SEPARACIÓN DE VARIABLES

Al finalizar esta sección, quien imparte el curso habrá logrado que los estudiantes:

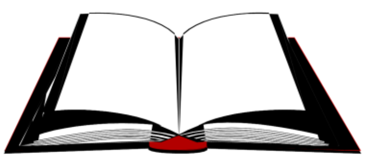
Conozcan el método de separación de variables para resolver la ecuación $\frac{dF}{dt} = kF$ y aplicarlo a algunos ejemplos.

Para nuestros propósitos, resolver el problema del enfriamiento del café fue realmente un pretexto para presentar un método para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales: el método de *separación de variables*.

En efecto, cuando los términos de una ecuación diferencial pueden acomodarse de manera que tome la forma

$$f(x)\, dx = F(y)\, dy,$$

siendo $f(x)$ una función únicamente de x y $F(y)$ una función solamente de y, se puede aplicar el método de separación de variables que utilizamos en el problema del café y la solución se obtiene por integración directa.



PROCEDIMIENTO

El método de *separación de variables*, puede aplicarse a $f(x)\, dx = F(y)\, dy$, cuando $f(x)$ es una función únicamente de x y $F(y)$ es una función solamente de y, y consiste en:

1. Transformar algebraicamente la ecuación dada, de manera que tome la forma $f(x)\, dx = F(y)\, dy$, con las condiciones mencionadas.

2. Convertir $f(x)\, dx = F(y)\, dy$ en $\int f(x)dx = \int F(y)dy$

3. Resolver cada integral por separado.

El procedimiento que seguimos para resolver la ecuación diferencial correspondiente a la Ley de enfriamiento de Newton, es precisamente el denominado *separación de variables*.

Ejemplo 1

Apliquemos este procedimiento a la ecuación diferencial $\frac{dF}{dt} = kF$, que obtuvimos al iniciar esta unidad, con motivo de las amibas.

Una solución obvia es $F(t) = 0$. ¿De acuerdo?

Para encontrar las soluciones restantes supondremos que $F(t) \neq 0$ y por lo tanto podemos dividir la ecuación entre $F(t)$:

$\frac{1}{F}\frac{dF}{dt} = k$, expresión que podemos llevar a la forma: $\frac{1}{F}\frac{dF}{dt}dt = kdt$

Que a su vez se convierte en: $\frac{1}{F}dF = k\ dt$

Integrando ambos miembros:

$$\int \frac{1}{F}dF = \int k\,dt;$$

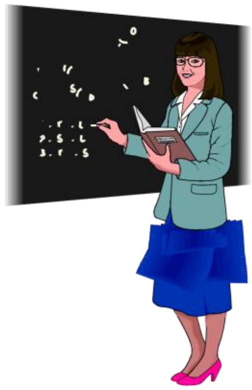
$$\ln|F| = kt + c;$$

Para despejar F de la última expresión, tomamos la exponencial de ambos lados:

$$e^{\ln|F|} = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c}, \text{ de donde } F(t) = \pm e^{c}e^{kt}$$

Como $F = \pm e^{c}e^{kt}$ representa a todas las soluciones distintas de cero y $F = 0$ también es solución, podemos escribir la forma general de la solución de $\frac{dF}{dt} = kF$ así: $F(t) = \pm C e^{kt}$, donde C es una constante, un número real.

Esta última función, desde luego cumple la condición planteada desde el principio de nuestra búsqueda: encontrar una función que sea proporcional a su propia derivada. *El estudiante deberá verificarlo*.



Ejemplo 2

Aplicar el método de separación de variables para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)\,x\,y}$$

Para separar las variables, dejaremos en el primer miembro de la igualdad todo lo que depende de y y en el segundo lo que depende de x:

Completar los espacios:

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy=\frac{\_\_\_}{x(\_\_\_\_\_\_\_)}\,dx$$

Integrando ambos miembros: $\int \frac{\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_}\,dy=\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$

Verificar que: $\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$

Con lo que $\int \frac{y}{1+y^2}\,dy=\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$ se convierte en

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy=\int \frac{1}{x}\,dx-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Resolviendo cada una de las tres integrales indefinidas tendremos:

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

Sugerencia para quien imparte el curso.

Solicitar a los estudiantes que efectúen las simplificaciones necesarias y usen propiedades de los logaritmos, hasta llegar a la expresión: $(1+y^2)(1+x^2)=Cx^2$ *como solución de la ecuación diferencial planteada*.

El proceso podría ser el siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)x\,y}$$

$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

Pero: $\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{1+x^2}dx$, integrando por cambio de variable:

$$\frac{1}{2} \ln (1+y^2) = \ln x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C$$

$$\frac{1}{2} \ln (1+y^2) + \frac{1}{2} \ln (1+x^2) = \ln x + C$$

$$\frac{1}{2} [\ln (1+y^2) + \ln (1+x^2)] = \ln x + \ln c$$

$$\ln (1+y^2)(1+x^2) = 2 \ln cx = \ln (cx)^2$$

Tomando exponencial natural a ambos miembros:

$$(1+y^2)(1+x^2) = C\,x^2$$

Ejemplo 3

Elementos radiactivos como el Radio o el Uranio tienden a desintegrarse o decaer con el paso del tiempo, debido a la emisión espontánea de partículas de sus átomos.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Antes de abordar este ejemplo, sugerimos a quien imparte el curso coordinar alguna actividad que conduzca al esclarecimiento de los conceptos que aquí se manejarán, como el decaimiento radiactivo de algunos elementos químicos.

Hay un principio simple que gobierna la razón en la que todos los elementos radiactivos decaen: la desintegración de un elemento radiactivo tiene lugar de manera continua con una rapidez directamente proporcional a la cantidad del elemento presente.

Este principio puede expresarse con una ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

Donde A representa la cantidad del elemento existente en un momento dado, t el tiempo transcurrido y k una constante positiva de proporcionalidad cuyo valor particular depende del elemento radiactivo que se esté considerando, así como de las unidades que se elijan para medir la masa A del elemento y el tiempo t.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Solicitar a los alumnos que usen el método de separación de variables para resolver esta ecuación, hasta obtener $A = e^{-kt + c}$ *y posteriormente que verifiquen aplicando las reglas de derivación que la solución cumple la ecuación diferencial dada.*

El signo menos del exponente de e, indica que la cantidad de masa A decrece con el paso del tiempo, al igual que la temperatura del café en el problema que abordamos anteriormente.

Una condición inicial que suele tomarse en cuenta es la masa inicial del elemento radiactivo.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Pedir al estudiante que mejore la solución que obtuvo, considerando que cuando $t = 0$, *la masa inicial es* A_0, *a través de un procedimiento como éste:*

$$\frac{dA}{dt} = -kA; \quad \frac{1}{A}dA = -kdt; \quad \int \frac{1}{A}dA = \int -kdt; \quad \ln A = -kt + c$$

$$e^{\ln A} = e^{-kt + c}; \quad A = e^{-kt} e^{c}; \quad A = C e^{-kt}$$

Si $t = 0$: $A = C e^0 = A_0$; $C = A_0$, de donde $A = A_0 e^{-kt}$

Ejercicio 1

Usar el método de separación de separación de variables para encontrar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\dfrac{dy}{dx} = e^{y}$; 2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{\cos y}$

3. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$; 4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\,y - 2x}{x^2 + 1}$

5. $x^2 y \dfrac{dy}{dx} = 1 + x^3$

Resolver los siguientes problemas, hasta donde sea posible, sin "condiciones iniciales"

1. Durante la descarga de un condensador, el voltaje V disminuye con el tiempo con una rapidez que es proporcional al tamaño del voltaje presente en un momento dado. Obtén la ecuación que representa la razón con la que el condensador pierde voltaje (V), conforme transcurre el tiempo en minutos t. Después encuentra una expresión que permita calcular el valor del voltaje V en cualquier instante t.

2. El capital Y en una inversión bancaria se incrementa con una rapidez que es proporcional al valor del capital Y en un momento dado. Encuentra la expresión que permite calcular Y como función del tiempo.

3. La tasa de crecimiento de una población de moscas (P), es proporcional al tamaño de la población en un momento dado. Encuentra una expresión que permita calcular P como función del tiempo t.

4. La presión atmosférica p en un lugar de la Tierra, disminuye con la altura h sobre el nivel del mar, con una rapidez que es proporcional a la presión en esa altura h. Obtén una ecuación que permita calcular p como función de h.