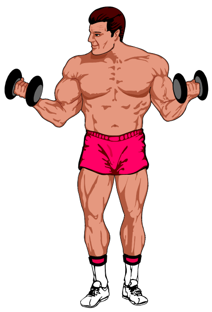
$$A(t) = 20\ e^{-0.04951\ t}$$

Finalmente estamos en posibilidad de resolver el problema, después de $t = 18$ días, permanecen

$$A(18) = 20\, e^{-0.04951(18)}$$

$A(18) = 8.2$ *g* de P32

Ejercicio 2



Retomaremos las soluciones generales que se obtuvieron para cada uno de los 4 problemas planteados en el ejercicio 3 de la página 24, impondremos algunas condiciones iniciales y solicitamos encontrar la solución particular correspondiente.

1. Durante la descarga de un condensador, el voltaje V disminuye con el tiempo con una rapidez que es proporcional al tamaño del voltaje presente en un momento dado. Obtener la ecuación que representa la razón con la que el condensador pierde voltaje (V), conforme transcurre el tiempo t. Después encontrar una expresión que permita calcular el valor del voltaje V en cualquier instante t.

Debió obtenerse la ecuación $\frac{dV}{dt} = -kV$ y como solución general:

$$V(t) = C e^{-kt}$$

con V el voltaje medido en *volts*, C la constante de integración, k la constante de proporcionalidad y t el tiempo en *minutos*.

Primera condición inicial: cuando $t = 0$, el voltaje inicial del condensador es V_0 volts.

Encontrar el valor de la constante C

Sugerencia para quien imparte el curso.

Esperar a que los alumnos obtengan dicho valor.

Cuando t = 0 : $V_0 = C e^{-k(0)}$, *de donde* $C = V_0$

La expresión se convierte en:

$$V(t) = V_0\, e^{-kt}$$

Más condiciones iniciales:

El voltaje inicial es de 300 *volts* y se reduce al 10% en un minuto. $V_0 = 300$ *volts*.

¿Qué voltaje permanece en ese condensador después de $\frac{1}{2}$ minuto?

Sugerencia para quien imparte el curso.

Los estudiantes deben obtener

Finalmente, la expresión que nos da el voltaje en cualquier instante es:

$$V(t) = 300e^{-2.3025t}$$

Para $t = 0.5$ min: $V(0.5) = 300\ e^{-2.3025\ t} = 94.87$ volts, *es decir, permanece el* 31.6% *del voltaje inicial*.

2. El capital Y en una inversión bancaria se incrementa de manera continua con una rapidez que es proporcional al valor del capital Y en un momento dado. Encontrar la expresión que permite calcular Y como función del tiempo.

La solución general que debió obtenerse es una función del tipo

$$Y(t) = Y_0\ e^{kt}$$

con $Y(t)$ el capital presente en el tiempo t, Y_0 el capital inicial que se invierte. La exponencial tiene exponente positivo porque Y crece con el tiempo, a diferencia de los casos estudiados antes (temperatura y voltaje), k la tasa de interés anual, t el tiempo en años.

Condiciones iniciales.

1. El capital inicial es de $\$\ 10\ 000$.

La solución general se convierte en $Y(t) = 10^4\ e^{k\ t}$

2. El interés anual es del 11%, $k = 0.11$

a) ¿Qué capital Y se tendrá después de 10 años?

Sugerencia para quien imparte el curso.

Esperar a que los alumnos obtengan $Y(t) = 10^4e^{0.11(10)} = \$\ 30\ 041.66$

b) ¿Cuánto tiempo debe conservarse la inversión en esas condiciones, para que el capital inicial se duplique?

Sugerencia para quien imparte el curso.

Esperar a que los alumnos obtengan

$$2(10)^4 = 10^4\, e^{0.11\,t}\,,\ 2 = e^{0.11t},\ \ln e^{0.11t} = \ln 2,\ 0.11\,t = \ln 2, t = \frac{\ln 2}{0.11} = 6.3 \text{ años.}$$

3. La tasa de crecimiento de una población de moscas (P), es proporcional al tamaño de la población en un momento dado. Encontrar una expresión que permita calcular P como función del tiempo t.

La ecuación diferencial y solución general que se obtuvo son:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \text{ de donde } P(t) = P_0\, e^{k\,t}$$

con $P(t)$ la población de moscas en el instante t, P_0 la población inicial, k la tasa de crecimiento y t el tiempo en días.

Condiciones iniciales:

Si hay 180 moscas después de 2 días y 300 moscas después de 4 días, ¿cuál era la población inicial P_0?

Sugerencia para quien imparte el curso.

Esperar a que los alumnos obtengan

$P(t) = P_0\, e^{kt}$

$$180 = P_0\, e^{2k} \ldots\ldots (1)$$

$$300 = P_0\, e^{4k} \ldots\ldots (2)$$

De (1): $P_0 = \dfrac{180}{e^{2k}}$, de (2): $P_0 = \dfrac{300}{e^{4k}}$, $\dfrac{180}{e^{2k}} = \dfrac{300}{e^{4k}}$, $\dfrac{e^{4k}}{e^{2k}} = \dfrac{300}{180} = \dfrac{5}{3}$, $e^{2k} = \dfrac{5}{3}$,

$2\,k = \ln\dfrac{5}{3}$, $k = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3} = 0.2554128119$, por lo tanto: $P_0 = \dfrac{300}{e^{4(0.255412)}} = 108$ moscas.

4. La presión atmosférica p en un lugar de la Tierra, disminuye de manera continua con la altura h sobre el nivel del mar, con una rapidez que es proporcional a la presión en esa altura h. Obtener una ecuación que permita calcular p como función de h.

La ecuación diferencial y solución general resultaron:

$$\frac{dp}{dh} = -\,kp; \quad p(h) = p_0 e^{-kh}$$

con $p(h)$ la presión atmosférica medida a la altura h sobre el nivel del mar, p_0 la presión inicial en el lugar donde se efectúan las mediciones, h la altura sobre el nivel del mar en el momento de hacer la medición de p. La presión p se medirá en milímetros de Mercurio (*mm Hg*) y la altura h en metros sobre el nivel del mar (*m.s.n.m.*)

Condiciones iniciales:

$p = 760$ *mm Hg* cuando $h = 0$ *m.s.n.m.* y $p = 500$ *mm Hg* cuando $h = 3000$ *m.s.n.m.*

Calcular la presión atmosférica cuando la altura *s.n.m.* es:

a) 2000 *m.s.n.m.* (Ciudad de México)

b) 5000 *m.s.n.m.* (Popocatépetl)

Sugerencia para quien imparte el curso.

Esperar a que los alumnos obtengan

$500 = 760\, e^{-3000\, k}$, $e^{-3000k} = \frac{500}{760} = \frac{25}{38}$, $-3000k = \ln\frac{25}{38}$, $k = 1.3957(10^{-4})$

$p(h) = 760 e^{-1.3957(10^{-4})h}$

a) $p(2000) = 760 e^{-1.3957(10^{-4})(2000)} = 574.89$ *mm Hg*

b) $p(5000) = 760 e^{-1.3957(10^{-4})(5000)} = 378.21$ *mm Hg*