NECESIDAD DE RESOLVER UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Propósito

Al terminar esta sección quien imparte el curso habrá logrado que los estudiantes:

- Sientan la necesidad de resolver una ecuación diferencial.

PROBLEMA DEL ENFRIAMIENTO DEL CAFÉ

Si una taza de café se sirve con una temperatura de *90° C (194° F)* y empieza a enfriarse en una habitación que se encuentra a una temperatura constante de *25° C (77° F)*, ¿qué temperatura tendrá el café después de media hora?

Sugerencia para quien imparte el curso.

Dada la dificultad que implica el tratamiento de este problema, se proponen algunas preguntas que quien imparte el curso planteará en el momento oportuno, para orientar el avance del grupo hacia los conceptos clave que se pretende alcanzar.

¿Qué le ocurre a un objeto caliente que se deja sobre una mesa en el interior de una habitación que se encuentra a una temperatura menor?

En Física se conoce como Ley de enfriamiento de Newton al principio termodinámico que establece que, *la rapidez de enfriamiento de un cuerpo en cualquier momento, es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio que lo rodea*.

Esta ley de enfriamiento se puede expresar con esta ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)\,,$$

Donde t es el tiempo de enfriamiento, T_0 la temperatura del medio que rodea al cuerpo, en grados Fahrenheit, T la temperatura del cuerpo en el instante t y k una constante de proporcionalidad positiva.

En el caso del café que nos ocupa, ¿en qué unidades se mide el tiempo t?

¿Cuál es la temperatura de la habitación donde está el café?

$$T_0 = 77° F$$

De modo que la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-77)$$

Trataremos de resolver esta ecuación, es decir, buscamos la función $T(t)$ que satisfaga la ecuación anterior.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Recomendamos de manera muy especial que los estudiantes hagan en su cuaderno el siguiente desarrollo, no bastará con que lo sigan en el pizarrón, deben hacerlo para comprenderlo mejor, tratando de contestar las preguntas que se plantean.

Lo primero que podría ocurrírsenos es multiplicar ambos miembros por la diferencial de la variable independiente t, es decir, por dt:

$$\frac{dT}{dt}dt = -k(T-77)\,dt$$

Sugerencia para quien imparte el curso.

Es conveniente en este momento recordar la definición de diferencial de una función, para que tenga sentido descomponer la expresión $\frac{dT}{dt}$ *tratándola como un cociente de diferenciales.*

¿Cómo se define la diferencial de una función?

Efectivamente, el producto de la derivada de una función por la diferencial de la variable independiente, corresponde a la diferencial de la función:

$dT = \frac{dT}{dt}dt$ por lo tanto, de la expresión anterior: $dT = -k(T-77)\,dt$.

Reunamos en el primer miembro las expresiones que contienen a la variable T y en el segundo las que contienen t:

$$\frac{1}{T-77}dT = -k\,dt$$

Integremos ambos lados de la igualdad: $\int \frac{1}{T-77}dT = \int -k\,dt$

Resolvamos por separado cada una de estas integrales:

$$\int \frac{1}{T-77}\,dT = \ln|T-77| + c_1 \quad \text{e} \quad \int -k\,dt = -k\,t + c_2$$

De manera que tenemos:

$$\ln|T-77| = -k\,t + c\,,$$

donde c es una constante de integración resultante de simplificar c_1 y c_2, cuyo valor podrá ser determinado a partir de las “condiciones iniciales” de la situación que estamos tratando.

Esta ecuación puede ser resuelta para T, a través de la “operación contraria o inversa” del logaritmo natural: la exponencial de base e, tomando la exponencial a ambos miembros de la igualdad:

$$e^{\ln|T-77|} = e^{-k\,t+c}$$

Dificultad que pudiera presentarse

Es probable que sea necesario recordar las propiedades de los logaritmos que se mencionaron en la Unidad 1, para que resulte natural su aplicación en este momento.

¿Qué se obtiene con la expresión $e^{\ln A}$?

$e^{\ln A} = A$, porque la exponencial y el logaritmo natural son funciones inversas

De modo que $\quad e^{ln|T-77|} = T - 77$

Por lo que obtenemos: $\qquad T - 77 = e^{-k\,t+c}$

¿A qué es igual a^{n+m}? $\qquad a^{n+m} = a^n\, a^m$

Por lo tanto: $\qquad T - 77 = e^{-k\,t}e^{c}$

$$T = 77 + e^{-k\,t}e^{c} \;....\; (1)$$

Aún no hemos considerado otro dato, ¿cuál es el valor de la temperatura inicial del café, T?

$$T = 194°\,F \;\text{ cuando }\; t = 0$$

Nuestra expresión se convierte en:

$$194 = 77 + e^0 e^c$$

¿Cuál es el valor de e^0?

$$e^0 = 1$$

De donde:

$$e^c = 194 - 77$$

$$e^c = 117$$

Regresando a la expresión (1) para T, ésta puede escribirse así:

$$T = 77 + 117\, e^{-kt}$$

En este momento no podemos determinar el valor de la constante k, a menos que tuviéramos alguna información adicional, por ejemplo, que después de 15 minutos ($\frac{1}{4}$ de hora) el café se ha enfriado a $40°\ C\ (104°\ F)$. Si así fuera:

$$104 = 77 + 117\, e^{-k\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$117\, e^{-\frac{k}{4}} = 104 - 77 = 27$$

$$e^{-\frac{k}{4}} = \frac{27}{117} = \frac{3}{13}$$

Tomando logaritmo natural a ambos miembros.

$$\ln e^{-\frac{k}{4}} = \ln \frac{3}{13}$$

$$-\frac{k}{4} = \ln \frac{3}{13}$$

$$-k = 4 \ln \frac{3}{13}$$

Usando propiedades de los logaritmos, ¿a qué es igual $n \log a$?

$$n \log a = \log a^n$$

Es decir: $$-k = \ln\left(\frac{3}{13}\right)^4$$

Por lo tanto, la expresión (1), conociendo el valor de k, queda así:

$$T = 77 + 117\, e^{t \ln\left(\frac{3}{13}\right)^4} = 77 + 117\, e^{\ln\left(\frac{3}{13}\right)^{4t}}$$

Finalmente, la Ley de enfriamiento de Newton, para el café en cuestión es:

$$\boxed{T(t) = 77 + 117\left(\frac{3}{13}\right)^{4t}}$$

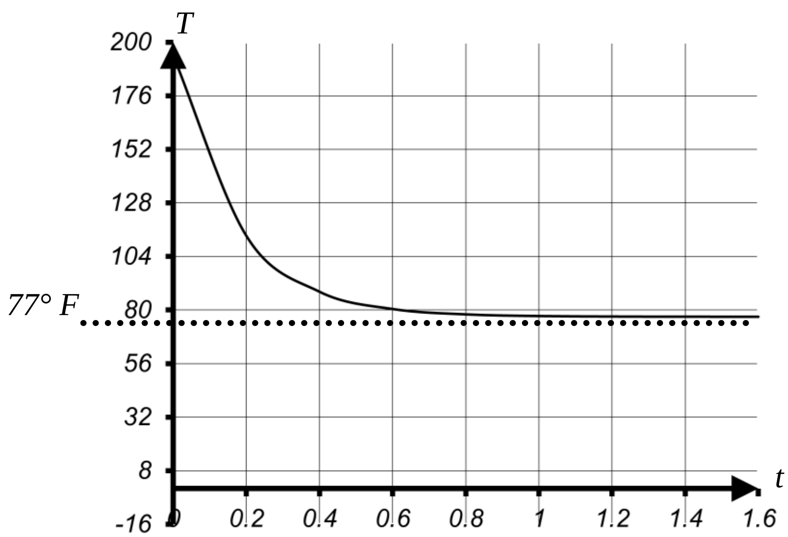
Hemos resuelto la ecuación diferencial planteada, ahora tenemos la función que nos permite resolver el problema del enfriamiento del café.

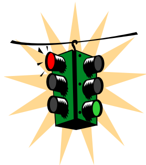
Cuando $t = \frac{1}{2}$ hora, $T(t) = 77 + 117\left(\frac{3}{13}\right)^{4t}$ se convierte en

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = 77 + 117\left(\frac{3}{13}\right)^{4\left(\frac{1}{2}\right)} = 77 + 117\left(\frac{3}{13}\right)^{2}$$

De donde $T\left(\frac{1}{2}\right) = 83.23° \ F = 28.46° \ C$

A continuación mostramos la gráfica de la función obtenida para el enfriamiento del café, la temperatura T en función del tiempo t. Donde se observa que conforme transcurre el tiempo, la temperatura del café se acerca más y más a la temperatura del aire que lo rodea.





Conceptos clave:

10. Ley de enfriamiento de Newton

La rapidez de enfriamiento de un cuerpo en cualquier momento, es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio que lo rodea.

11. Integral indefinida de una función del tipo $\int \frac{1}{u} du$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$$

12. Diferencial de una función

La diferencial de una función $f(x)$ es el producto de la derivada de la función por la diferencial de la variable independiente x:

$$df(x) = \frac{df}{dx} dx$$