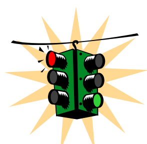
APLICACIÓN DE LA INTEGRAL PARA RESOLVER LA ECUACIÓN $\frac{dF}{dt} = kF$

Propósito

Al finalizar esta sección, quien imparte el curso habrá logrado que los estudiantes:

- Reconozcan que para obtener la función *F* que modela el problema, tienen que recurrir a la integral, para encontrar la antiderivada.



Conceptos clave:

7. Una ecuación es una igualdad en la que aparecen expresiones polinomiales, trigonométricas, exponenciales o logarítmicas, en las que se desconoce al menos un término o incógnita.

8. Resolver una ecuación es encontrar el valor o los valores de la incógnita que convierten la ecuación en una identidad.

9. Una identidad es una igualdad obvia del tipo $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

PROBLEMA DE LAS ECUACIONES

A estas alturas de nuestra formación matemática, tenemos amplia experiencia en la solución de ecuaciones. Hemos desarrollado habilidad para resolver de memoria algunas de ellas. Por ejemplo, podemos resolver sin cálculos ni fórmulas estas ecuaciones:

1) Si $x + 5 = 7$, entonces $x =$ _________;

2) Si $\frac{x}{8} = 6$, entonces $x =$ ___________;

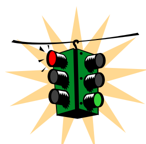
3) Si $x^2 - 9 = 0$, entonces $x_1 =$ __________, $x_2 =$ __________;

4) *Si* $\tan x = 1$, entonces $x =$ ________;

5) Si $\log x = 2$, entonces $x =$ ________;

6) Si $2^x = 16$, entonces $x =$ __________;

Pues bien, en esta unidad trabajaremos con una expresión de la forma $\frac{dF}{dt} = kF$, que puede considerarse una ecuación si al concepto clave número 7 le agregamos:



Concepto clave

7. Una ecuación es una igualdad en la que aparecen expresiones polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas o ***derivadas***, en las que se desconoce al menos un término o incógnita.

A las ecuaciones que incluyen derivadas se les llama *ecuaciones diferenciales.*

En estas ecuaciones, la parte desconocida o incógnita *no es un valor numérico de la incógnita* sino *una función*.

Transfiriendo la experiencia con ecuaciones como las que resolvimos en la página 4-8, respecto al problema de las amibas hemos resuelto ecuaciones como las siguientes:

Si $\frac{dF}{dt} = k(2^t)$, entonces F resultó ser $F(t) = 2^t$

Si $\frac{dF}{dt} = k(2^{at})$, entonces F resultó ser $F(t) = 2^{at}$

Si $\frac{dF}{dt} = k(e^{at})$, entonces F resultó ser $F(t) = C\,e^{at}$

Sin embargo, así como existen procedimientos formales para encontrar la solución de ecuaciones como $x^2 - 9 = 0$ ó $x^2 - 3x - 10 = 0$ ó unas más complicadas que sabemos resolver, también existen procedimientos formales para obtener la solución de *ecuaciones diferenciales*.

La clave de los procedimientos algebraicos usados para resolver ecuaciones como $x + 5 = 7$, $\frac{x}{8} = 6$, ó $x^2 - 9 = 0$ es efectuar “la operación contraria o inversa”.

En $x + 5 = 7$, “restamos” a ambos miembros 5 y llegamos al resultado $x = 2$.

En $\frac{x}{8} = 6$, “multiplicamos” ambos miembros por 8 y llegamos al resultado $x = 48$.

En $x^2 - 9 = 0$, “sumamos 9 y extraemos raíz cuadrada” a ambos miembros, para llegar al resultado $x = \sqrt{9} = \pm 3$.

En el caso de las *ecuaciones diferenciales* que aquí trataremos, la clave no cambiará. La operación derivar o diferenciar tiene su “operación contraria o inversa”.

¿Cuál es? ____

De manera que usando la antiderivada o integral indefinida podemos resolver ecuaciones diferenciales como éstas:

Si $\frac{dF}{dx} = \cos x$, entonces $F(x) = sen\ x + c$, porque $\int \cos x\, dx = senx + c$

Si $\frac{dF}{dx} = \sec^2 x$, entonces $F(x) = tan\ x + c$, porque $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

Si $\frac{dF}{dx} = e^x$, entonces $F(x) = e^x + c$, porque $\int e^x dx = e^x + c$

Aplicando conceptos que hemos manejado en este curso, como el de *diferencial de una función* y el de *integral indefinida*, no tendremos dificultad en seguir este procedimiento:

PROCEDIMIENTO

Para resolver un ecuación diferencial de la forma $\frac{dF}{dt} = kF$:

1. La llevamos a la forma diferencial: $dF = k\,F\,dt$
2. Integramos ambos miembros: $\int dF = \int k\,F\,dt$
3. Resolvemos cada una de las integrales. Y
4. Simplificamos la expresión obtenida, para $F(t)$.

Ejemplo 1

La expresión con que modelamos el problema de las amibas:

$$\frac{dF}{dt} = C_0 2^t$$

puede ser tratada con el procedimiento anterior.

$$dF = C_0\, 2^t\, dt$$

$$\int dF = \int C_0 2^t\, dt = C_0 \int 2^t\, dt$$

$$F(t) = C_0 \frac{1}{\ln 2} 2^t + c$$

$\boxed{F(t) = C\ 2^t + c}$; con $C = \frac{C_0}{\ln 2}$ y c la constante de integración.

Encontramos como solución a la ecuación dada, la función $F(t) = C\, 2^t + c$

La manera de verificar que la solución obtenida es correcta, al igual que en las ecuaciones algebraicas, será sustituyendo en la ecuación original el valor obtenido para F y viendo si se cumple la condición $\frac{dF}{dt} = kF$. Hagámoslo:

$$\frac{d\left(\frac{C_0}{\ln 2} 2^t + c\right)}{dt} = \frac{C_0}{\ln 2}\frac{d}{dt}(2^t) + \frac{dc}{dt} = \frac{C_0}{\ln 2}\left((\ln 2)\ 2^t\right) + 0 = C_0 2^t \text{, ¡como se quería!}$$

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación $\frac{dF}{dt} = k\,3^t$, con k una constante.

Completar los espacios:

$$dF = k\,3^t\,dt; \quad \int dF = k\int 3^t\,dt = \rule{6cm}{0.4pt}$$

De donde la solución es $F(t) = C\, 3^t + c$, con $C = \frac{k}{\ln 3}$ y c la constante de integración.

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación $\frac{dF}{dt} = e^{4t}$.

Completar los espacios:

$dF = e^{4t} dt; \quad \int F dt =$ ________________

De donde la solución es $F(t) = \frac{1}{4} e^{4t} + c$

Ejercicio 1

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{dF}{dt} = 10^t$
2. $\frac{dF}{dt} = 8\,(10^t)$
3. $\frac{dF}{dt} = 8\,(10^{5t})$
4. $\frac{dF}{dt} = e^{-2t}$
5. $\frac{dF}{dt} = 3e^{-2t}$
6. $\frac{dF}{dt} = e^{\sqrt{2}\,t}$