CONCEPTOS CLAVE DE LA UNIDAD 3

1. Áreas de polígonos regulares:

Cuadrado, rectángulo, trapecio, polígono regular y círculo.

2. Asociar el método de aproximación numérica para calcular un área con un proceso infinito.

3. Aproximar el área bajo una curva utilizando sumas de áreas.

4. La sumatoria de los n términos a_i:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$, siendo n un entero positivo

5. La sumatoria de la suma de los n términos a_i y b_i:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

6. La sumatoria de los números a_i multiplicados por una constante k:

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot a_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

7. La suma de los primeros n números naturales:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

8. La suma de n veces una constante k:

$$\sum_{i=1}^{n} k = nk$$

9. La suma de los cuadrados de los primeros n números naturales:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9+16+.......+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

10. La suma de los cubos de los primeros n números naturales:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1+8+27+64+......+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

11. Teorema Fundamental del Cálculo:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x)$ es cualquier función para la cual se tiene que $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

12. Propiedades de la integral definida:

a) Si $f(a)$ existe, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$

b) Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

c) Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, en donde *k* es cualquier constante.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en el intervalo $[a,b]$, entonces

d) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

e) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, donde c está en $[a,b]$.

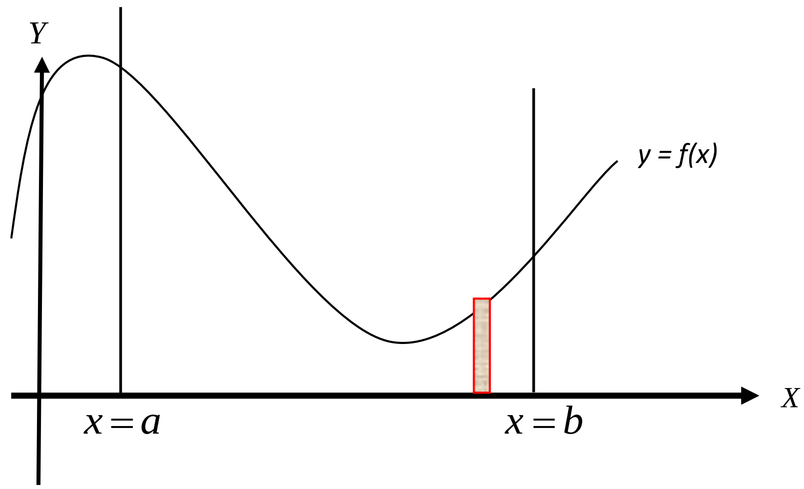
f) $\int_a^b kdx = k\int_a^b dx = k(b-a)$, donde k es cualquier constante.

g) Si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Área bajo una curva:

Si deseamos obtener el área de la superficie limitada por una curva $y = f(x)$ y uno de los ejes de coordenadas, conviene mostrar en la gráfica el elemento de área (un rectángulo) y utilizar alguno de los casos siguientes:

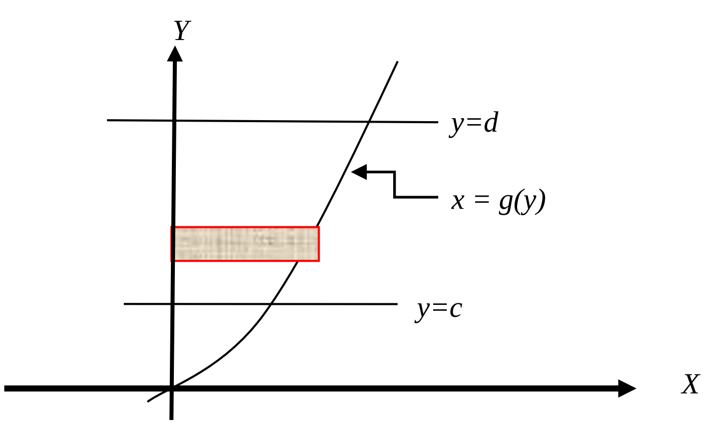
13.



Un extremo del rectángulo se apoya en el eje de abscisas y el otro en la curva. En este primer caso el elemento de área (rectángulo) es vertical, su altura es $y = f(x)$ y su ancho dx, por lo tanto el área se calcula con la siguiente integral:

$$A = \int_{x=a}^{x=b} y\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

14.



En este segundo caso el elemento de área (rectángulo) es horizontal, el largo es $x = g(y)$ y la altura dy, por lo tanto el área se obtiene con la siguiente integral:

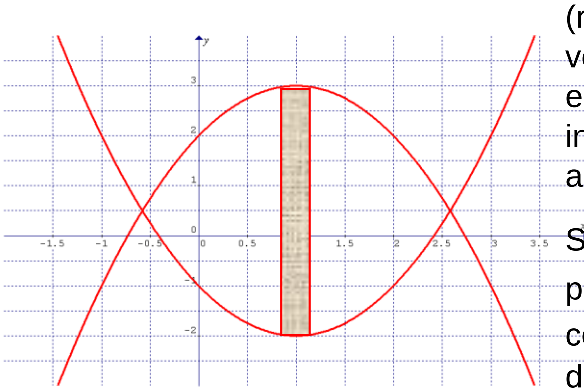
$$A = \int_{y=c}^{y=d} x\,dy = \int_{y=c}^{y=d} g(y)\,dy$$

Un extremo del elemento de área (el rectángulo) se apoya en el eje de ordenadas, mientras que el otro en la curva.

Área entre dos curvas:

Al obtener el área entre dos curvas, se presentan también los dos casos siguientes:

15.



En este caso el elemento de área (rectángulo) se coloca en forma vertical estando el extremo superior en la curva que abre hacia abajo y el inferior en la curva que abre hacia arriba.

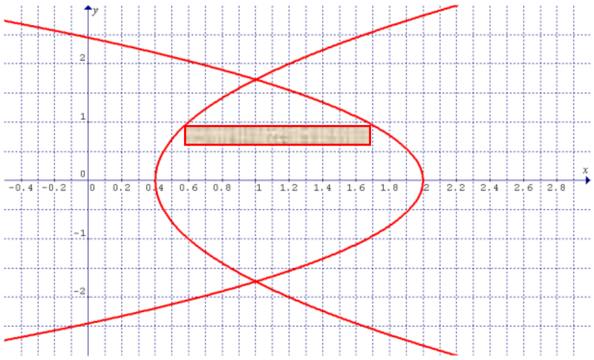
Si $y_1 = f_1(x)$ corresponde a la primera curva y $y_2 = f_2(x)$ corresponde a la segunda, la altura del rectángulo es $f_1(x) - f_2(x)$ y el ancho dy.

Por lo tanto para obtener el área se utiliza la siguiente integral:

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dy$$

Los límites de integración, a y b, corresponden a las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

16.



En este segundo caso el rectángulo se coloca en forma horizontal de modo que sus extremos están en una y en otra curva. Si $x_1 = g_1(y)$ corresponde a la curva que abre hacia la izquierda y $x_2 = g_2(y)$ corresponde a la que abre hacia la derecha, el largo del rectángulo es ahora $g_1(y) - g_2(y)$ y la altura es dy, por lo tanto el área se obtiene utilizando la siguiente integral:

$$A = \int_c^d \left(g_1(y) - g_2(y) \right) dy$$