GENERALIZACIÓN DEL MODELO

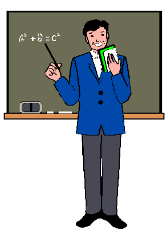
Propósito

Al finalizar esta sección, quien imparte el curso habrá logrado que los estudiantes:

- Aprecien la importancia del modelo $F(t) = F_0 e^{kt}$ al saber que se aplica en situaciones de muy diversa índole.

PROBLEMA DE LA DIVERSIDAD DE APLICACIONES DEL MODELO $F(t) = F_0 e^{kt}$

A partir de la experiencia adquirida al estudiar esta unidad, mencionar *4* situaciones diferentes, en las que se obtienen funciones que se ajustan al modelo $\frac{dF}{dt} = kF$, que a su vez da lugar a la función $F(t) = F_0 e^{kt}$. Citar *2* en las que el exponente de e sea positivo y *2* en las que sea negativo: _____
____
____
____



Sugerencia para quien imparte el curso.

Comentar con los estudiantes lo sorprendente que resulta la gran variedad de situaciones que son representadas con una función que corresponde al modelo $F(t) = F_0 e^{kt}$.

Hemos encontrado este modelo en:

- *Tópicos de Física como la desintegración de materiales radiactivos, la pérdida de voltaje en un condensador eléctrico o la rapidez con que pierde calor un cuerpo.*
- *En Economía, para describir el comportamiento de un capital invertido con el llamado interés compuesto.*
- *En Biología o Sociología para describir el comportamiento de diversas poblaciones.*
- *En Antropología para determinar la antigüedad de fósiles.*

- *En Meteorología, para calcular la presión atmosférica en un sitio de la Tierra,*
- *En Medicina, para obtener el tiempo de eliminación de una sustancia administrada a un paciente.*

Es oportuno recordar que no es la primera vez que el alumno encuentra a lo largo de su formación académica, modelos que aparecen más de una vez en el estudio de la Naturaleza:

La Ley de Gravitación Universal de Newton, establece que *la fuerza F con que se atraen dos masas* m_1 *y* m_2*, es directamente proporcional a la magnitud de esas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:* $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$*, con* k *una constante.*

La Ley de Coulomb, establece que *la fuerza F con que se atraen o se repelen dos cargas eléctricas* q_1 *y* q_2*, es directamente proporcional a la magnitud de esas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:* $F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$*, con* k *una constante.*

Estos resultados servirán al estudiante como estímulo para conocer más áreas del quehacer científico, en las que aparecen esquemas similares, procesos sistematizados, en los que las Matemáticas y en particular el Cálculo Diferencial e Integral son de gran utilidad.

Ejercicio 1

1. Verificar que la función $f(x) = 5\, e^{-1.2\,t}$ cumple con el modelo $\dfrac{dF}{dt} = kF$.

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de separación de variables:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2}{3y^2}$

c) $(2 + x)\dfrac{dy}{dx} = 2y$

d) $x\dfrac{dy}{dx} = y$

e) $y\dfrac{dy}{dx} = \cos x$

3. Resolver los siguientes problemas, hasta obtener soluciones particulares, atendiendo a las condiciones iniciales que se dan en cada caso:

a) Si un capital de 10^5 pesos está invertido de manera que se incrementa con una rapidez proporcional al capital invertido y el interés es del *12 %* anual

i) ¿Qué capital se tendrá después de *10* años?

ii) ¿Cuánto tiempo debe mantenerse la inversión para que el capital inicial se duplique?

b) De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, si un objeto que permanece en un ambiente a *68°F (20°C)*, se enfría de *347°F (175°C)* hasta *167°F (75°C)* en *45* minutos, ¿cuánto tiempo se necesita para que ese objeto se enfríe de *347°F* a *104°F (40°C)*?

c) ¿Qué porcentaje de una muestra actual de Radio quedará dentro de *1000* años, si se sabe que después de *1600* años R_0 se reduce a $\frac{1}{2}R_0$?

Los estudiantes deben llegar a resultados como éstos:

1. $F(t) = 5\, e^{-1.2\, t}$; $\dfrac{dF}{dt} = 5(-1.2)\,e^{-1.2t} = -1.2\,(5e^{-1.2t}) = kF(t)$

2. a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$, $y\,dy = x\,dx$, $\int y\,dy = \int x\,dx$, $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + c$, $y^2 = x^2 + C$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+2}{3y^2}$, $3y^2 dy = (x^2 + 2)\,dx$, $\int 3y^2 dy = \int (x^2+2)\,dx$,

$\dfrac{3y^3}{3} = \dfrac{x^3}{3} + 2x + c$, $y^3 = x^3 + 6x + C$

c) $(2+x)\dfrac{dy}{dx} = 2y$, $\dfrac{1}{2y}dy = \dfrac{1}{2+x}dx$, $\int \dfrac{1}{2y}dy = \int \dfrac{1}{2+x}dx$

$\dfrac{1}{2}\ln 2y = \ln(2+x) + c$, $\ln 2y = 2\ln(2 + x) + c = \ln (2 + x)^2$,

$ln\ 2y - ln\ (2+x)^2 = c, \quad \ln\frac{2y}{(2+x)^2} = c, \quad \frac{2y}{(2+x)^2} = C$

$y = C\ (x^2 + 4x + 4)$

d) $x\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx, \quad ln\ y = ln\ x + c, \quad ln\ y - ln\ x = c$

$\ln\frac{y}{x} = c, \quad y = C\,x$

e) $y\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad y\ dy = cos\ x\ dx, \quad \int y\,dy = \int \cos x\,dx$

$\frac{1}{2}y^2 = 2\,sen\,x + c, \quad y^2 = 2\ sen\ x + C$

3. a) $Y(t) = Y_0\ e^{k\,t}$, $k = 0.12$, $Y_0 = 10^5$ *pesos*

$i)\ Y(10) = 10^5 e^{0.12(10)}, \quad Y(10) = \$\ 332\ 011.69$

$ii)\ t = ?,\ Y(t) = 2(10^5),\ k = 0.12$

$10^5 e^{0.12t} = 2(10^5), \quad e^{0.12t} = 2, \quad ln\ e^{0.12t} = ln\ 2,$

$0.12\ t = ln\ 2, \quad t = \frac{\ln 2}{0.12} = 5.77$ años

b) $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$

Resolviendo esta ecuación diferencial:

$\frac{1}{T - T_0}dT = -k\,dt, \quad \int\frac{1}{T - T_0}dT = \int -k\,dt,$

$ln\ (T - T_0) = -\ k\ t, \quad e^{\ln(T - T_0)} = e^{-kt + c}, \quad T - T_0 = e^{-kt}\ e^c,$

$T - T_0 = C\ e^{-kt}, \quad T = T_0 + C\ e^{-kt}$

En nuestro problema, la temperatura del medio que rodea al objeto es $T_0 = 68°F$, por lo que:

$T = 68 + C\ e^{-kt}$, cuando $t = 0,\ T = 347\ °F$:

$347 = 68 + C\ e^{-k(0)}, \quad C = 347 - 68 = 279$

Por lo tanto:

$T = 68 + 279\ e^{-kt}$

Calcularemos k usando el hecho de que después de $t = 45\ min\ \left(\frac{3}{4} hora\right)$:

$T = 167°F$:

$$167 = 68 + 279\ e^{-k\left(\frac{3}{4}\right)}, \quad 279e^{-\frac{3}{4}k} = 167 - 68 = 99$$

$$e^{-\frac{3}{4}k} = \frac{99}{279} = \frac{11}{31}, \quad -\frac{3}{4}k = \ln\frac{11}{31}, \quad k = -\frac{4}{3}\ln\frac{11}{31}$$

De donde:

$$T = 68 + 279e^{\left(\frac{4}{3}\ln\frac{11}{31}\right)t} = 68 + 279e^{\frac{4}{3}t\ln\frac{11}{31}}, \quad T = 68 + 279e^{\ln\left(\frac{11}{31}\right)^{\frac{4}{3}t}}$$

Por último:

$$T = 68 + 279\left(\frac{11}{31}\right)^{\frac{4}{3}t}$$

Finalmente, para que $T = 104°F$ deben pasar t horas:

$$104 = 68 + 279\left(\frac{11}{31}\right)^{\frac{4}{3}t}, \quad 279\left(\frac{11}{31}\right)^{\frac{4}{3}t} = 104 - 68 = 36$$

$$\left(\frac{11}{31}\right)^{\frac{4}{3}t} = \frac{36}{279} = \frac{4}{31}, \quad \ln\left(\frac{11}{31}\right)^{\frac{4}{3}t} = \ln\left(\frac{4}{31}\right), \quad \frac{4}{3}t\ln\left(\frac{11}{31}\right) = \ln\left(\frac{4}{31}\right)$$

$$\frac{4}{3}t = \frac{\ln\left(\frac{4}{31}\right)}{\ln\left(\frac{11}{31}\right)}, \quad t = \frac{3}{4}\frac{\ln\left(\frac{4}{31}\right)}{\ln\left(\frac{11}{31}\right)} = 1.4822\ horas$$

t = *1 hora 28 minutos 56 segundos.*

c) $A(t) = A_0 e^{-kt}$; $R(t) = R_0 e^{-kt}$

Donde: $R(t)$ es la masa de Radio en el instante t.

R_0 es la masa inicial de Radio.

k es la constante de desintegración del Radio.

t es el tiempo medido en años.

En el problema, después de $t = 1600$ *años*, $R = \frac{1}{2}R_0$, por lo que:

$$R_0\, e^{-k(1600)} = \frac{1}{2}R_0\,, \quad e^{-1600k} = \frac{1}{2}\,, \quad -1600k = \ln\frac{1}{2}$$

$$k = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{1600} = 4.332169(10^{-4})\,, \quad R(t) = R_0\, e^{-4.3321(10^{-4})\,t}$$

En $t = 1000$ *años:*

$$R(t) = R_0\, e^{-4.3321(10^{-4})(10^{3})} = 0.6484\, R_0$$

$$R(1000) = 64.84\%\, R_0$$