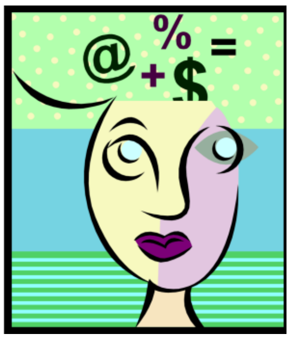
ANALIZAR Y APLICAR EL MODELO

Al finalizar esta sección, quien imparte el curso habrá logrado que los estudiantes:

- Utilicen el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación dada.
- Distingan la diferencia en el comportamiento del modelo $F(t) = F_0 e^{kt}$ dependiendo del signo de *k*, lo que esto significa en las situaciones modeladas.



PROBLEMA DE LOS SIGNOS

Reflexionar acerca de las repercusiones que tiene el signo del exponente del número *e* en el desarrollo de una situación dada, cuando se tratan problemas que se ajustan al modelo $F(t) = F_0 e^{kt}$

Ejercicio 1

A continuación proponemos una serie de situaciones para que el estudiante indique el signo que debe tener el exponente de la exponencial en el modelo $F(t) = F_0 e^{(\ )kt}$ que las representa.

1. El crecimiento de una población como las de amibas o moscas que hemos analizado. Signo del exponente de *e:* ______.

2. La temperatura de un cuerpo caliente, en contacto con un medio frío. Signo del exponente de *e:* ______.

3. El voltaje que permanece en un condensador, después de un tiempo. Signo del exponente de *e:* ______.

4. El monto del capital que permanece en un depósito bancario ganando un interés compuesto. Signo del exponente de *e:* ______.

5. La cantidad de material radiactivo que permanece en una muestra después de un tiempo. Signo del exponente de *e:* ______.

6. El valor de la presión atmosférica a una altura sobre el nivel del mar. Signo del exponente de *e:* ______.

7. La cantidad de medicamento que permanece en el organismo de un paciente después de un tiempo. Signo del exponente de e: ______.

8. La intensidad de la luz en el agua como función de la profundidad. Signo del exponente de e: ______.

9. El comportamiento de una población de bacterias bajo la acción de un antibiótico. Signo del exponente de e: ______.

10. Ahora pedir a los alumnos que redacten una conclusión que establezca una relación entre la variación de las magnitudes implicadas en cada situación y el signo del exponente de e:

____

____

____.

Ejercicio 2 Predicciones

En este ejercicio plantearemos situaciones que nos llevarán a analizar más a fondo el modelo que hemos venido manejando, al aplicarlo en eventos de muy variada naturaleza.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Tal vez algunas de las aplicaciones que proponemos requieran profundizar un poco sobre los conceptos manejados. No dejar de hacerlo, sabemos que los alumnos cuentan con los medios y recursos para hacerlo.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Al terminar cada aplicación proponemos los resultados a los que esperamos arriben los estudiantes.

1. Crecimiento demográfico en México

La rapidez del crecimiento demográfico en México es continua y proporcional al número de habitantes en un momento dado.

a) Escribir la ecuación diferencial que modela esta situación. Representando con $P(t)$ la población en el tiempo t, con P_0 la población inicial, con k la tasa de crecimiento anual y con t el tiempo en años.

$$\frac{dP}{dt} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) Obtener la solución general de esta ecuación.

$P(t) =$ ________

c) Encontrar una solución particular considerando estas condiciones iniciales:

En abril de *2004* ($t = 0$), la población nacional era *106 300 000* habitantes y la tasa media de crecimiento anual de *1.2%*

$P(t) = (106.3)\ 10^6$__________

d) Si se mantiene esa tasa de crecimiento, ¿qué población debió tener México en *2010*?

$P(6) =$ ______________________

e) ¿Cuántos años deberán pasar para que México tenga *120* millones de habitantes?

Comparar los resultados anteriores con los datos y proyecciones elaboradas por el INEGI.

f) Formular predicciones para la población mexicana *1, 5,* y *20* años después de *2004*.

g) Calcular el tiempo que deberá transcurrir para que México tenga *108, 130* y *200* millones de habitantes, a partir de *2004*.

h) Usar el modelo obtenido para calcular la población de México en el año *2000*. Compararla con la población que había en el año *2000* y explicar las razones por las que existe diferencia, si es que existe.

$P(-4) =$ ____

i) Si *10* años después de *2004* la población es de tan sólo *115* millones de habitantes, ¿cuál tuvo que ser la tasa media anual de crecimiento demográfico en ese período *(2004 – 2014)*?

Los estudiantes deben llegar a resultados como éstos:

1. a) $\frac{dP}{dt} = kP$; b) $P(t) = P_0\, e^{kt}$; c) $P(t) = (106.3)\ 10^6(e^{0.012t})$;

d) $P(6) = 106.3(10^6)\ e^{0.012(6)} = 114.23(10^6)$ *habitantes*

e) $106.3(10^6)\ e^{0.012t} = 120(10^6)$; $e^{0.012t} = \frac{120}{106.3}$; $\ln e^{0.012t} = \ln \frac{120}{106.3}$;

$0.012t = \ln \frac{120}{106.3}$; $t = \frac{1}{0.012} \ln \frac{120}{106.3}$; $t = 10.1$ años.

f) $P(1) = 106.3(10^6)\ e^{0.012(1)} = 107.58(10^6)$ *habitantes*

$P(5) = 106.3(10^6)\ e^{0.012(5)} = 112.87(10^6)$ *habitantes*

$P(20) = 106.3(10^6)\ e^{0.012(20)} = 135.13(10^6)$ *habitantes*

g) Para *108* millones: $106.3(10^6)\, e^{0.012t} = 108(10^6)$; $t = \frac{1}{0.012}\ln\frac{108}{106.3} = 1.32$ años

Para *130* millones: $t = \frac{1}{0.012}\ln\frac{130}{106.3} = 16.77$ años

Para *200* millones: $t = \frac{1}{0.012}\ln\frac{200}{106.3} = 52.67$ años

h) $P(-4) = 106.3(10^6)\, e^{0.012(-4)} = 101.3\ (10^6)$

i) $P(t) = 106.3(10^6)\, e^{k(10)} = 115(10^6)$; $k = \frac{1}{10}\ln\frac{115}{106.3} = 0.00786 = 0.786\%$

2. Eliminación de medicamentos

La cantidad de cierto medicamento que permanece en el organismo de una persona disminuye de manera continua y proporcional a la dosis que se le administró.

a) Escribir la ecuación diferencial que modela esta situación. Representando con $M(t)$ la cantidad de medicamento en miligramos presente en el tiempo t, con M_0 la cantidad de medicamento administrada inicialmente, con k la constante de proporcionalidad y con t el tiempo transcurrido desde que se le administró, en horas.

$\frac{dM}{dt} =$ _________

b) Obtener la solución general de esta ecuación.

$M(t) =$ _________

c) Para obtener el valor de k considerar estas condiciones iniciales:

Se administraron inicialmente *15 mg* de medicamento y después de *8* horas se ha eliminado el *10%* de la dosis.

$M(t) = 15\, e^{-k(8)} = 13.5$;

De donde $k = 0.01317$ y por tanto $M(t) =$ ____________________

---

d) ¿Qué cantidad de medicamento permanecerá en el organismo del paciente después de *24* horas?

e) ¿Cuántas horas deben pasar para que el paciente conserve en su organismo la mitad del medicamento administrado?

f) Calcula la cantidad de medicamento que permanecerá en el cuerpo del paciente después de *1*, *12* y *72* horas de haberlo recibido.

g) Encuentra el tiempo que deberá transcurrir para que permanezcan en el paciente $5\ mg$ de medicamento.

Los estudiantes deben llegar a resultados como éstos:

a) $\frac{dM}{dt} = -kM$; b) $M(t)=M_0\, e^{-kt}$; c) $M(t) = 15\, e^{-k(8)} = 13.5, k = -\frac{1}{8}\ln\frac{13.5}{15} = 0.01317$

d) $M(24) = 15\, e^{-0.01317(24)} = 10.93\ mg$

e) $15\, e^{-0.01317t} = 7.5;\quad t = -\frac{1}{0.01317}\ln\frac{1}{2} = 52.6\ horas.$

f) $M(1) = 15\, e^{-0.01317(1)} = 14.8\ mg$

$M(12) = 15\, e^{-0.01317(12)} = 12.8\ mg$

$M(72) = 5.81\ mg$

g) $15\, e^{-0.01317t} = 5;\quad t = -\frac{1}{0.01317}\ln\frac{1}{3} = 83.41\ horas.$

3. Determinando la antigüedad de un fósil a través del Carbono *14 (C14)*

La cantidad del isótopo radiactivo del Carbono *(C14)* que permanece después de t años en un organismo muerto, disminuye continuamente y es proporcional a la cantidad de ese isótopo que contiene en el momento de morir.

a) Escribir la ecuación diferencial que modela esta situación. Representando con $C(t)$ la cantidad del isótopo que hay en el fósil en el tiempo t, con C_0 la cantidad inicial de *C14* que contenía al momento de morir, con k la constante de desintegración y con t el tiempo en años.

$\frac{dC}{dt} =$ ________

b) Obtener la solución general de esta ecuación.

$C(t) =$ ________

c) La cantidad inicial de *C14* que contienen los organismos vivos es la misma que existe en la atmósfera, a la que llamaremos C_0. Una vez que el organismo muere, la masa C_0 se reduce a la mitad cada 5600 años. Obtener el valor de la constante de desintegración k y con ello una solución particular de la ecuación diferencial que dependa sólo de t.

d) ¿Qué porcentaje de *C14* tendrá un fósil con *1000* años de antigüedad?

e) ¿Cuántos años de antigüedad tiene un fósil en el que se encuentra sólo el *80%* de C_0?

f) Elaborar predicciones para el porcentaje de C_0 que tendrá un fósil con *2000, 10 000* y *20 000* años de antigüedad.

g) Calcular la antigüedad que se asignará a un fósil que contenga *C14* en estos porcentajes de C_0: *60%, 30%* y *10%*.

Los estudiantes deben llegar a resultados como éstos:

a) $\frac{dC}{dt} = -kC$; b) $C(t) = C_0 e^{-kt}$;

c) $C = C_0 e^{-k(5600)} = \frac{1}{2}C_0$; de donde $k = -\frac{1}{5600}\ln\frac{1}{2} = 0.0001238$

Y por tanto $C(t) = C_0 e^{-0.0001238\, t}$

d) $C(t) = C_0 e^{-0.0001238(1000)} = 0.8835\, C_0 = 88.35\ \%\, C_o$

e) $C_0 e^{-0.0001238t} = 0.80\, C_0$; $t = -\frac{1}{0.0001238}\ln 0.8 = 1802.45$ *años*.

f) $C(2000) = C_0 e^{-0.0001238(2000)} = 0.7806\, C_0 = 78.06\ \%\, C_0$

$C(10\,000) = C_0 e^{-0.0001238(10\,000)} = 0.2899\, C_0 = 29\ \%\, C_0$

$C(20\,000) = C_0 e^{-0.0001238(20\,000)} = 0.084\, C_0 = 8.4\ \%\, C_0$

g) Si $C = 60\ \%\, C_0$: $C_0 e^{-0.0001238t} = 0.60\, C_0$; $t = -\frac{1}{0.0001238}\ln 0.6 = 4126.21$ *años*

Si $C = 30\ \%\, C_0$: $C_0 e^{-0.0001238t} = 0.30\, C_0$; $t = -\frac{1}{0.0001238}\ln 0.3 = 9725.14$ *años*

Si $C = 10\ \%\, C_0$: $C_0 e^{-0.0001238t} = 0.10\, C_0$; $t = -\frac{1}{0.0001238}\ln 0.1 = 18599.23$ *años*.