ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES

A Newton se le atribuye la siguiente frase célebre "Si he llegado a ver más lejos que otros es porque me subí en hombros de gigantes" se refiere entre otros a su maestro y mentor Isaac Barrow

Sugerencias para quien imparte el curso

Le presentamos un problema inicial que puede considerarse como prototipo de los que más adelante aprenderán a resolver los alumnos y le sugerimos analizar junto con ellos la problemática que implica resolverlo para establecer la necesidad de conocer y aplicar otros recursos. Se le sugiere que los alumnos inicien resolviendo los ejercicios que se presentan a continuación y resuelvas con ellos el ejemplo 3.1. Además se les proponga leer sobre Isaac Newton, Pierre Fermat, Wilhelm Leibnitz e Isaac Barroow y para ti compañero profesor, te sugerimos la lectura de alguna de las referencias siguientes para recordar alguno de los trabajos que dieron origen al Cálculo:

http://es.scribd.com/doc/147071130/Morris-Kline-El-pensamiento-matematico-de-la-antiguedad-a-nuestros-dias

http://www.profesorenlinea.cl/biografias/NewtonIsaac.htm

http://www.portalplanetasedna.com.ar/leibniz.htm

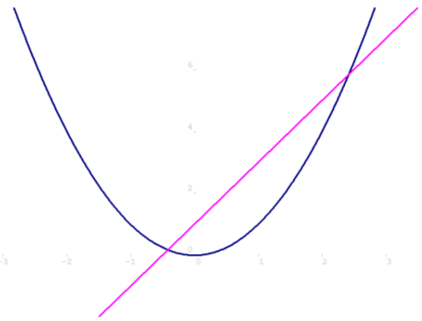
https://www.google.com.mx/search?q=isaac+barrow+aportaciones+al+calculo&oq=isaac+barrow&aqs=chrome.0.69i59l3j69i57j0l2.9622j0j7&sourceid=chrome&espv=210&es_sm=93&ie=UTF-8

Problema del terreno

Alguna vez a un profesor de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades, que estaba impartiendo el curso de Matemáticas IV, una alumna le preguntó que si le podía ayudar a resolver un problema que le había propuesto su papá, el profesor le contestó que sí.

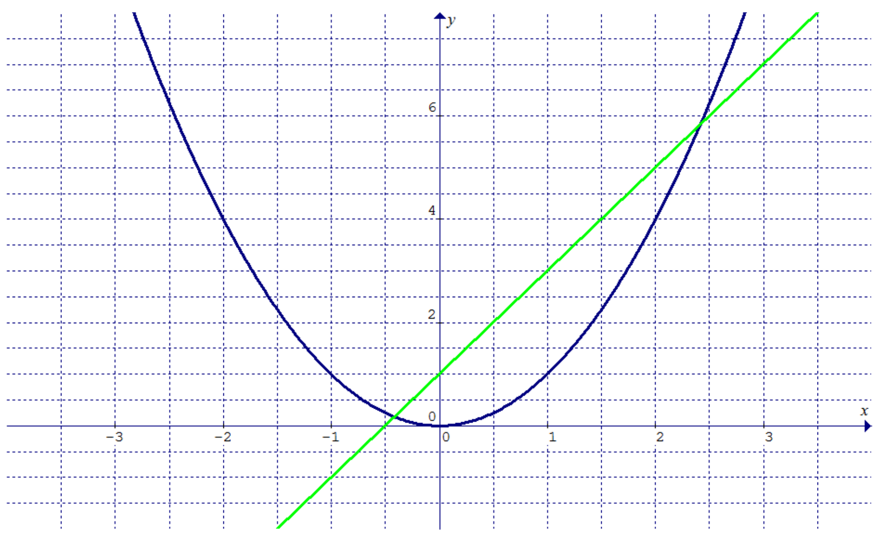
El problema consistía en que su papá había comprado un terreno en algún lugar y le preguntó a su hija que si le podía ayudar a calcular el área para pagar lo justo ya que el precio por metro cuadrado ya estaba convenido con el vendedor, su hija le dijo que sí, ya que creía que el terreno tenía la forma de un polígono regular (cuadrado, rectángulo o de otro tipo).

Cuando su padre la llevó a ver el terreno se encontró con la sorpresa de que el terreno no tenía forma regular ya que estaba limitado por una calle al frente y en la parte posterior pasaba un río que tenía la forma como la de una parábola tal y como se muestra en la figura siguiente.



Por eso la alumna recurrió al profesor; el maestro le dijo que aunque el problema era complicado no es tan difícil de resolver, que sabiendo un poquito de cálculo integral se podía encontrar la solución.

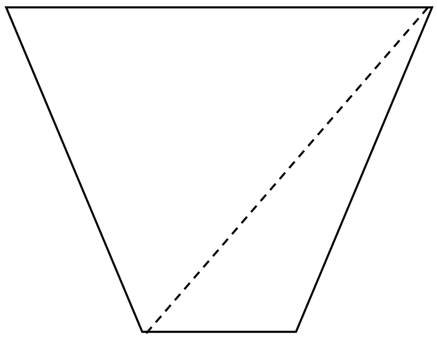
El problema se refiere a encontrar el área de una superficie acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x + 1$ al utilizar un sistema de coordenadas, como se puede apreciar en la figura siguiente, utilizando una escala de 1 a 100 en metros:

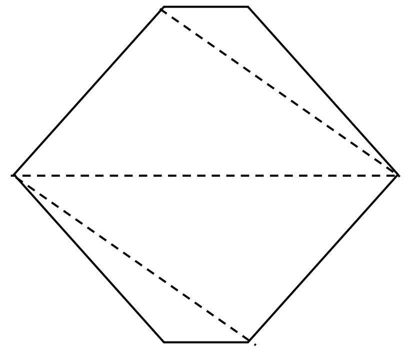


Sugerencia para quien imparte el curso

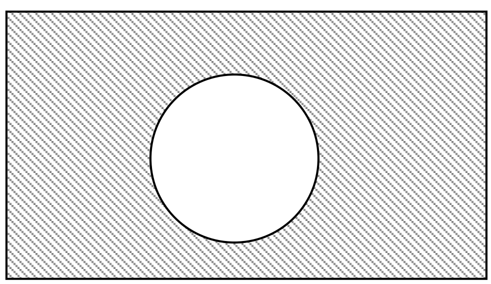
Invita a los alumnos que sugieran algunas formas de resolver este problema y discute con ellos la conveniencia o dificultades que se puedan presentar. Éste problema lo retomaremos más adelante una vez que dispongamos de la herramienta necesaria.

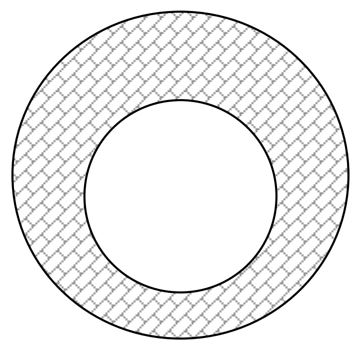
En los cursos de geometría elemental el alumno pudo obtener áreas de figuras planas limitadas por segmentos rectilíneos, haciendo una triangulación en cada caso, como se muestra en las siguientes figuras.



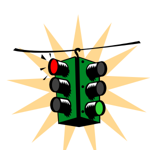


Y aún de figuras formadas por círculos como las siguientes:





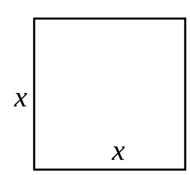
En nuestro problema, la superficie no está limitada en la parte superior por un segmento rectilíneo, ni por un círculo; repasemos primeramente el cálculo de áreas de polígonos y posteriormente retomaremos el problema para resolverlo, ya disponiendo de otras herramientas.



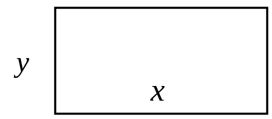
Conceptos clave

1. Áreas de Polígonos regulares

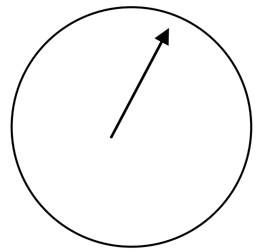
El área de un cuadrado $A = x^2$



El área de un rectángulo $A = x \cdot y$

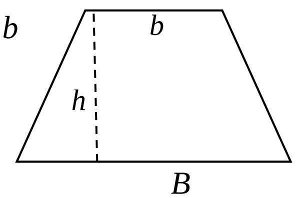


El área de un círculo de radio r $A = \pi r^2$



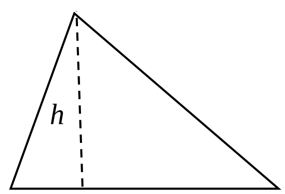
El área de un trapecio de base mayor B, base menor b y altura h es:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

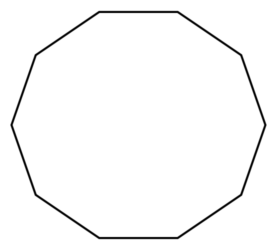


El área de un triángulo de base b y altura h es:

$$A = \frac{b\cdot h}{2}$$

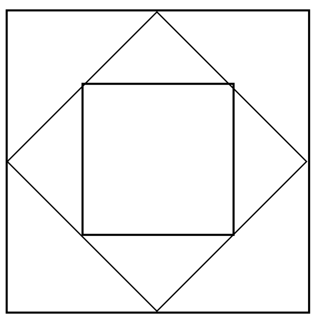


El área de un polígono regular $A = \dfrac{perímetro \times apotema}{2}$



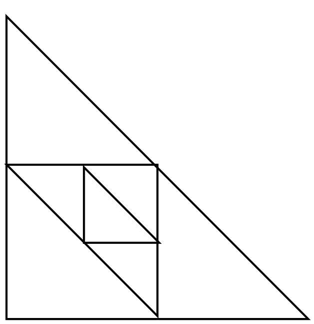
Ejercicio 1

1. A partir de un cuadrado de lado 1 metro, generar un cuadrado interior uniendo los puntos medios de los lados; después en el cuadrado interior, generar un nuevo cuadrado de la misma manera, ¿cuál será el área del último cuadrado?



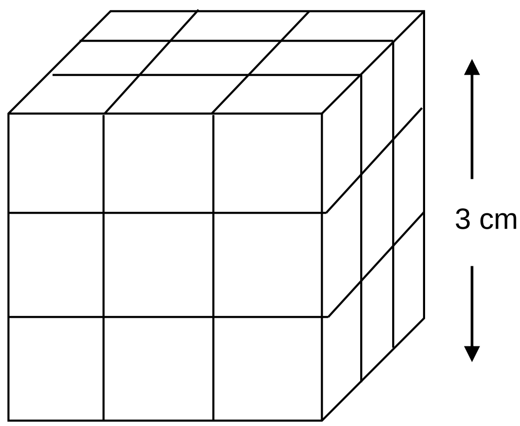
Realiza los cálculos

2. Dibujar un triángulo rectángulo isósceles, suponer que cada cateto mide 1 metro y proceder de la misma forma que el cuadrado del ejemplo anterior y calcular el área del tercer triángulo que se obtenga.



Realiza los cálculos

3. Considera un cubo de 3 cm de lado que se divide en 27 cubitos congruentes, se retiran los 7 cubitos centrales, es decir el del centro de cada cara y el del centro del cubo grande.



a) ¿Cuál es el área de las paredes laterales?(el área de todas las caras

EJEMPLO 1

Actualmente conocemos la fórmula para obtener el área de un círculo, pero revisemos alguno de los trabajos que se realizaron en la antigüedad para llegar a descubrir esta fórmula.

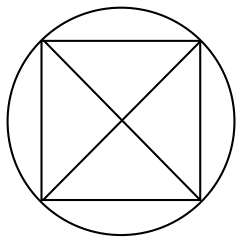
Los trabajos sobre el cálculo del siglo XVII inician con Johannes Kepler (1571-1630).

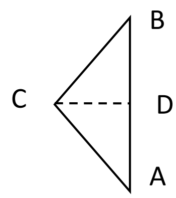
Él consideró el área de un círculo como la suma de las áreas de un número infinito de triángulos, cada uno con vértice en el centro del círculo y una base en la circunferencia.

Iniciemos el ejemplo con 4 triángulos.

Realiza las actividades siguientes:

a) Dibuja una circunferencia e inscribe 4 triángulos iguales con vértice en el centro de la circunferencia. Supongamos que el radio del círculo es $r = 10$ centímetros.





b) Calcula ahora el área de cada triángulo. Observa que los triángulos son isósceles y en ellos, los lados iguales miden lo mismo que el radio.

Para obtener el área debes calcular la altura del triángulo.

¿Cuánto mide el ángulo en el vértice C? ¿Estás de acuerdo que mide $\frac{\pi}{2}$?

Al trazar la altura CD, ésta divide al ángulo en C a la mitad y formamos 2 triángulos rectángulos en los que uno de sus ángulos agudos mide $\frac{\pi}{4}$

La función trigonométrica que relaciona el cateto opuesto con la hipotenusa es la función *seno* del ángulo

La aplicamos entonces al triángulo CAD

$$sen\frac{\pi}{4} = \frac{DA}{r} = \frac{\frac{AB}{2}}{r} \text{ , donde } AB = 2r\,sen\frac{\pi}{4}$$

Para obtener el valor de la altura, aplicamos ahora la función coseno

$$cos\frac{\pi}{4} = \frac{CD}{r} \text{ de donde } CD = r\cos\frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, para obtener el área del triángulo CDB

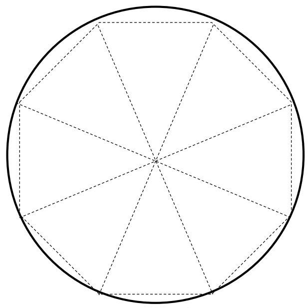
$$Área_{\Delta CAB} = \frac{base\,x\,altura}{2} = \frac{2r\,sen\frac{\pi}{4}\times r\cos\frac{\pi}{4}}{2} = r^2\,sen\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4} = 50 \text{ cm}^2$$

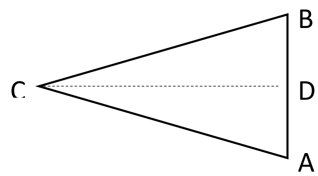
El área de los cuatro triángulos será entonces A= 200 cm^2.

Esta es una primera aproximación al área de un círculo y como podrás apreciar en la figura, se ignoró una gran parte del área del círculo.

Continuamos con el mismo proceso. Ahora dibuja una circunferencia e inscribe 8 triángulos iguales con vértice en el centro de la circunferencia. Supongamos que el radio del círculo continúa siendo r =10 cm.

Calcula ahora el área de cada uno de los triángulos. Observarás, de nuevo, que cada triángulo es isósceles, por lo que dos de sus lados son radios.





Para obtener el área del triángulo debemos calcular la base, que es el lado diferente y la altura.

Tracemos, de igual manera que en el proceso anterior, una altura, la cual coincide con la mediatriz de la base.

¿Cuánto mide el ángulo en el vértice C?______________

Efectivamente $\frac{\pi}{4}$

Como la altura también es mediatriz consideremos el triángulo CAD, que es un triángulo rectángulo y le asignamos x al lado AB.

¿Qué función trigonométrica relaciona el cateto opuesto con la hipotenusa?____

Bien, entonces $sen\,\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{x}{2}}{r}$ y despejando x de esta igualdad obtenemos

$x = 2r\ Sen\,\frac{\pi}{8}$, ¿Cuánto vale x? x es igual a 7.653668647

De modo semejante obtendremos la altura *h* del triángulo, ahora con la función coseno

$cos\,\frac{\pi}{8} = \frac{h}{r}$ de donde $h = r\ Cos\,\frac{\pi}{8}$

El valor de h es 9.238795325

Esta altura del triángulo es lo que conocemos como la apotema de un polígono regular

El área del triángulo será entonces, A= $\frac{base \times altura}{2}$ =_____________

Y el área de los 8 triángulos será: A= 282.8427125 cm^2

Compara este resultado con el área del círculo, obtenida por la fórmula que conoces de la geometría plana, la cual te daría como resultado 314.1592654 cm^2

Ejercicio 2

Considera ahora que se inscriben 16, 32, 64,etc. triángulos como en los ejemplos anteriores. Calcula el área de cada triángulo y el área total de los 16, 32 o 64 triángulos. Compárala con el área del círculo de radio r = 10 cm, utilizando la fórmula que ya conoces.

¿Cómo se podría generalizar el proceso?

Sugerencia para quien imparte el curso

Es importante hacerle notar a los alumnos que el procedimiento anterior es un proceso infinito y que el área del círculo se define como el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos cuando el número de lados crece sin límite