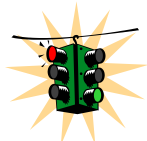
SITUACIONES QUE SE PRESENTAN MEDIANTE ÁREAS



Concepto clave

3. Asociar el área bajo una curva con la solución a una situación dada

Sugerencia para quien imparte el curso

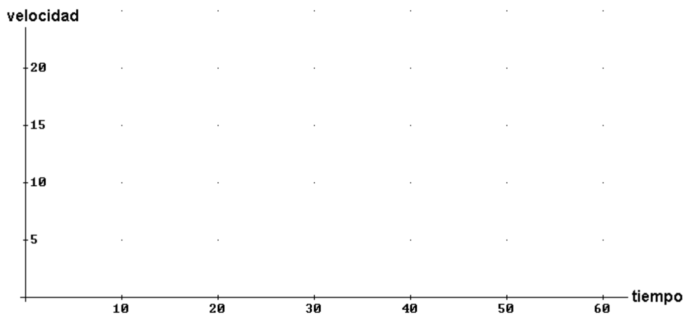
Proponemos el desarrollo de este problema y su análisis, para realizarlo conjuntamente con los alumnos y posteriormente analizar los resultados

Problema del corredor

El entrenador de un equipo de atletismo observa que su mejor corredor arranca y acelera uniformemente hasta alcanzar su máxima velocidad en los primeros 10 segundos, luego mantiene esa velocidad durante los 30 segundos siguientes, y por último desacelera uniformemente para parar a los 60 segundos

¿Cuál es la distancia total recorrida por el atleta, si su velocidad máxima es de 10 m/s?

Solicitar a los alumnos representar gráficamente la velocidad del corredor durante los diversos intervalos de tiempo. Como durante los primeros 10 segundos aceleró uniformemente, entonces su velocidad en ese intervalo de tiempo es lineal, durante los 30 segundos siguientes mantiene una velocidad constante, luego su velocidad es lineal y como desacelera uniformemente, la velocidad del atleta durante los últimos 20 segundos también es lineal.



Descomponer la gráfica de la velocidad del atleta en los intervalos de 0 a 10 segundos, de 10 a 40 segundos y de 40 a 60 segundos para formar tres figuras geométricas conocidas, ¿qué figuras son?

En el intervalo [0,10] se forma un ___________________________

En el intervalo [10,40] se forma un ___________________________

En el intervalo [40,60] se forma un ___________________________

Dado que la velocidad que mantuvo el corredor de los 10 a 40 segundos es constante, la distancia que recorrió en ese intervalo de tiempo es fácil de calcular por medio de la conocida fórmula:

$$velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$$

Ejercicio 1

Calcular la distancia recorrida por el atleta en el intervalo [10,40] utilizando la fórmula anterior.

Ejercicio 2

Calcular el área del rectángulo formado bajo la gráfica de la velocidad del atleta de los 10 a los 40 segundos.

¿Cómo son el área del rectángulo y la distancia calculada en el ejercicio 1?

Preguntar a alumno ¿Qué se puede afirmar de esta relación entre la distancia recorrida y el área de la figura geométrica generada por la velocidad del corredor?

____

____

Si la afirmación es correcta, entonces ¿cómo se calcularía la distancia recorrida por el atleta durante los primeros 10 segundos?

Ejercicio 3

Calcular la distancia recorrida por el atleta en el intervalo [0,10]

Ejercicio 4

Calcular la distancia recorrida por el atleta en el intervalo [40,60]

De todo lo anterior se concluye que la distancia total recorrida por el corredor es de ______ metros.

Problema del corredor (2)

Con respecto al corredor del problema inicial, calcular la distancia recorrida en los intervalos de tiempo siguientes:

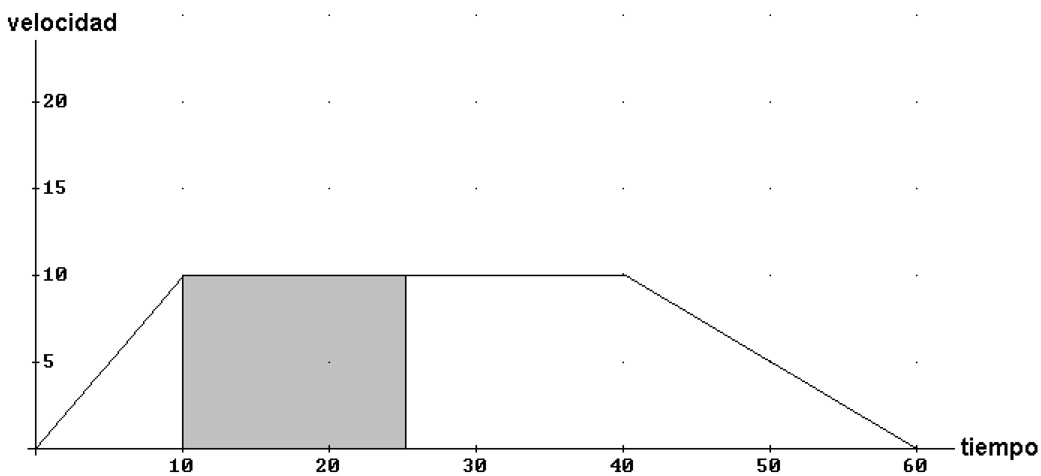
a) De los 10 a 25 segundos.

b) De los 5 a 10 segundos.

c) De los 30 a 45 segundos.

Por lo antes visto, el problema se reduce a calcular el área de algunas figuras geométricas conocidas.

Para encontrar la distancia recorrida por el corredor de los 10 a 25 segundos, hay que calcular el área bajo la gráfica de la velocidad en el intervalo [10,25], la cual aparece sombreada a continuación.

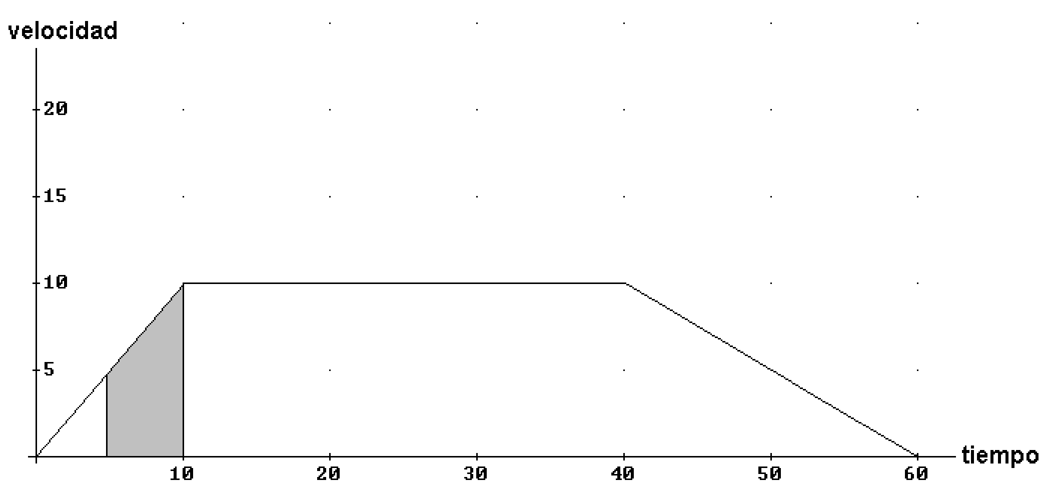


¿Qué figura geométrica es? ______________________

¿Cuáles son sus dimensiones?____________________________________

Su área es _________, por lo tanto, la distancia recorrida por el corredor de los 10 a 25 segundos fue de ________ metros.

De manera análoga, para saber la distancia recorrida por el corredor de los 5 a los 10 segundos, hay que calcular el área de la figura sombreada siguiente:



¿Qué figura geométrica es? ______________________

¿Cuál es la fórmula para calcular su área? ___________________________

Altura = _______

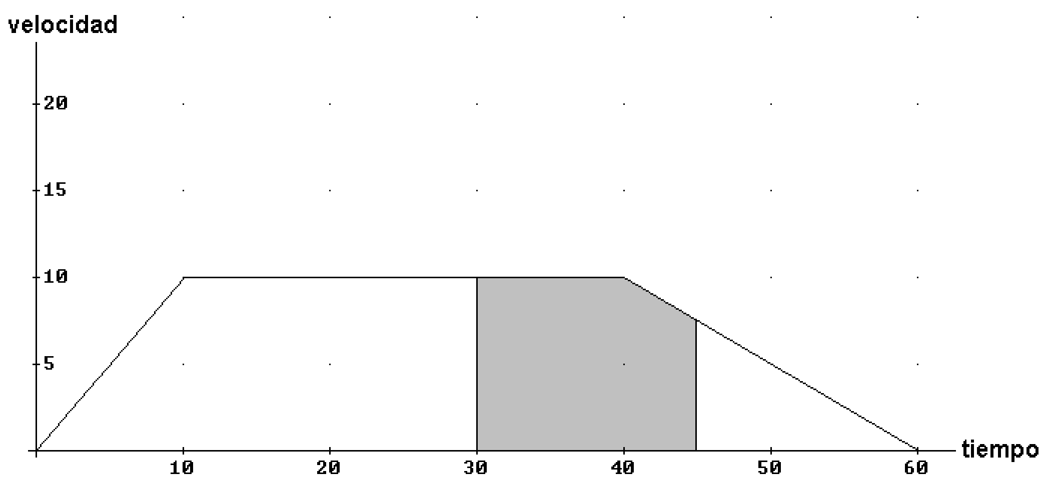
Base mayor = _______

Base menor = _______

Área = ______

Por lo tanto, el corredor recorrió de los 5 a los 10 segundos una distancia de ______ metros.

Por último, la distancia recorrida por el atleta de los 30 a los 45 segundos estará dada por el área de la figura sombreada siguiente.



¿Cómo se calcularía? ____

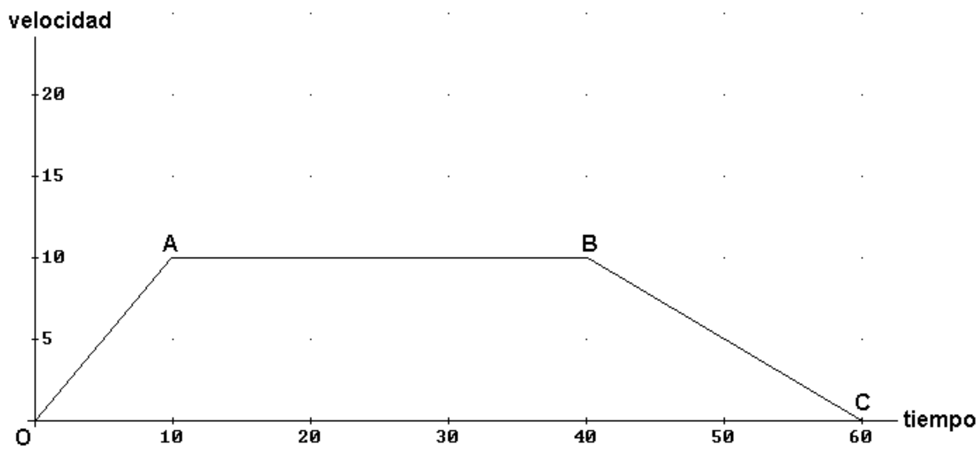
Área del cuadrado formado en el intervalo [30,40] = _________

Área del trapecio formado en el intervalo [40,45] = _________

Área de la figura formada en el intervalo [30,45] = _________

La distancia recorrida por el corredor de los 30 a 45 segundos fue de ________ metros.

Sugerir a los alumnos encontrar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados OA, AB y BC de la poligonal que describe la velocidad del corredor del problema inicial.



¿Cuáles son las coordenadas de los puntos O, A, B y C?

O(___ , ___) A(___ , ___) B(___ , ___) C(___ , ___)

¿Cuál es la fórmula para encontrar la ecuación de una recta cuando se conocen las coordenadas de dos de sus puntos?

____

Ejercicio 5

Ecuación de la recta que pasa por los puntos O y A: y = __________

Ejercicio 6

Ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B: y = __________

Ejercicio 7

Ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C: y = __________

Problema del corredor (3)

Con respecto al corredor del problema inicial, calcular el tiempo en el que ha alcanzado una distancia de:

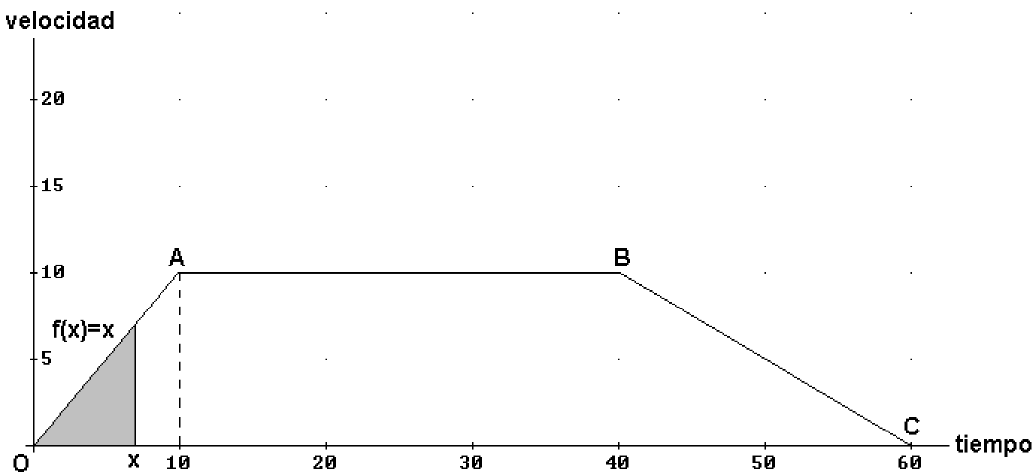
a) 18 metros

b) 100 metros

c) 382 metros

Sugerencia: Buscar expresiones que relacionen el área con los respectivos valores de x en cada uno de los tres intervalos en que se ha dividido la velocidad del corredor.

Tomar un valor arbitrario x en el intervalo de *0* a *10* segundos como se muestra en la figura siguiente, y calcular el área del triángulo sombreado.



Base =

Altura =

Área =

Enfatizar a los alumnos que se ha encontrado una función para calcular el área de *0* a x dentro del intervalo de 0 a 10 segundos, ésta es:

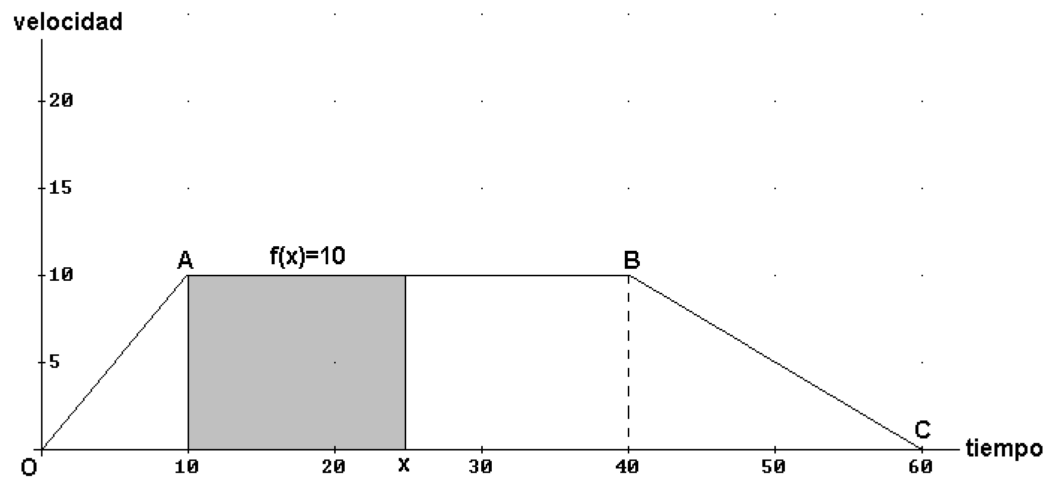
$$A(x) = \frac{x^2}{2} + 0 = F(x) + 0$$

Preguntar al alumno ¿Qué relación observa entre $f(x)=x$ y $F(x) = \frac{x^2}{2}$?

____

Si no la ve, pedirle que encuentre $\frac{d\ F(x)}{dx} =$

Proceder de manera análoga para los intervalos de 10 a 40 segundos y de 40 a 60 segundos.



Base =

Altura =

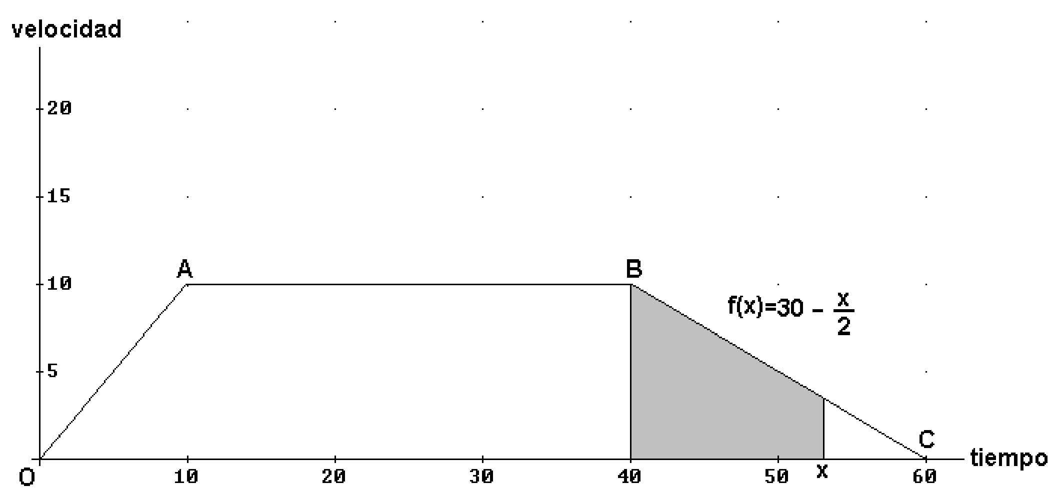
Área =

En este intervalo la función para calcular el área de *10* a *x* es

$A(x)=10x-100=F(x)-100$

Encuentra $\frac{d\ F(x)}{dx}=$

¿Qué se puede concluir?



Base mayor =

Base menor =

Altura =

Área =

En este intervalo la función para calcular el área de 40 a x es

$$A(x) = -\frac{x^2}{4} + 30x - 800 = F(x) - 800$$

Encuentra $\frac{d\ F(x)}{dx} =$

¿Qué observas? ____

En todos los casos la función $A(x)=F(x)+C$ es **antiderivada** de la función $f(x)$

Este resultado muestra que en efecto la distancia recorrida por el atleta está dada por el área bajo la gráfica de la velocidad, ¿por qué?

____

____

____

Ahora sí, utilizando las funciones de área encontradas se puede dar respuesta al problema del corredor (3)

Sabemos que en el primer intervalo recorre una distancia de 50 metros, luego los 18 metros los alcanza en ese intervalo.

Así que la respuesta estará dada por el valor de x para el cual la función $A(x) = \frac{x^2}{2}$ es igual a 18.

Encontrarla resolviendo la ecuación $\frac{x^2}{2} = 18$

x = ____, por lo tanto, el corredor ha recorrido 18 metros a los _____ segundos.

A los 10 segundos ya ha recorrido 50 metros, por lo tanto, para lograr una distancia de 100 metros, en el segundo intervalo tendrá que recorrer los otros 50 metros.

Para saber en cuánto tiempo recorrerá una distancia de 50 metros en el segundo intervalo hay que encontrar el valor de x para que la función $A(x)=10x-100$ tome el valor 50.

En otras palabras, resolver la ecuación $10x-100=50$

x = ____, por lo tanto, el corredor ha recorrido 100 metros a los _____ segundos.

A los 40 segundos ya ha recorrido 350 metros, luego, para que alcance una distancia de 382 tendrá que recorrer en el tercer intervalo una distancia de 32 metros.

Para calcular el tiempo en que recorre 32 metros en el tercer intervalo, tendrás que encontrar el valor de x para que la función $A(x) = -\frac{x^2}{4} + 30x - 800$ tome el valor 32.

Ahora se debe resolver la ecuación $-\frac{x^2}{4} + 30x - 800 = 32$

x = ____, por lo tanto, el corredor ha recorrido 382 metros a los _____ segundos.

Ejercicio 8

Utilizar las funciones de área anteriores para calcular la distancia recorrida por el corredor del problema:

1) Después de 8 segundos
2) De los 3 a los 9 segundos
3) después de 37 segundos
4) De los 15 a los 28 segundos
5) después de 52 segundos
6) De los 43 a los 56 segundos

Para concluir es importante mencionar que hasta aquí se tiene una primera aproximación a una importante relación entre las funciones $f(x)$ y $A(x)$, que se conoce como el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.