# EL MODELO $\frac{dF}{dt} = kF$

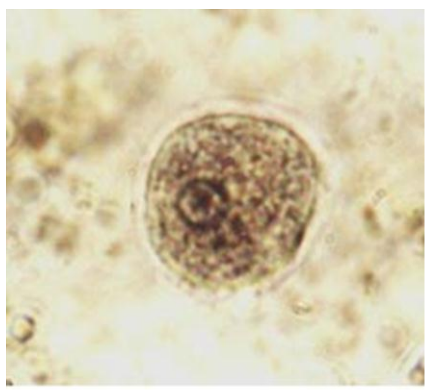
Propósitos

Al finalizar esta sección, quien imparte el curso habrá logrado que los estudiantes:

- Exploren en forma numérica, gráfica o algebraica las condiciones de una situación dada.
- Identifiquen que el comportamiento de la rapidez de cambio asociada a la situación dada, se puede modelar a través del esquema $\frac{dF}{dt} = kF$

Plantearemos un problema en el que se presenta una situación que dará lugar a la expresión algebraica que nos interesa analizar.

**Ejemplo 1**



**PROBLEMA DE LAS AMIBAS**

Las amibas se reproducen por división directa, es decir, cada una de ellas se divide dando origen a dos amibas con idénticas características. Si suponemos que en condiciones favorables una amiba se reproduce cada hora y todas sobreviven, tendremos una población como la descrita en esta tabla.

El estudiante completará los valores que faltan.

| Tiempo horas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| No. de amibas | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | | | 32768 | |

Solicitar a los estudiantes que traten de obtener una expresión que represente el número de amibas existentes después de un número cualquiera de horas *t*.

$$F(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Presentamos ahora dos variantes del problema anterior, para que los alumnos vean si hay alguna relación entre la variación de la función y su valor original, para cada *t.*

Si la población inicial consta no de una amiba, sino de 100 y suponiendo que se dan las condiciones para que todas se reproduzcan con la misma rapidez, pedir a los estudiantes que completen la tabla que representa el crecimiento de la población:

| Tiempo horas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 10 | | *t* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| No. de amibas | 100 | 200 | 400 | | | | 6400 | | 3276800 | |

*Una vez más, solicitar a los alumnos que intenten escribir una expresión que represente el número de amibas existentes después de t horas*.

$$F(t) = \_\_\_\_\_\_ (2^t)$$

*Pedirles ahora que escriban una función que describa el número de amibas en una población que empezó con 125 amibas*

$$F(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

*¿Y si en lugar de empezar con 100 ó con 125, la población inicial es* $C_0$ *amibas?*

$$F(t) = \_\_\_\_\_\_\_ (2^t)$$

Observando las respuestas dadas a las preguntas planteadas, concluir que hay una relación entre la variación de la función y su valor original para cada *t*.

Concretamente, podemos observar que *la rapidez de cambio de la función con respecto al tiempo es* ***proporcional*** *al valor correspondiente de la función, en el instante t*.

Lo anterior, en el lenguaje que hemos aprendido se expresa así:

$$\frac{dF}{dt} = kF \text{, con } k \text{ una constante.}$$

Encontramos una función con un comportamiento muy especial, una que sólo se distingue de su derivada por una constante, por eso podemos afirmar que encontramos una función que es *proporcional* a su propia derivada.

Y en efecto, con lo que los estudiantes saben de Cálculo, pueden hacer esto:

Si $F(t) = 2^t$, su derivada es:

$$\frac{d\ 2^t}{dt} = 2^t \ln 2 \frac{dt}{dt} = (\ln 2)\, 2^t = k(2^t)$$, con $k$ una constante, en este caso, $k = ln\ 2$.

*Solicitar que los estudiantes verifiquen que en general,* si $F(t) = 2^{at}$, con *a* una constante, la derivada es:

$$\frac{d\ 2^{at}}{dt} = k\ 2^{at}$$, con $k = a\ ln2$, es decir, $k =$ *constante*.

La ecuación $\frac{dF}{dt} = kF$, que obtuvimos a partir del análisis de una población de microorganismos, corresponde a un modelo que representa una amplia gama de fenómenos naturales, varios de los cuales serán estudiados en esta unidad.

Por las características específicas del problema de las amibas, llegamos a una función exponencial de base *2:*

$$F(t) = C_0(2^t)$$, con $C_0$ el valor de la población inicial.

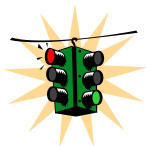
Sin embargo, quienes han estudiado problemas relacionados con:

- El crecimiento o decrecimiento de poblaciones de diversos tipos.
- El interés compuesto con que se otorga un préstamo.
- La desintegración de un material radiactivo.
- La variación de la presión atmosférica con la altura sobre el nivel del mar.
- El enfriamiento de un cuerpo.
- La velocidad de propagación de una reacción química.
- El proceso de eliminación de medicamentos por un organismo.

Y muchos más, han encontrado que la función que representa el comportamiento de tales eventos con precisión, es la función exponencial natural que hemos estudiado antes, es decir la que tiene como base al número *e:*

$$F(t) = C\ e^{at}$$

Los valores de $C$ y de $a$ dependen del fenómeno particular con que estemos tratando.



**Conceptos clave:**

**1. Función exponencial**

Para cualquier número $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$, se puede construir una función que se escribe $f(x) = a^x$, llamada función exponencial, que tiene las siguientes propiedades:

i) $a^x$ está definido para todo número real $x$ y $a^x > 0$.

ii) Si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función creciente y

iii) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

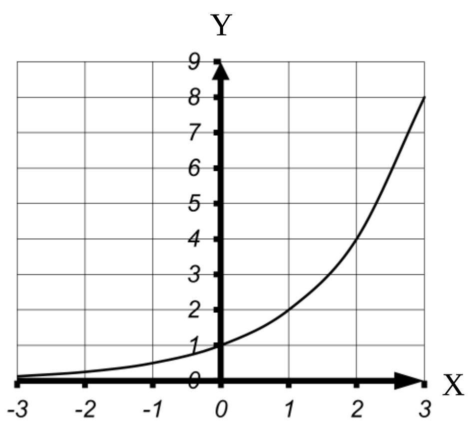
iv) Si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función decreciente y

v) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$

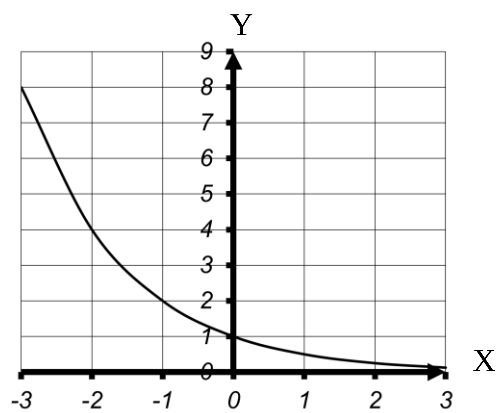
vi) El dominio de $f(x) = a^x$ son todos los números reales.

vii) El rango de $f(x) = a^x$ son los números reales positivos.

viii) Veamos sus gráficas:




$f(x) = a^x$ con $a > 1$




$f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

**2. Función exponencial natural, de base *e***

Es particularmente importante la función exponencial que tiene como base al número $e$: $f(x) = e^x$

**3. La derivada de una función exponencial**

$$\frac{d\ e^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}; \qquad \frac{d\ a^u}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

Al estudiar las derivadas sucesivas de una función encontramos funciones que muestran diversos comportamientos, como:

**4. Funciones cuyos exponentes decrecen hasta llegar a cero**:

Si $f(x) = x^8, f'(x) = 8x^7, f^{(4)}(x) = 1680\ x^4,\ f^{(8)}(x) = 40320$

**5. Funciones que al derivarse dan lugar a ciclos que se repiten indefinidamente**:

Si $f(x) = sen\ x$ ,entonces $f'(x) = cos\ x,\ f''(x) = -\ sen\ x,\ f^{(3)}(x) = -\ cos\ x$ y $f^{(4)}(x) = sen\ x = f(x)$

**6. Sólo hubo una función que al derivarse da como resultado la misma función: precisamente la función exponencial**:

Si $f(x) = e^x,\ f^{(n)}(x) = e^x$

**Sugerencia para quien imparte el curso**.

*Es oportuno recordar con los alumnos la forma en que se define el número* ***e****, su carácter irracional, así como su valor aproximado:*

*El número irracional e se obtiene así:* $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281...$

Desde luego la función $F(t) = C\ e^{at}$ tiene el mismo comportamiento que descubrimos con el problema de las amibas: *la rapidez de cambio de la función con respecto a la variable independiente es* ***proporcional*** *al valor de la función en ese valor de la variable independiente,* es decir:

$$\frac{dF}{dt} = kF \text{, y en efecto: } \frac{dCe^{at}}{dt} = C\,a\,e^{at} = k\ e^{at}$$

**Ejercicio 1**

Verificar que las siguientes funciones cumplen con el modelo $\frac{dF}{dt} = kF$, es decir, son proporcionales a su derivada.

1. $F(t) = 3^t$ ; 2. $F(t) = e^{4t}$

3. $F(t) = e^{\sqrt{2}\,t}$ ; 4. $F(t) = e^{-5t}$