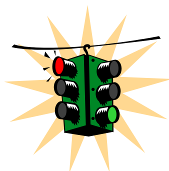
CONCEPTOS CLAVE DE LA UNIDAD 4



1. Función exponencial

Para cualquier número $\boldsymbol{a > 0}$, se puede construir una función que se escribe $f(x) = a^x$, llamada función exponencial, que tiene las siguientes propiedades:

i) a^x está definido para todo número real x y $a^x > 0$.

ii) Si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función creciente y

iii) $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.

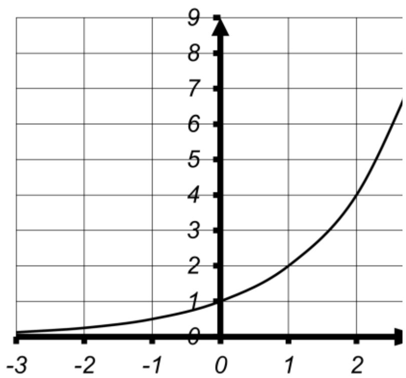
iv) Si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función decreciente y

v) $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$

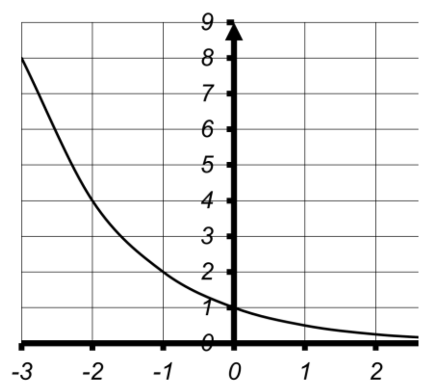
vi) El dominio de $f(x) = a^x$ son todos los números reales.

vii) El rango de $f(x) = a^x$ son los números reales positivos.

viii) Veamos sus gráficas:



$f(x) = a^x$ con



$f(x) = a^x$ con $0 <$

2. Función exponencial natural, de base *e*

Es particularmente importante la función exponencial que tiene como base al número e: $f(x) = e^x$

3. La derivada de una función exponencial

$$\frac{d\,e^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}\,; \qquad \frac{d\,a^u}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

Al estudiar las derivadas sucesivas de una función encontramos funciones que muestran diversos comportamientos, como:

4. Funciones cuyos exponentes decrecen hasta llegar a cero:

Si $f(x) = x^8$, $f'(x) = 8x^7$, $f^{(4)}(x) = 1680\,x^4$, $f^{(8)}(x) = 40320$

5. Funciones que al derivarse dan lugar a ciclos que se repiten indefinidamente:

Si $f(x) = sen\ x$,entonces $f'(x) = cos\ x$, $f''(x) = -\ sen\ x$, $f^{(3)}(x) = -\ cos\ x$ y $f^{(4)}(x) = sen\ x = f(x)$

6. Sólo hubo una función que al derivarse da como resultado la misma función: precisamente la función exponencial:

Si $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$

7. Una ecuación es una igualdad en la que aparecen expresiones polinomiales, trigonométricas, exponenciales o logarítmicas, en las que se desconoce al menos un término o incógnita.

8. Resolver una ecuación es encontrar el valor o los valores de la incógnita que convierten la ecuación en una identidad.

9. Una identidad es una igualdad obvia del tipo $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

10. Ley de enfriamiento de Newton

La rapidez de enfriamiento de un cuerpo en cualquier momento, es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio que lo rodea.

11. Integral indefinida de una función del tipo $\int \frac{1}{u} du$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$$

12. Diferencial de una función

La diferencial de una función $f(x)$ es el producto de la derivada de la función por la diferencial de la variable independiente x:

$$df(x) = \frac{df}{dx} dx$$

13. Solución de una ecuación diferencial

Una función $f(x)$ es una *solución* de una ecuación diferencial dada, sólo si la ecuación se satisface cuando $f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en dicha ecuación.

14. Solución general de una ecuación diferencial

Una solución que contiene una o más constantes arbitrarias, se llama *solución general de la ecuación diferencial* y corresponde a toda una familia de funciones, un miembro de la familia para cada valor asignado a cada constante.

15. Solución particular de una ecuación diferencial

Una solución *particular* de una ecuación diferencial, es la que se obtiene a través de información adicional que permita asignar valores específicos a las constantes que aparecen en la solución general.

16. Condiciones iniciales o condiciones a la frontera

Se llama así a la información adicional que nos permite encontrar una solución particular a un problema dado.

En nuestro caso, las condiciones iniciales nos permitirán hallar el valor de las constantes que aparecen en la solución general de una ecuación diferencial.